Analyse 3

Plan

1. **L'espace $\mathbb{R}^p$:propriétés métriques et topologiques de $\mathbb{R}^n$**
2. Applications de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$
3. Fonctions différentiables

Plan

1. L'espace $\mathbb{R}^p$:propriétés métriques et topologiques de $\mathbb{R}^n$
2. **Applications de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$**
3. Fonctions différentiables

Plan

1. L'espace $\mathbb{R}^p$:propriétés métriques et topologiques de $\mathbb{R}^n$
2. Applications de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$
3. **Fonctions différentiables**

L'ESPACE $\mathbb{R}^p$:propriétés métriques et topologiques de $\mathbb{R}^p$

Définition 1.1

On appelle $\mathbb{R}^p$, l'ensemble produit de p ensembles identiques à $\mathbb{R}$, i.e

$$\mathbb{R}^p = \underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{p \text{ fois}}, \ p \geq 1.$$

Un élément x de $\mathbb{R}^p$ s'écrit sous la forme :

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_p)\,.$$

Où $x_1, x_2, \ldots, x_p$ sont des éléments de $\mathbb{R}$.
L'espace $\mathbb{R}^p$ peut être muni d'une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Il suffit de poser pour tout couple $x = (x_1, x_2, \ldots, x_p)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_p)$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} x + y &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_p + y_p)\,, \\ \lambda x &= (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_p)\,. \end{aligned}$$

Définition 2.1

Soit E un ensemble. On appelle **distance** $($*ou* **métrique**$)$ *sur E, une application d définie de $E \times E$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, vérifiant les trois conditions suivantes :*

$(\mathcal{D}_1)$ $\forall (x,y) \in E \times E,\ d(x,y) = d(y,x)$ *(symétrie),*

$(\mathcal{D}_2)$ $\forall (x,y) \in E \times E,\ d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$ *(séparation),*

$(\mathcal{D}_3)$ $\forall (x,y,z) \in E \times E \times E,\ d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ *(inégalité triangulaire).*

Exemple 1 (Distances sur $\mathbb{R}^p$)

Définissons les applications d_1, d_2 *et* d_∞ *de* $\mathbb{R}^p$ *dans* $\mathbb{R}^+$, *en posant pour chaque couple* (x,y) *de* $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p$ *où* $x = \left(x_1, x_2, \ldots, x_p\right)$ *et* $y = \left(y_1, y_2, \ldots, y_p\right)$,

$$
\begin{aligned}
d_1(x,y) &= \sum_{k=1}^{p} |y_k - x_k|, \\
d_2(x,y) &= \left[\sum_{k=1}^{p} (y_k - x_k)^2\right]^{\frac{1}{2}}, \quad \textit{distance euclidienne,} \\
d_\infty(x,y) &= \sup_{k=1,\ldots,p} |y_k - x_k|, \quad \textit{distance sup.}
\end{aligned}
$$

Exemple (suite)

Montrons, par exemple, que d_2 *est une distance sur* $\mathbb{R}^p$.

$i)$ *Séparation :*

$$\begin{aligned} d_2(x,y) = 0 &\iff \sum_{k=1}^{p} (y_k - x_k)^2 \\ &\iff y_k - x_k = 0,\ \forall k = 1,\ldots,p, \\ &\iff x = y. \end{aligned}$$

$ii)$*Symétrie : évidente car pour tout* $k = 1, 2, \ldots, p$ *:*

$$(y_k - x_k)^2 = (x_k - y_k)^2.$$

Exemple (suite)

iii) Inégalité triangulaire.
Soient x, y et z trois éléments de $\mathbb{R}^p$. Nous avons,

$$
\begin{aligned}
[d_2(x,z)]^2 &= \sum_{k=1}^{p}(z_k - x_k)^2 = \sum_{k=1}^{p}(z_k - y_k + y_k - x_k)^2 \\
&= \sum_{k=1}^{p}(z_k - y_k)^2 + \sum_{k=1}^{p}(y_k - x_k)^2 + 2\sum_{k=1}^{p}(z_k - y_k)(y_k - x_k) \\
&= [d_2(y,z)]^2 + [d_2(x,y)]^2 + 2\sum_{k=1}^{p}(z_k - y_k)(y_k - x_k) \\
&\leq [d_2(y,z)]^2 + [d_2(x,y)]^2 + 2\left|\sum_{k=1}^{p}(z_k - y_k)(y_k - x_k)\right|.
\end{aligned}
$$

Exemple (suite)

Par application de l'inégalité de Schwarz,

$$\left[\left|\sum_{k=1}^{p} a_k b_k\right| \leq \sqrt{\left[\sum_{k=1}^{p} a_k^2\right]}\sqrt{\sum_{k=1}^{p} b_k^2}\right]$$

à $a_k = z_k - y_k$ *et* $b_k = y_k - x_k$, *on obtient*

$$\begin{aligned}
\left[d_2(x,z)\right]^2 &\leq \left[d_2(y,z)\right]^2 + \left[d_2(x,y)\right]^2 \\
&\quad + 2\sqrt{\sum_{k=1}^{p}(z_k - y_k)^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{p}(y_k - x_k)^2} \\
&= \left[d_2(y,z)\right]^2 + \left[d_2(x,y)\right]^2 + 2\left[d_2(y,z)\right]\left[d_2(x,y)\right] \\
&= \left[d_2(x,y) + d_2(y,z)\right]^2 .
\end{aligned}$$

D'où,

$$d_2(x,z) \leq d_2(x,y) + d_2(y,z) .$$

Exercice 2.1

Soit E un ensemble et d une distance sur E. Montrer que

1. $\forall (x,y,z) \in E^3$,
$$|d(x,y) - d(y,z)| \leq d(x,z).$$
2. $\forall x_1, x_2, \ldots, x_n \in E$,
$$d(x_1, x_n) \leq \sum_{k=1}^{n-1} d(x_k, x_{k+1}) \quad (\textit{inégalité polygonale}).$$

Définition 2.2

Soit E un ensemble, d_1, d_2 deux distances sur E. On dit que d_1 et d_2 sont deux **distances équivalentes** *s'ils existent deux nombres réels strictement positifs α et β tels que :*

$$\alpha d_1(x,y) \leq d_2(x,y) \leq \beta d_1(x,y) \quad \forall (x,y) \in E^2.$$

Notation : $d_1 \backsim d_2$.

La notion d'équivalence ainsi définie est une relation d'équivalence sur l'ensemble des distances définies sur E.

Exemple 2

Les trois distances d_1, d_2 et d_∞ définies sur $\mathbb{R}^p$ sont équivalentes. D'une façon précise, pour tout couple (x,y) de $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p$, on a

$$d_\infty(x,y) \leq d_1(x,y) \leq \sqrt{p} d_2(x,y) \leq p d_\infty(x,y).$$

Pour tout couple (x,y) de $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p$, nous avons

$$\sup_{k=1,\ldots,p} |y_k - x_k| \leq \sum_{k=1}^{p} |y_k - x_k|.$$

Donc,

$$d_\infty(x,y) \leq d_1(x,y). \tag{1}$$

Exemple (suite)

Par application de l'inégalité de Schwarz $(a_k = 1,\ b_k = |y_k - x_k|)$, *on déduit que*

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{p} |y_k - x_k| &\leq \sqrt{\sum_{k=1}^{p} 1^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{p} (y_k - x_k)^2} \\ &= \sqrt{p}\sqrt{\sum_{k=1}^{p} (y_k - x_k)^2}.\end{aligned}$$

Par suite,

$$d_1(x,y) \leq \sqrt{p} d_2(x,y). \tag{2}$$

Exemple (suite)

D'autre part,

$$\begin{aligned}[d_2(x,y)]^2 &= \sum_{k=1}^{p} (y_k - x_k)^2 \\ &\leq \sum_{k=1}^{p} \left[\sup_{k=1,\dots,p} |y_k - x_k| \right]^2 = p \left[\sup_{k=1,\dots,p} |y_k - x_k| \right]^2 .\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$d_2(x,y) \leq \sqrt{p} d_\infty(x,y),$$

ou encore

$$\sqrt{p} d_2(x,y) \leq p d_\infty(x,y). \qquad (3)$$

D'où le résultat à partir des inégalités (1), (2) *et* (3).

Définition 2.3

On appelle **espace métrique**, *un couple* (E, d) *constitué d'un ensemble* E *et d'une distance définie sur* E.

Exemples 3

1. $(\mathbb{R}^p, d_1)$, $(\mathbb{R}^p, d_2)$ *et* $(\mathbb{R}^p, d_\infty)$ *sont des espaces métriques.*
2. $\mathbb{C}$ *est un espace métrique. On prend pour distance de deux complexes* (z_1, z_2), $d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$.

Définition 2.4

Soit (E, d) *un espace métrique et* A *une partie de* E. *On définit sur* A *une distance* d_A *(***distance induite** *par celle de* E*) par :*

$$d_A(x, y) = d(x, y), \quad \forall (x, y) \in A \times A.$$

1.2.3 Espaces vectoriels normés (e.v.n.)

Définition 2.5

Soit E *un espace vectoriel sur* $\mathbb{K}$ *(*$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$*). On appelle* **norme** *sur* E*, une application* $\mathbf{N}$ *de* E *dans* $\mathbb{R}^+$ *vérifiant les trois conditions suivantes :*

$(\mathcal{N}_1)$ $\mathbf{N}(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0.$

$(\mathcal{N}_2)$ $\mathbf{N}(x+y) \leq \mathbf{N}(x) + \mathbf{N}(y) \quad \forall (x,y) \in E \times E$ *(inégalité triangulaire).*

$(\mathcal{N}_3)$ $\mathbf{N}(\lambda x) = |\lambda| \, \mathbf{N}(x) \quad \forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}$ *(homogénéité).*

Définition 2.6

On appelle **espace vectoriel normé (e.v.n.),** *un couple* $(E, \mathbf{N})$ *constitué d'un ensemble* E *et d'une norme* $\mathbf{N}$ *définie sur* E*.*

Remarque 2.1

$\mathbf{N}(0) = 0$ *(prendre* $\lambda = 0$ *dans* $(\mathcal{N}_3)$ *ou* $x = 0$ *dans* $(\mathcal{N}_1)$*).*

Remarque 2.2

Pour tout x de E,

$$\mathbf{N}(x) \geq 0.$$

Ceci découle de la remarque 2.1 et les conditions $(\mathcal{N}_2)$ et $(\mathcal{N}_3)$.

Exemples 4 (Normes sur $\mathbb{R}^p$.)

Les applications $\mathbf{N}_1$, $\mathbf{N}_2$ et $\mathbf{N}_\infty$ définies sur $\mathbb{R}^p$ par :

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_1(x) &= \sum_{k=1}^{p} |x_k|, \\ \mathbf{N}_2(x) &= \sqrt{\sum_{k=1}^{p} |x_k|^2} \quad \textit{(norme euclidienne)}, \\ \mathbf{N}_\infty(x) &= \sup_{k=1,\dots,p} |x_k| \quad \textit{(norme sup)}. \end{aligned}$$

sont des normes sur $\mathbb{R}^p$.

Habituellement, une norme sur un **e.v.n.** *est notée $\| \,.\, \|$ ou $\| \,.\, \|_E$.*

Définition 2.7

Deux normes $\mathbf{N}_1$ *et* $\mathbf{N}_2$ *définies sur un même* **e.v.n.** *sont dites* **équivalentes** *s'ils existent deux nombres* α *et* β *strictement positifs lels que*

$$\alpha\mathbf{N}_1(x) \leq \mathbf{N}_2(x) \leq \beta\mathbf{N}_1(x), \quad \forall x \in E.$$

Exercice 2.2

Montrer que les trois normes $\mathbf{N}_1$, $\mathbf{N}_2$ *et* $\mathbf{N}_\infty$ *définies sur* $\mathbb{R}^p$ *sont équivalentes et on a*

$$\forall x \in \mathbb{R}^p, \quad \mathbf{N}_\infty(x) \leq \mathbf{N}_1(x) \leq \sqrt{p}\mathbf{N}_2(x) \leq p\mathbf{N}_\infty(x).$$

Définition 2.8

Soit $(E, \mathbf{N})$ *un* **e.v.n.** *et* F *un sous espace-vectoriel de* E (**s.e.v.**). *On définit une norme sur* F, *notée* $\mathbf{N}_F$ (**norme induite** *par celle de* E) *par :*

$$\mathbf{N}_F(x) = \mathbf{N}(x), \quad \forall x \in F.$$

Définition 2.9

Soit $(E, \mathbf{N})$ *un* **e.v.n.** *On peut définir sur* E *une* **distance associée** *à la norme* $\mathbf{N}$. *Posons*

$$\forall x \in E,\ \forall y \in E,\quad d\left(x,y\right) = \mathbf{N}\left(x-y\right).$$

On vérifie aisement que d *est une distance sur* E *:*
$(\mathcal{N}_1) \Longrightarrow (\mathcal{D}_1)$, $(\mathcal{N}_2) \Longrightarrow (\mathcal{D}_2)$ *et* $(\mathcal{N}_3) \Longrightarrow (\mathcal{D}_3)$.

Remarque 2.3

$\forall x \in E,\ d\left(x,0\right) = \mathbf{N}\left(x\right).$

Remarque 2.4

La distance associée à une norme est invariante par translation.

$$\forall \left(x,y,z\right) \in E^3,\ d\left(x+z,y+z\right) = d\left(x,y\right).$$

En effet, $d\left(x+z, y+z\right) = \mathbf{N}\left[\left(x+z\right) - \left(y+z\right)\right] = \mathbf{N}\left(x-y\right) = d\left(x,y\right).$

Remarque 2.5

On peut trouver des distances non associées à des normes.
Par exemple, les distances

$$
\begin{aligned}
d_1\left(x,y\right) &= \left|x^3 - y^3\right|, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2, \\
d_2\left(x,y\right) &= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x = y, \\ 1 & \text{si} \quad x \neq y \end{cases} \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \quad \text{(distance discrète)},
\end{aligned}
$$

ne sont pas associées à des normes.

Théorème 2.1

Soit E un espace vectoriel de <u>dimension finie</u>. Alors, toutes les normes définies sur E sont équivalentes.
En particulier, dans $\mathbb{R}^p$, toutes les normes sont équivalentes.

Définition 3.1

Soit (E, d) *un espace métrique,* $a \in E$ *et* $r \in \mathbb{R}_+^*$.

- ✓ *On appelle* **boule ouverte** *de centre* a *et de rayon* r*, l'ensemble*

$$B(a, r) = \{x \in E / d(a, x) < r\}.$$

- ✓ *On appelle* **boule fermée** *de centre* a *et de rayon* r*, l'ensemble*

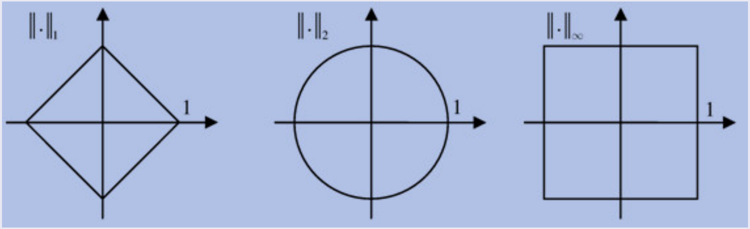
$$B'(a, r) = \{x \in E / d(a, x) \leq r\}.$$

- ✓ *On appelle* **sphère** *de centre* a *et de rayon* r*, l'ensemble*

$$S(a, r) = \{x \in E / d(a, x) = r\}.$$

Exemple 5

Boules unités fermées sur $\mathbb{R}^2$



Remarques 3.1

1. $B'(a,r) = B(a,r) \cup S(a,r)$.
2. *Dans* $\mathbb{R}$ *muni de la distance usuelle* $d(x,y) = |x-y|$,

$$\begin{aligned} B(a,r) &= \left]a-r, a+r\right[, \ B'(a,r) = [a-r, a+r], \\ S(a,r) &= \{a-r, a+r\}. \end{aligned}$$

3. *Dans l'espace métrique* $\mathbb{Z}$: $B\left(0, \frac{1}{2}\right) = B'\left(0, \frac{1}{2}\right) = \{0\}$.
4. *Si* $0 \leq r \leq r'$, *alors*

$$B(a,r) \subset B\left(a, r'\right) \quad \text{et} \quad B'(a,r) \subset B'\left(a, r'\right)$$

5. *Une boule n'a pas toujours un seul centre et un seul rayon. Nous allons justifier cette remarque à l'aide d'un exemple.*
Posons $E = [0,1]$ *et pour tout* $(x,y) \in E^2$, $d(x,y) = |x-y|$.

Remarques (suite)

Nous avons

$$\begin{aligned} B'(0,1) &= \{x \in E / d(x,0) \leq 1\} = \{x \in [0,1] \,/\, |x| \leq 1\} \\ &= \{x \in [0,1] \,/ -1 \leq x \leq 1\} = E. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B'\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) &= \left\{x \in E / d\left(x,\frac{1}{2}\right) \leq \frac{1}{2}\right\} = \left\{x \in E / \left|x - \frac{1}{2}\right| \leq \frac{1}{2}\right\} \\ &= \{x \in E / 0 \leq x \leq 1\} = E. \end{aligned}$$

Donc,

$$B'(0,1) = B'\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right).$$

Définition 3.2

Soit (E,d) un espace métrique et A une partie de E. On appelle **diamètre** *de A, le nombre*

$$\delta(A) = \sup_{x \in A, y \in A} d(x,y).$$

L'ensemble A est dit **borné** *pour la distance d si $\delta(A) < \infty$.*

Exemple 6

$\delta\left[B'(a,r)\right] \leq 2r.$

Définition 3.3

Soit (E, d) *un espace métrique.*
On dit qu'une partie O *de* E *est* **ouverte** *si elle est vide ou si pour tout* $x \in O$*, il existe une boule ouverte de centre* x *contenue dans* O*.*
Autrement dit :

$$O \;\; (\neq \varnothing) \;\; \textit{ouvert} \iff \forall x \in O,\, \exists r_x > 0 \textit{ tel que } B(x, r_x) \subset O.$$

On dit qu'une partie F *est* **fermée** *dans* E *si le complémentaire de* F *dans* E *est ouvert dans* E*.*
Autrement dit :

$$F \textit{ est fermé dans } E \iff \complement_F^E \textit{ est ouvert dans } E.$$

Exemple 7

De la définition 3.3, on déduit que les ensembles E et $\varnothing$ sont à la fois ouverts et fermés dans E.

Proposition 3.1

Dans un espace métrique (E,d), toute boule ouverte (resp. fermée) est un ensemble ouvert (resp. fermé) dans E.

Preuve. Soit $B(a,r)$ une boule ouverte de E. Montrons que c'est un ensemble ouvert dans E.
Soit $x \in B(a,r)$ et posons $r' = r - d(a,x)$.
Montrons que $B(x,r') \subset B(a,r)$.
Soit $y \in B(x,r')$. Nous avons
$d(x,y) < r' = r - d(a,x)$. D'où,
$d(a,x) + d(x,y) < r$ et en vertu de l'inégalité triangulaire, on obtient
$d(a,y) < r$. Donc, $y \in B(a,r)$ et par suite
$B(x,r') \subset B(a,r)$. Par conséquent, $B(a,r)$ est un ouvert.

Soit $B'(a,r)$ une boule fermée de E.
Montrons que c'est une partie fermée de E. Pour cela, il suffit de démontrer que $\complement^{E}_{B'(a,r)}$ est un ouvert de E. On suppose que $\complement^{E}_{B'(a,r)} \neq \varnothing$. Sinon, $B'(a,r) = E$ est fermé. Soit $x \in \complement^{E}_{B'(a,r)}$ et posons $r' = d(a,x) - r$.
Montrons que $B(x,r') \subset \complement^{E}_{B'(a,r)}$. Soit $y \in B(x,r')$. Nous avons, $d(x,y) < r' = d(a,x) - r$. D'après l'inégalité triangulaire, $r < d(a,x) - d(x,y) \leq d(a,y)$.
D'où, $y \in \complement^{E}_{B'(a,r)}$. Donc, $B(x,r') \subset \complement^{E}_{B'(a,r)}$.
Par suite, $\complement^{E}_{B'(a,r)}$ est ouvert et par conséquent $B'(a,r)$ est fermé.

Proposition 3.2

(*i*) *Toute réunion d'ensembles ouverts est un ensemble ouvert.*
(*ii*) *Toute intersection finie d'ensembles ouverts est un ensemble ouvert.*

Preuve.

(i) Soit $(O_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts (I fini ou infini). Posons

$$O = \bigcup_{i\in I} O_i.$$

Soit $x \in O$. Il existe donc $i_0 \in I$ tel que $x \in O_{i_0}$. Comme O_{i_0} est ouvert, il va exister $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset O_{i_0} \subset O$. Par suite, O est ouvert.
D'où (i).
(ii) Supposons I fini et posons$O = \bigcap_{i\in I} O_i$.
Soit $x \in O$. Donc, pour tout $i \in I$, $x \in O_i$. Comme O_i est ouvert, pour chaque $i \in I$, il existe $r_i > 0$ tel que $B(x,r_i) \subset O_i$.
Posons $r_x = \inf_{i\in I} r_i$.
Puisque I est fini, alors $r_x > 0$ et pour tout i, $B(x,r_x) \subset O_i$. Donc,

$$B(x,r_x) \subset \bigcap_{i\in I} O_i.$$

Par conséquent, $O = \bigcap_{i\in I} O_i$ est ouvert. D'où (ii).

Exemple 8

Soit la famille infinie $O_n = \left]-1, \frac{1}{n}\right[$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ *d'intervalles ouverts dans* $\mathbb{R}$ *(boules ouvertes dans* $\mathbb{R}$*).*
La réunion $O = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} O_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \left]-1, \frac{1}{n}\right[= \left]-1, 1\right[$, *est un ouvert.*
L'intersection $O = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} O_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left]-1, \frac{1}{n}\right[= \left]-1, 0\right]$, *n'est pas un ouvert.*

Par passage aux complémentaires dans la proposition 3.2, nous déduisons facilement le résultat suivant (cf : exercice 3 fiche n^{0}2).

Proposition 3.3

(i) *Toute intersection de fermés est un fermé.*
(ii) *Toute réunion* *finie* *de fermés est un fermé.*

Preuve. (cf : exercice 1 ; fiche TD n^0 2).

Définition 3.4

Soient (E,d) *un espace métrique et* $x_0 \in E$. *On dit qu'une partie* V *de* E *est un* **voisinage** *de* x_0 *si* V *contient une boule ouverte de centre* x_0.
Autrement dit :

$$V \text{ est un voisinage de } x_0 \iff \exists r > 0 \text{ tel que } B(x_0, r) \subset V.$$

L'ensemble des voisinages de x_0 *sera noté* $\mathcal{V}(x_0)$.

Exemple 9

1. *Dans* $\mathbb{R}$ *muni de la distance naturelle,* $V =]0,1[$ *est un voisinage de* $\frac{1}{2}$ *car*
$$B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right) = \left]\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right[\subset]0,1[.$$
2. $V = B(x_0,r)$, $r > 0$, *est un voisinage de* x_0 *car* $B\left(x_0,\frac{r}{2}\right) \subset B(x_0,r)$.
3. *Dans* $\mathbb{R}$ *muni de la distance naturelle,* $V = [0,1]$ *n'est pas un voisinage de* 0 *car on ne peut pas trouver* $r > 0$ *tel que* $B(0,r) =]-r,r[$ *soit incluse dans* $[0,1]$.

Proposition 3.4

Soit (E, d) *un espace métrique et* $x_0 \in E$.
(i) *Tout voisinage de* x_0 *contient* x_0.
(ii) *Toute intersection* **finie** *de voisinages de* x_0 *est un voisinage de* x_0.
(iii) *Si* $V \in \mathcal{V}(x_0)$ *et* $V \subset W$, *alors* $W \in \mathcal{V}(x_0)$.

Preuve.

(i) Soit $V \in \mathcal{V}(x_0)$. Il existe $r > 0$ tel que $B(x_0, r) \subset V$. Donc, $x_0 \in V$. D'où (i).
(ii) Soit $(V_i)_{i \in I}$ une famille <u>finie</u> de voisinages de x_0. Pour tout $i \in I$, il existe r_i tel que $B(x_0, r_i) \subset V_i$. Posons $r = \inf\limits_{i \in I} r_i$. Comme I est fini, $r > 0$ et pour tout i, $B(x_0, r) \subset B(x_0, r_i)$. Donc,

$$B(x_0, r) \subset \bigcap_{i \in I} B(x_0, r_i) \subset \bigcap_{i \in I} V_i = V.$$

Par conséquent, $V = \bigcap_{i \in I} V_i \in \mathcal{V}(x_0)$. D'où (ii).
(iii) Soit $V \in \mathcal{V}(x_0)$ et $V \subset W$. Comme $V \in \mathcal{V}(x_0)$, il existe $r > 0$ tel que $B(x_0, r) \subset V$. Donc, $B(x_0, r) \subset W$ et par suite $W \in \mathcal{V}(x_0)$.

Exercice 3.1

Montrer que si $V \in \mathcal{V}(x_0)$, il existe $W \in \mathcal{V}(x_0)$ tel que pour tout $y \in W$, $V \in \mathcal{V}(y)$ (cf : exercice 7 fiche TD n$^0 2$).

Proposition 3.5

Soient (E, d) un espace métrique, x_0 et y_0 deux éléments distincts de E. Alors, il existe $V \in \mathcal{V}(x_0)$ et $W \in \mathcal{V}(y_0)$ tel que $V \cap W = \varnothing$. On dit que E est un **espace métrique séparé**.

Preuve.

Soit r tel que $0 < r < \frac{1}{2}d(x_0, y_0)$. Posons

$$\begin{aligned} V &= B(x_0, r) = \{z \in E / d(x_0, z) < r\} \in \mathcal{V}(x_0), \\ W &= B(y_0, r) = \{z \in E / d(y_0, z) < r\} \in \mathcal{V}(y_0). \end{aligned}$$

Montrons que $V \cap W = \varnothing$. Raisonnons par l'absurde.
Supposons que
$V \cap W \neq \varnothing \Longrightarrow \exists z \in V \cap W \Longrightarrow d(x_0, z) < r$ et $d(y_0, z) < r$.
En vertu de l'inégalité triangulaire, on déduit que

$$d(x_0, y_0) \leq d(x_0, z) + d(z, y_0) < 2r < d(x_0, y_0).$$

Ce qui est absurde. D'où le résultat.

Proposition 3.6

Soient (E,d) un espace métrique et O une partie non vide de E. Alors, O est ouvert si et seulement si O est voisinage de chacun de ses points.

Preuve. Montrons que la condition est nécessaire. Supposons O ouvert et soit $x_0 \in O$. Alors, il existe $r > 0$ tel que $B(x_0, r) \subset O$. Donc, $O \in \mathcal{V}(x_0)$. Réciproquement, supposons que O est voisinage de chacun de ses points. Pour tout $x_0 \in O$, il existe $r_{x_0} > 0$ tel que $B(x_0, r_{x_0}) \subset O$. Donc, d'après la proposition 3.2,

$$O = \bigcup_{x_0 \in O} B(x_0, r_{x_0})$$

est ouvert.

Soit (E,d) un espace métrique et F une partie de E.

Définition 3.5

L'ensemble F muni de la distance induite d_F sera appelé **sous espace métrique (s.e.m.)**.
Pour tout $x_0 \in F$, la boule ouverte $B_F(x_0, r_{x_0})$ de centre x_0 et de rayon r dans F est donnée par :

$$B_F(x_0, r_{x_0}) = B(x_0, r_{x_0}) \cap F,$$

où $B(x_0, r_{x_0})$ est la boule ouverte de centre x_0 et de rayon r dans E.
En effet, nous avons,

$$\begin{aligned} B_F(x_0, r_{x_0}) &= \{z \in F / d(x_0, z) < r_{x_0}\} \\ &= \{z \in E / d(x_0, z) < r_{x_0}\} \cap F \\ &= B(x_0, r_{x_0}) \cap F. \end{aligned}$$

Nous avons la proposition suivante.

Proposition 3.7

Pour que $B \subset F$ soit ouvert (resp. fermé) dans F, il faut et il suffit , qu'il existe un ouvert (resp. fermé) A de E tel que

$$B = A \cap F.$$

Les ouverts, fermés et voisinages de F sont les traces sur F des ouverts, fermés et voisinages de E.

Proposition 3.8

Soit $x \in F$. Pour qu'une partie $V_F \subset F$ soit un voisinage de x dans F, il faut et il suffit , qu'il existe un voisinage V_E de x dans E tel que

$$V_F = V_E \cap F.$$

Remarque 3.2

Les ouverts (resp. fermés) de F *ne sont pas nécessairement des ouverts (resp. fermés) de* E.

Nous allons justifier cette remarque à l'aide d'un exemple.

Exemple 10

On prend $E = (\mathbb{R}, d_1)$ *où* $d_1(x,y) = |x-y|$, $F =]0,2]$. *L'intervalle* $]1,2]$ *est un ouvert de* F *car*

$$]1,2] =]1,3[\cap]0,2] =]1,3[\cap F.$$

Cependant, $]1,2]$ *n'est pas un ouvert de* $\mathbb{R}$. *De même l'intervalle* $]0,1]$ *est un fermé de* F *car*

$$]0,1] =]0,2] \cap [0,1],$$

mais $]0,1]$ *n'est pas un fermé de* $\mathbb{R}$.

1.3.4 Intérieur, adhérence, point d'accumulation, frontière d'un ensemble

Soit (E, d) un espace métrique et A une partie de E.

1.3.4.1 Intérieur

Définition 3.6

On dit qu'un point x_0 de E est un **point intérieur** *à A si A est un voisinage de x_0.*
En d'autres termes, un point $x_0 \in E$ est intérieur à A s'il existe $r > 0$ tel que $B(x_0, r) \subset A$.

L'ensemble des points intérieurs à A s'appelle **intérieur de** *A et se note $\overset{\circ}{A}$.*

Remarque 3.3

Nous avons $\overset{\circ}{A} \subset A$, *et* $A \subset B \Longrightarrow \overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$.
En effet, si $x_0 \in \overset{\circ}{A}$, alors $A \in \mathcal{V}(x_0)$, donc B qui contient A est aussi un voisinage de x_0 et par suite $x_0 \in \overset{\circ}{B}$.

Proposition 3.9

L'intérieur $\overset{\circ}{A}$ est un ouvert et c'est le plus grand ouvert contenu dans A.

Preuve. Soit $x_0 \in \overset{\circ}{A}$, il existe donc $r > 0$ tel que $B(x_0, r) \subset$A.

Chaque point de $B(x_0, r)$ est intérieur à A ceci entraine que $B(x_0, r) \subset \overset{\circ}{A}$.

Donc, $\overset{\circ}{A}$ est un voisinage de chacun de ses points et en vertu de la proposition 3.6, $\overset{\circ}{A}$ est ouvert.

Montrons maintenant que $\overset{\circ}{A}$ est le plus grand ouvert contenu dans A. Soit O un ouvert contenu dans A.
D'après la proposition 3.6, O est un voisinage de chacun de ses points.
Donc, chaque point de O est intérieur à A.

Par conséquent, $O \subset \overset{\circ}{A}$. D'où $\overset{\circ}{A}$ est le plus grand ouvert contenu dans A.

Exemples 11

1. *$E = \mathbb{R}$, muni de la distance naturelle et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$,*

$$\overset{0}{\overbrace{]a, b[}} = \overset{0}{\overbrace{[a, b[}} = \overset{0}{\overbrace{]a, b]}} = \overset{0}{\overbrace{[a, b]}} =]a, b[\,,$$

$$\overset{0}{\mathbb{Q}} = \varnothing; \quad \overset{0}{\complement_{\mathbb{Q}}^{\mathbb{R}}} = \varnothing.$$

2. $E = (\mathbb{R}^p, d_i)\,,\ i = 1, 2, \infty,$

$$\overset{0}{\overbrace{B'(x_0, r)}} = B(x_0, r)\,.$$

De la proposition 3.9 résulte le corollaire suivant.

Corollaire 3.1

A est ouvert si et seulement si $\overset{\circ}{A} = A$.

Preuve. (cf. exercice 5, fiche TD n^0 : 2)

1.3.4.2 Adhérence

Soit (E,d) un espace métrique, A une partie de E et $x_0 \in A$.

Définition 3.7

On dit que x_0 est **adhérent** *à A si tout voisinage de x_0 contient un point de A.*
Autrement dit :

$$\begin{aligned} x_0 \text{ est adhérent à } A \quad &\Longleftrightarrow \quad \forall V \in \mathcal{V}(x_0)\,,\ V \cap A \neq \varnothing \\ &\Longleftrightarrow \quad \forall r > 0,\ B(x_0, r) \cap A \neq \varnothing. \end{aligned}$$

L'ensemble des points **adhérents** *à A se nomme* **adhérence** *de A et on le note $\overline{A}$.*

Remarque 3.4

1. $A \subset \overline{A}$.
2. $A \subset B \Longrightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$.

Proposition 3.10

L'adhérence $\overline{A}$ d'un ensemble A est un fermé et c'est le plus petit fermé qui contient A.

Preuve. Posons $B = \complement_A^E$. On a

$$\begin{aligned} x_0 \quad \notin \quad & \overline{A} \Longleftrightarrow x_0 \in \complement_{\overline{A}} \Longleftrightarrow \exists V \in \mathcal{V}(x_0) \text{ tel que } V \cap A = \varnothing. \\ \Longleftrightarrow \quad & \exists V \in \mathcal{V}(x_0) \text{ tel que } V \subset \complement_A^E = B \Longleftrightarrow x_0 \in \overset{\circ}{B}. \end{aligned}$$

Donc, $\overline{A} = \complement_{\overset{\circ}{B}}^E$ et par conséquent, $\overline{A}$ est fermé.

Montrons que $\overline{A}$ est le plus petit fermé contenant A.

Soit F un fermé qui contient A. $\complement_F^E$ est un ouvert contenu dans $\complement_A^E = B$.

Donc, $\complement_F^E \subset \overset{\circ}{B} \subset B$. Par conséquent, $\overline{A} = \complement_{\overset{\circ}{B}}^E \subset F$. D'où le résultat.

Exemple 12

1. $E = \mathbb{R}$, *muni de la distance usuelle* $a < b$,

$$\overline{[a,b]} = \overline{]a,b[} = \overline{]a,b]} = \overline{[a,b[} = [a,b]$$

$$\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}; \quad \overline{\complement_{\mathbb{Q}}^{\mathbb{R}}} = \mathbb{R}.$$

2. $E = (\mathbb{R}^p, d_i)$, $i = 1, 2, \infty$, $p \geq 1$,

$$\overline{B(x_0, r)} = B'(x_0, r).$$

De la définition et la proposition 3.10, nous déduisons le corollaire suivant.

Corollaire 3.2

(i) $\forall x_0 \in A$, $x_0 \in \overline{A}$.
(ii) A *est fermé* $\Longleftrightarrow A = \overline{A}$.

Preuve. (cf : exercice 5, fiche n^0 : 2)

Définition 3.8

Soient A et B deux parties d'un espace métrique (E, d) telles que $A \subset B$.
On dit que A est **dense** *dans B si $B \subset \overline{A}$.*
On dit que A est **partout dense** *si $\overline{A} = E$.*

Exemple 13

Des exemples 12, nous déduisons que $\mathbb{Q}$ et $\complement_{\mathbb{Q}}^{\mathbb{R}}$ sont des parties partout denses dans $\mathbb{R}$.

Remarque 3.5

Les ensembles $\mathbb{Q}$ et $\complement_{\mathbb{Q}}^{\mathbb{R}}$ ne sont ni ouverts ni fermés dans $\mathbb{R}$.

Définition 3.9

On dit que x_0 est un point **isolé** *de A s'il existe un voisinage V de x_0 tel que $V \cap A = \{x_0\}$.*
En d'autres termes, le point $x_0 \in A$ est isolé s'il n'est pas adhérent à $A \setminus \{x_0\}$.

Exemples 14

1. *L'ensemble $\mathbb{Z}$ ne contient que des points isolés car*

$$\forall n \in \mathbb{Z}, V_n = \left]n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}\right[\in \mathcal{V}(n) \quad \text{et} \quad V_n \cap \mathbb{Z} = \{n\}.$$

2. *$\mathbb{Q}$ ne contient aucun point isolé car*

$$\forall x \in \mathbb{Q} \text{ et } \forall \varepsilon > 0,]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\cap \mathbb{Q} \setminus \{x\} \neq \varnothing.$$

Définition 3.10

On dit qu'un point $a \in E$ est un **point d'accumulation** *de A si tout voisinage de x_0 contient un point de A autre que x_0.*
En d'autres termes,

$$a \in E \text{ est un point d'accumulation de } A \Longleftrightarrow \forall V \in \mathcal{V}(a), (V \setminus \{a\}) \cap A \neq \emptyset$$

Remarques 3.6

1. *Si $a \in E$ est un point d'accumulation de A, alors a n'est pas un pont isolé.*
2. *Si $a \in E$ est un point d'accumulation de A, alors $a \in \overline{A}$.*
3. *Un point d'accumulation de A n'appartient pas nécessairement à A.*

Proposition 3.11

Soit $a \in E$. Pour que a soit un point d'accumulation de A, il faut et il suffit que tout voisinage V de a contient une infinité de points de A.

Remarque 3.7

Tout point d'accumulation est adhérent à A.
Par contre, un point adhérent à A n'est pas nécessairement un point d'accumulation.

Ainsi, par exemple, dans $\mathbb{R}$ muni de la distance naturelle posons $A = \{0\} \cup]1,2]$. On a,

$$A' = [1,2], \; \overline{A} = \{0\} \cup [1,2].$$

Donc, 0 est un point adhérent qui n'est pas un point d'accumulaltion.

1.3.4.4 Frontière

Définition 3.11

Soient (E,d) un espace métrique, A une partie de E et $x_0 \in E$.
On dit que x_0 est un **point frontière** *de A si tout voisinage de x_0 rencontre à la fois A et $\complement_A^E$.*
La frontière *de A est l'ensemble de ses points frontières et se note $\partial(A)$ ou $Fr(A)$.*

$$x_0 \in \partial(A) \Leftrightarrow \forall V \in \mathcal{V}(x_0), \;\; V \cap A \neq \varnothing \;\text{ et }\; V \cap \complement_A^E \neq \varnothing.$$

Remarque 3.8

$\partial(A) = \overline{A} \cap \overline{\complement_A^E}$.

En effet,

$$\begin{aligned} x \in \partial A &\Leftrightarrow \forall V \in \mathcal{V}(x_0),\ V \cap A \neq \varnothing \ \text{ et } \ V \cap \complement_A^E \neq \varnothing \\ &\Leftrightarrow x \in \overline{A} \text{ et } x \in \overline{\complement_A^E} \\ &\Leftrightarrow x \in \overline{A} \cap \overline{\complement_A^E}. \end{aligned}$$

Exemple 15

1. $\partial\,]a,b[= \partial\, [a,b] = \partial\, [a,b[= \partial\,]a,b] = \{a,b\}$.
2. $\partial B(a,r) = \partial B'(a,r) = S(a,r)$.

Définition 4.1

On appelle suite d'éléments de $\mathbb{R}^p$, $p \geq 1$, *une application*

$$\begin{array}{rcl} u : \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R}^p \\ n & \mapsto & u_n = \left(u_n^{(1)}, u_n^{(2)}, \ldots, u_n^{(p)}\right), \end{array}$$

où $u_n^{(i)} \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \cdots, p$. *Une telle suite sera notée* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ou simplement* (u_n). u_n *est le* $n^{ième}$ *terme de la suite ou le terme de rang* n.

Définition 4.2

On appelle sous-suite (ou suite extraite) de (u_n) *une suite de la forme* $\left(u_{\varphi(n)}\right)$ *où* $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ *est une application strictement croissante.*

Exemple 16

Les suites (u_{2n}) *et* (u_{2n+1}) *sont deux suites extraites de la suite* (u_n) *.*
Par la suite, $\mathbb{R}^p$*,* $p \geq 1$*, sera muni d'une norme notée* $\| \ \|$ *.*

Définition 4.3

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite d'éléments de* $\mathbb{R}^p$*. On dit que la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge** *(ou* **tend***) vers une limite* $l = (l_1, l_2, \cdots, l_p) \in \mathbb{R}^p$ *si*

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \, n \geq n_\varepsilon \Longrightarrow \|u_n - l\| < \varepsilon.$$

Notation : $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n = l$ *ou* $u_n \longrightarrow l$ *quand* $n \longrightarrow +\infty$.

Remarque 4.1

Si $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} u_n = l$, *alors pour tout* $r > 0$,

$$B\,(l, r) = \{x \in \mathbb{R}^p / d(x, l) < r\} = \{x \in \mathbb{R}^p / \, \|x - l\| < r\}\,,$$

contient tous les termes de la suite sauf un nombre fini.
Ceci est équivalent à dire que tout voisinage V *de* l *contient tous les termes de la suite sauf un nombre fini.*

Remarque 4.2

La convergence d'une suite dans $\mathbb{R}^p$ *ne dépend pas de la norme choisie (car dans* $\mathbb{R}^p$*, toutes les normes sont équivalentes).*

Exemple 17

Soit (u_n) *la suite de* $\mathbb{R}^2$ *définie par :*

$$u_n = \left(\frac{n}{n+1}, e^{-n}\right), n \in \mathbb{N}.$$

Montrons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* $l = (1,0)$. *Pour la norme* $\| \ \|_\infty$, *nous avons,*

$$\|u_n - l\|_\infty = \sup\left(\frac{1}{n+1}, e^{-n}\right).$$

Comme $\lim_{n\longrightarrow+\infty.} \frac{1}{n+1} = \lim_{n\longrightarrow+\infty.} e^{-n} = 0$, *alors, pour tout* $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned} \exists n_1 \quad &\in \quad \mathbb{N},\ n \geq n_1 \Longrightarrow \frac{1}{n+1} < \varepsilon, \\ \exists n_2 \quad &\in \quad \mathbb{N},\ n \geq n_2 \Longrightarrow e^{-n} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Exemple (suite)

Posons $n_\varepsilon = \sup(n_1, n_2)$. *Pour tout* $n \geq n_\varepsilon$, *on a*

$$\frac{1}{n+1} < \varepsilon \text{ et } e^{-n} < \varepsilon.$$

D'où,

$$\|u_n - l\|_\infty = \sup\left(\frac{1}{n+1}, e^{-n}\right) < \varepsilon.$$

Donc, $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} u_n = (1, 0)$.

Unicité de la limite

Proposition 4.1

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}^p$. Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors la limite est unique.

Preuve. Supposons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers deux limites distinctes l et l'. Donc,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N},\ n \geq n_\varepsilon \Longrightarrow \|u_n - l\| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ et } \|u_n - l'\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

En vertu de l'inégalité triangulaire, on obtient

$$\forall \varepsilon > 0,\ \|l - l'\| \leq \|u_n - l\| + \|u_n - l'\| < \varepsilon.$$

Ce qui est absurde.
Par conséquent, $l = l'$. D'où l'unicité.

Définition 4.4

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite d'éléments de* $\mathbb{R}^p$. *On dit qu'un élément* a *de* E *est une* **valeur d'adhérence** *de la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *si pour tout* $r > 0$,

$$\{n \in \mathbb{N} / \ \|u_n - a\| < r\} \text{ est infini.}$$

Remarque 4.3

Toute valeur d'adhérence d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de points d'un ensemble* A *appartient à* $\overline{A}$.

En effet, soit a une valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$.
Par définition d'une valeur d'adhérence,

$$\forall r > 0, \ \{n \in \mathbb{N} / \ \|u_n - a\| < r\} \text{ est infini.}$$

Donc, pour tout $r > 0$, $B(a, r) \cap A \neq \varnothing$ et par suite $a \in \overline{A}$.

Remarque 4.4

Si $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n = l$, *alors* l *est une valeur d'adhérence.*
La réciproque est, en général, fausse.

En effet,

$$\begin{aligned} \lim_{n\longrightarrow+\infty} u_n &= l \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N},\ n \geq n_\varepsilon \Longrightarrow \|u_n - l\| < \varepsilon. \\ &\Longrightarrow \forall\varepsilon>0,\ \{n\in\mathbb{N} /\ \|u_n - l\| < \varepsilon\} \text{ est infini.} \end{aligned}$$

D'où la première assertion.
Montrons à l'aide d'un contre-exemple que la réciproque est fausse.
Pour cela, considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$x_n = (-1)^n,\ \ n\in\mathbb{N}.$$

On a

$$u_{2n} = 1 \text{ et } u_{2n+1} = -1.$$

1 et -1 sont des valeurs d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Cependant, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

Proposition 4.2

Soit (u_n) *une suite d'éléments de* $\mathbb{R}^p$ *convergente vers* l*. Alors* l *est l'unique valeur d'adhérence de la suite.*

Remarque 4.5

Une suite qui admet une seule valeur d'adhérence ne converge pas nécessairement vers cette valeur.
Considérons la suite (u_n) *définie sur* $\mathbb{R}$ *par :*

$$u_{2n} = n, \quad u_n = \frac{1}{n}, \; n \in \mathbb{N}^*.$$

La suite (u_n) *n'admet pas d'autre valeur d'adhérence que l'origine.*
Cependant, la suite (u_n) *ne converge pas vers* 0*.*

La proposition suivante va nous permettre de se ramener au cas de suites d'éléments de $\mathbb{R}$.
Soit $(u_n) = \left(u_n^{(1)}, u_n^{(2)}, \ldots, u_n^{(p)}\right)$ une suite de $\mathbb{R}^p$; $u_n^{(k)}$ est la $k^{\text{ème}}$ composante de u_n, $1 \leq k \leq p$.

Proposition 4.3

Soit $(u_n) = \left(u_n^{(1)}, u_n^{(2)}, \ldots, u_n^{(p)}\right)$ *une suite de* $\mathbb{R}^p$. *Alors la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* $l = (l_1, l_2, \ldots, l_p) \in \mathbb{R}^p$ *si et seulement si pour tout* $k = 1, \ldots, p$, *la suite* $\left(u_n^{(k)}\right)$ *converge vers* $l_k \in \mathbb{R}$.

Preuve. Comme $\| \ \| \backsim \| \ \|_\infty$ (norme sup), alors il existe $\beta > 0$ tel que$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^p, \quad \|x - y\|_\infty \leq \beta \|x - y\|.$ Nous avons

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\longrightarrow+\infty} u_n = l \quad &\Leftrightarrow \quad \forall\varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, n \geq n_\varepsilon \Longrightarrow \|u_n - l\| < \tfrac{\varepsilon}{\beta} \\
&\Leftrightarrow \quad \forall\varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, n \geq n_\varepsilon \Longrightarrow \|u_n - l\|_\infty < \varepsilon \\
&\Leftrightarrow \quad \forall\varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, n \geq n_\varepsilon \Longrightarrow \sup_{k=1,\ldots,p} \left|u_n^{(k)} - l_k\right| < \varepsilon \\
&\Leftrightarrow \quad \forall\varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, n \geq n_\varepsilon \Longrightarrow \left|u_n^{(k)} - l_k\right| < \varepsilon \\
&\qquad\qquad \forall k = 1, \ldots, p \\
&\Leftrightarrow \quad \lim_{n\longrightarrow+\infty} u_n^{(k)} = l_k,\ k = 1, \ldots, p.
\end{aligned}
$$

D'où la proposition.

Exemple 18

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite de* $\mathbb{R}^3$ *définie pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$ *par* $u_n = \left(\sin\left(\frac{1}{n}\right), \frac{1}{n+1}, e^{-\frac{1}{n}}\right)$. *La suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* $l = (0,0,1)$ *car* $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right) = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ *et* $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} e^{-\frac{1}{n}} = 1$.

1.4.2 Caractérisation des points d'accumulation et des points d'adhérence

Proposition 4.4

Soit A une partie de $\mathbb{R}^p$ et $x \in \mathbb{R}^p$. Pour que $x \in \overline{A}$, il faut et il suffit qu'il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :
(i) $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in A$.
(ii) (u_n) *converge vers* x *dans* $\mathbb{R}^p$.

Proposition 4.5

Soit A une partie de $\mathbb{R}^p$ et $x \in \mathbb{R}^p$. Pour que x soit un point d'accumulation de A il faut et il suffit qu'il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que
(i) $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in A$.
(ii) (u_n) *converge vers* x.
(iii) $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$ *et* $n \neq m \Longrightarrow u_n \neq u_m$.

Définition 4.5

On dit que la suite (u_n) est de **Cauchy** *si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N},\ n \geq n_\varepsilon \text{ et } m \geq n_\varepsilon \Longrightarrow \|u_n - u_m\| < \varepsilon.$$

Remarque 4.6

1. *La définition exprime le fait qu'aussi petit que soit ε, les termes de la suite (u_n) ont à partir d'un certain rang n_ε des distances mutuelles plus petites que ε.*
2. *La notion de suite de Cauchy reste invariante si la norme est remplacée par une une autre norme (car dans $\mathbb{R}^p$, toutes les normes sont équivalentes).*

Proposition 4.6

Toute suite convergente est de Cauchy.

Preuve. Soit (u_n) une suite qui converge vers l. On a

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N},\ n \geq n_\varepsilon \Longrightarrow \|u_n - l\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

En vertu de l'inégalité triangulaire, on déduit

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N},\ n \geq n_\varepsilon \text{ et } m \geq n_\varepsilon \Longrightarrow \|u_n - u_m\| < \varepsilon.$$

Proposition 4.7

Toute suite de Cauchy est bornée. En particulier, toute suite convergente est bornée.

Proposition 4.8

Soit $(u_n) = \left(u_n^{(1)}, u_n^{(2)}, \ldots, u_n^{(p)}\right)$ *une suite de* $\mathbb{R}^p$*. Pour que* (u_n) *soit une suite de Cauchy dans* $\mathbb{R}^p$*, il faut et il suffit, que pour tout* $k = 1, 2, \ldots, p$*, la suite* $\left(u_n^{(k)}\right)$ *soit de Cauchy dans* $\mathbb{R}$*.*

Définition 5.1

Une partie A de $\mathbb{R}^p$ est dite **compacte** *si A est une partie fermée est bornée.*

Exemple 19

1. *L'intervalle* $[a,b]$ *est un ensemble compact de* $\mathbb{R}$.
2. *La boule fermée* $B'(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^p / \; \|x-a\| \leq r\}$ *est un compact de* $\mathbb{R}^p$.
3. $B(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^p / \; \|x-a\| < r\}$ *et* $B^\star(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^p / 0 < \|x-a\| < r\}$ *ne sont pas des parties compactes de* $\mathbb{R}^p$ *car elles ne sont pas fermées,* $B(a,r) \neq \overline{B(a,r)} = B'(a,r)$ *et* $B^\star(a,r) \neq \overline{B^\star(a,r)} = B'(a,r)$.
4. $$D(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^p / \; \|x-a\| \geq r\} \quad \text{et}$$
$$E(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^p / \; \|x-a\| > r\}$$
ne sont pas des ensembles compacts de $\mathbb{R}^p$ *car ils ne sont pas bornés.*

Définition 5.2

Soit A une partie de $\mathbb{R}^p$ et $\mathcal{R} = (R_i)_{i\in I}$ une famille de parties de $\mathbb{R}^p$. On dit que la famille $\mathcal{R}$ **recouvre** *A (ou constitue* **un recouvrement** *de A) si*

$$A \subset \bigcup_{i\in I} R_i.$$

- *Le recouvrement est dit <u>fini</u> si I est un ensemble fini.*
- *Le recouvrement est dit <u>ouvert</u> si les $R_i, i \in I$, sont des parties ouvertes de $\mathbb{R}^p$.*

Exemple 20

1. *La famille* $\mathcal{R} = (]-n,n[)_{n\in\mathbb{N}}$ *est un recouvrement ouvert de* $\mathbb{R}$ *car*

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}]-n,n[\,.$$

2. *La famille* $\mathcal{R} = \left(\left[0,\frac{1}{n}\right]\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est un recouvrement de* $[0,1]$ *car*

$$[0,1] \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \left[0,\frac{1}{n}\right].$$

Proposition 5.1

Soit A une partie de $\mathbb{R}^p$. Les propositions suivantes sont équivalentes.
(i) *A est compacte.*
(ii) *A possède la propriété de* **Bolzano-Weierstrass :** *Toute suite d'éléments de A admet une sous-suite qui converge vers un élément appartenant à A.*
(iii) *Tout sous-ensemble infini d'éléments de A possède un point d'accumulation appartenant à A.*
(iv) *A possède la propriété de* **Borel-Lebesgue :** *de tout recouvrement ouvert de A, on peut extraire un recouvrement fini.*

Exemples 21

1. *$\varnothing$ est compact.*
2. *$\forall a \in \mathbb{R}^p$, $\{a\}$ est compact, et tout ensemble fini $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ est compact.*
3. *$\mathbb{R}$ n'est pas compact.*
4. *Le sous-ensemble de $\mathbb{R}$*

$$A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\},$$

n'est pas compact car 0 est un point d'accumulation de A et $0 \notin A$.

Remarques 5.1

1. *Si* A *est un compact de* $\mathbb{R}^p$ *et* B *un compact de* $\mathbb{R}^q$, *alors*

$$A \times B = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^{p+q} / x \in A \text{ et } y \in B \right\},$$

est un compact de $\mathbb{R}^{p+q}$.

2. *Si* A *est un ensemble borné de* $\mathbb{R}$, *alors* $\overline{A}$ *est compact.*

Exercice 7 :

Soient A et B deux parties non vides de E.

1) $\overset{0}{\overline{A \cap B}} = \overset{0}{A} \cap \overset{0}{B}$.

$$\begin{cases} A \cap B \subset A \\ \\ A \cap B \subset B \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \overset{0}{\overline{A \cap B}} \subset \overset{0}{A} \\ \overset{0}{\overline{A \cap B}} \subset \overset{0}{B} \end{cases} \Longrightarrow \overset{0}{\overline{A \cap B}} \subset \overset{0}{A} \cap \overset{0}{B} \quad (1)$$

d'autre part

$$\begin{cases} \overset{0}{A} \subset A \\ \overset{0}{B} \subset B \end{cases} \Longrightarrow \overset{0}{A} \cap \overset{0}{B} \subset A \cap B \Longrightarrow \overset{0}{A} \cap \overset{0}{B} \subset \overset{0}{\overline{A \cap B}} \quad (2)$$

(L'intéerieur de A est le plus grand ouvert contenu dans A.)

Donc d'après (1) et (2) on a :

$$\overset{0}{\overline{A \cap B}} = \overset{0}{A} \cap \overset{0}{B}.$$

Exercice 7 :

Soient A et B deux parties non vides de E.

1) $\overset{0}{\widehat{A\cap B}} = \overset{0}{A} \cap \overset{0}{B}$.

$$\left\{\begin{array}{l} A\cap B \subset A \\ \\ A\cap B \subset B \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \overset{0}{\widehat{A\cap B}} \subset \overset{0}{A} \\ \overset{0}{\widehat{A\cap B}} \subset \overset{0}{B} \end{array}\right. \Longrightarrow \overset{0}{\widehat{A\cap B}} \subset \overset{0}{A} \cap \overset{0}{B} \quad (1)$$

d'autre part

$$\left\{\begin{array}{l} \overset{0}{A} \subset A \\ \overset{0}{B} \subset B \end{array}\right. \Longrightarrow \overset{0}{A} \cap \overset{0}{B} \subset A\cap B \Longrightarrow \overset{0}{A} \cap \overset{0}{B} \subset \overset{0}{\widehat{A\cap B}} \quad (2)$$

(L'intéerieur de A est le plus grand ouvert contenu dans A.)

Donc d'après (1) et (2) on a :

$$\overset{0}{\widehat{A\cap B}} = \overset{0}{A} \cap \overset{0}{B}.$$

Exercice 7 :

Soient A et B deux parties non vides de E.

1) $\overset{0}{\widehat{A \cap B}} = \overset{0}{A} \cap \overset{0}{B}$.

$$\left\{\begin{array}{l} A \cap B \subset A \\ \\ A \cap B \subset B \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \overset{0}{\widehat{A \cap B}} \subset \overset{0}{A} \\ \overset{0}{\widehat{A \cap B}} \subset \overset{0}{B} \end{array}\right. \Longrightarrow \overset{0}{\widehat{A \cap B}} \subset \overset{0}{A} \cap \overset{0}{B} \quad (1)$$

d'autre part

$$\left\{\begin{array}{l} \overset{0}{A} \subset A \\ \overset{0}{B} \subset B \end{array}\right. \Longrightarrow \overset{0}{A} \cap \overset{0}{B} \subset A \cap B \Longrightarrow \overset{0}{A} \cap \overset{0}{B} \subset \overset{0}{\widehat{A \cap B}} \quad (2)$$

(L'intéerieur de A est le plus grand ouvert contenu dans A.)

Donc d'après (1) et (2) on a :

$$\overset{0}{\widehat{A \cap B}} = \overset{0}{A} \cap \overset{0}{B}.$$

Exercice 7 :

Soient A et B deux parties non vides de E.

1) $\overset{0}{\widehat{A \cap B}} = \overset{0}{A} \cap \overset{0}{B}$.

$$\begin{cases} A \cap B \subset A \\ \\ A \cap B \subset B \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \overset{0}{\widehat{A \cap B}} \subset \overset{0}{A} \\ \overset{0}{\widehat{A \cap B}} \subset \overset{0}{B} \end{cases} \Longrightarrow \overset{0}{\widehat{A \cap B}} \subset \overset{0}{A} \cap \overset{0}{B} \quad (1)$$

d'autre part

$$\begin{cases} \overset{0}{A} \subset A \\ \overset{0}{B} \subset B \end{cases} \Longrightarrow \overset{0}{A} \cap \overset{0}{B} \subset A \cap B \Longrightarrow \overset{0}{A} \cap \overset{0}{B} \subset \overset{0}{\widehat{A \cap B}} \quad (2)$$

(L'intéerieur de A est le plus grand ouvert contenu dans A.)

Donc d'après (1) et (2) on a :

$$\overset{0}{\widehat{A \cap B}} = \overset{0}{A} \cap \overset{0}{B}.$$

Exercice 7 :

Soient A et B deux parties non vides de E.

1) $\overset{0}{\overbrace{A \cap B}} = \overset{0}{A} \cap \overset{0}{B}$.

$$\begin{cases} A \cap B \subset A \\ \\ A \cap B \subset B \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \overset{0}{\overbrace{A \cap B}} \subset \overset{0}{A} \\ \overset{0}{\overbrace{A \cap B}} \subset \overset{0}{B} \end{cases} \Longrightarrow \overset{0}{\overbrace{A \cap B}} \subset \overset{0}{A} \cap \overset{0}{B} \quad (1)$$

d'autre part

$$\begin{cases} \overset{0}{A} \subset A \\ \overset{0}{B} \subset B \end{cases} \Longrightarrow \overset{0}{A} \cap \overset{0}{B} \subset A \cap B \Longrightarrow \overset{0}{A} \cap \overset{0}{B} \subset \overset{0}{\overbrace{A \cap B}} \quad (2)$$

(L'intéerieur de A est le plus grand ouvert contenu dans A.)

Donc d'après (1) et (2) on a :

$$\overset{0}{\overbrace{A \cap B}} = \overset{0}{A} \cap \overset{0}{B}.$$

Exercice 7 :

Soient A et B deux parties non vides de E.

1) $\overset{0}{\widehat{A\cap B}} = \overset{0}{A} \cap \overset{0}{B}$.

$$\left\{\begin{array}{l} A\cap B \subset A \\ \\ A\cap B \subset B \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \overset{0}{\widehat{A\cap B}} \subset \overset{0}{A} \\ \overset{0}{\widehat{A\cap B}} \subset \overset{0}{B} \end{array}\right. \Longrightarrow \overset{0}{\widehat{A\cap B}} \subset \overset{0}{A} \cap \overset{0}{B} \quad (1)$$

d'autre part

$$\left\{\begin{array}{l} \overset{0}{A} \subset A \\ \overset{0}{B} \subset B \end{array}\right. \Longrightarrow \overset{0}{A} \cap \overset{0}{B} \subset A\cap B \Longrightarrow \overset{0}{A} \cap \overset{0}{B} \subset \overset{0}{\widehat{A\cap B}} \quad (2)$$

(L'intéerieur de A est le plus grand ouvert contenu dans A.)

Donc d'après (1) et (2) on a :

$$\overset{0}{\widehat{A\cap B}} = \overset{0}{A} \cap \overset{0}{B}.$$

Exercice 7 :

Soient A et B deux parties non vides de E.

1) $\overset{0}{\widehat{A \cap B}} = \overset{0}{A} \cap \overset{0}{B}$.

$$\begin{cases} A \cap B \subset A \\ \\ A \cap B \subset B \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \overset{0}{\widehat{A \cap B}} \subset \overset{0}{A} \\ \overset{0}{\widehat{A \cap B}} \subset \overset{0}{B} \end{cases} \Longrightarrow \overset{0}{\widehat{A \cap B}} \subset \overset{0}{A} \cap \overset{0}{B} \quad (1)$$

d'autre part

$$\begin{cases} \overset{0}{A} \subset A \\ \overset{0}{B} \subset B \end{cases} \Longrightarrow \overset{0}{A} \cap \overset{0}{B} \subset A \cap B \Longrightarrow \overset{0}{A} \cap \overset{0}{B} \subset \overset{0}{\widehat{A \cap B}} \quad (2)$$

(L'intéerieur de A est le plus grand ouvert contenu dans A.)

Donc d'après (1) et (2) on a :

$$\overset{0}{\widehat{A \cap B}} = \overset{0}{A} \cap \overset{0}{B}.$$

Exercice 7 : (suite)

2) $\overset{0}{A} \cup \overset{0}{B} \subset \overset{0}{\widehat{A \cup B}}$.

$$\begin{cases} \overset{0}{A} \subset A \\ \overset{0}{B} \subset B \end{cases} \Longrightarrow \overset{0}{A} \cup \overset{0}{B} \subset A \cup B \Longrightarrow \overset{0}{A} \cup \overset{0}{B} \subset \overset{0}{\widehat{A \cup B}}$$

(L'intéerieur de A est le plus grand ouvert contenu dans A.)

3) $\overset{0}{\complement_A} = \complement_{\overline{A}}$.

$$\begin{aligned} x \in \overset{0}{\complement_A} &\iff \exists r > 0 \ \text{ tq } \ B(x,r) \subset \complement_A \\ &\iff \exists r > 0 \ \text{ tq } \ B(x,r) \cap \complement_A = \phi \\ &\iff x \notin \overline{A} \\ &\iff x \in \complement_{\overline{A}} \end{aligned}$$

Exercice 7 : (suite)

2) $\overset{0}{A} \cup \overset{0}{B} \subset \overset{0}{\widehat{A \cup B}}$.

$$\begin{cases} \overset{0}{A} \subset A \\ \overset{0}{B} \subset B \end{cases} \Longrightarrow \overset{0}{A} \cup \overset{0}{B} \subset A \cup B \Longrightarrow \overset{0}{A} \cup \overset{0}{B} \subset \overset{0}{\widehat{A \cup B}}$$

(L'intéerieur de A est le plus grand ouvert contenu dans A.)

3) $\overset{0}{\complement_A} = \complement_{\overline{A}}$.

$$\begin{aligned} x \in \overset{0}{\complement_A} &\iff \exists r > 0 \ \text{ tq } \ B(x,r) \subset \complement_A \\ &\iff \exists r > 0 \ \text{ tq } \ B(x,r) \cap \complement_A = \phi \\ &\iff x \notin \overline{A} \\ &\iff x \in \complement_{\overline{A}} \end{aligned}$$

2) $\overset{0}{A} \cup \overset{0}{B} \subset \overset{0}{\widehat{A \cup B}}$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \overset{0}{A} \subset A \\ \overset{0}{B} \subset B \end{array} \right. \Longrightarrow \overset{0}{A} \cup \overset{0}{B} \subset A \cup B \Longrightarrow \overset{0}{A} \cup \overset{0}{B} \subset \overset{0}{\widehat{A \cup B}}$$

(L'intéerieur de A est le plus grand ouvert contenu dans A.)

3) $\overset{0}{\complement_A} = \complement_{\overline{A}}$.

$$\begin{aligned} x \in \overset{0}{\complement_A} &\iff \exists r > 0 \;\text{ tq }\; B(x,r) \subset \complement_A \\ &\iff \exists r > 0 \;\text{ tq }\; B(x,r) \cap \complement_A = \phi \\ &\iff x \notin \overline{A} \\ &\iff x \in \complement_{\overline{A}} \end{aligned}$$

Exercice 7 : (suite)

2) $\overset{0}{A} \cup \overset{0}{B} \subset \overset{0}{\widehat{A \cup B}}$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \overset{0}{A} \subset A \\ \overset{0}{B} \subset B \end{array} \right. \Longrightarrow \overset{0}{A} \cup \overset{0}{B} \subset A \cup B \Longrightarrow \overset{0}{A} \cup \overset{0}{B} \subset \overset{0}{\widehat{A \cup B}}$$

(L'intéerieur de A est le plus grand ouvert contenu dans A.)

3) $\overset{0}{\complement_A} = \complement_{\overline{A}}$.

$$\begin{array}{rcl} x \in \overset{0}{\complement_A} & \Longleftrightarrow & \exists r > 0 \ \text{ tq } \ B(x,r) \subset \complement_A \\ & \Longleftrightarrow & \exists r > 0 \ \text{ tq } \ B(x,r) \cap \complement_A = \phi \\ & \Longleftrightarrow & x \notin \overline{A} \\ & \Longleftrightarrow & x \in \complement_{\overline{A}} \end{array}$$

Exercice 7 : (suite)

2) $\overset{0}{A} \cup \overset{0}{B} \subset \overset{0}{\overbrace{A \cup B}}$.

$$\begin{cases} \overset{0}{A} \subset A \\ \overset{0}{B} \subset B \end{cases} \Longrightarrow \overset{0}{A} \cup \overset{0}{B} \subset A \cup B \Longrightarrow \overset{0}{A} \cup \overset{0}{B} \subset \overset{0}{\overbrace{A \cup B}}$$

(L'intéerieur de A est le plus grand ouvert contenu dans A.)

3) $\overset{0}{\complement_A} = \complement_{\overline{A}}$.

$$\begin{aligned} x \in \overset{0}{\complement_A} &\iff \exists r > 0 \ \text{ tq } \ B(x,r) \subset \complement_A \\ &\iff \exists r > 0 \ \text{ tq } \ B(x,r) \cap \complement_A = \phi \\ &\iff x \notin \overline{A} \\ &\iff x \in \complement_{\overline{A}} \end{aligned}$$

Exercice 7 : (suite)

2) $\overset{0}{A} \cup \overset{0}{B} \subset \overset{0}{\overbrace{A \cup B}}$.

$$\begin{cases} \overset{0}{A} \subset A \\ \overset{0}{B} \subset B \end{cases} \Longrightarrow \overset{0}{A} \cup \overset{0}{B} \subset A \cup B \Longrightarrow \overset{0}{A} \cup \overset{0}{B} \subset \overset{0}{\overbrace{A \cup B}}$$

(L'intéerieur de A est le plus grand ouvert contenu dans A.)

3) $\overset{0}{\complement_A} = \complement_{\overline{A}}$.

$$\begin{aligned} x \in \overset{0}{\complement_A} &\iff \exists r > 0 \ \text{ tq } \ B(x,r) \subset \complement_A \\ &\iff \exists r > 0 \ \text{ tq } \ B(x,r) \cap \complement_A = \phi \\ &\iff x \notin \overline{A} \\ &\iff x \in \complement_{\overline{A}} \end{aligned}$$

Exercice 7 : (suite)

2) $\overset{0}{A} \cup \overset{0}{B} \subset \overset{0}{\overbrace{A \cup B}}$.

$$\left\{\begin{array}{l} \overset{0}{A} \subset A \\ \overset{0}{B} \subset B \end{array}\right. \Longrightarrow \overset{0}{A} \cup \overset{0}{B} \subset A \cup B \Longrightarrow \overset{0}{A} \cup \overset{0}{B} \subset \overset{0}{\overbrace{A \cup B}}$$

(L'intéerieur de A est le plus grand ouvert contenu dans A.)

3) $\overset{0}{\complement_A} = \complement_{\overline{A}}$.

$$\begin{array}{rcl} x \in \overset{0}{\complement_A} & \Longleftrightarrow & \exists r > 0 \ \text{ tq } \ B(x,r) \subset \complement_A \\ & \Longleftrightarrow & \exists r > 0 \ \text{ tq } \ B(x,r) \cap \complement_A = \phi \\ & \Longleftrightarrow & x \notin \overline{A} \\ & \Longleftrightarrow & x \in \complement_{\overline{A}} \end{array}$$

Exercice 7 : (suite)

2) $\overset{0}{A} \cup \overset{0}{B} \subset \overset{0}{\widehat{A \cup B}}$.

$$\begin{cases} \overset{0}{A} \subset A \\ \overset{0}{B} \subset B \end{cases} \Longrightarrow \overset{0}{A} \cup \overset{0}{B} \subset A \cup B \Longrightarrow \overset{0}{A} \cup \overset{0}{B} \subset \overset{0}{\widehat{A \cup B}}$$

(L'intéerieur de A est le plus grand ouvert contenu dans A.)

3) $\overset{0}{\complement_A} = \complement_{\overline{A}}$.

$$\begin{aligned} x \in \overset{0}{\complement_A} &\iff \exists r > 0 \ \text{ tq } \ B(x,r) \subset \complement_A \\ &\iff \exists r > 0 \ \text{ tq } \ B(x,r) \cap \complement_A = \phi \\ &\iff x \notin \overline{A} \\ &\iff x \in \complement_{\overline{A}} \end{aligned}$$

Exercice 7 : (suite)

4) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

$$\begin{cases} A \subset A \cup B \\ \\ B \subset A \cup B \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \overline{A} \subset \overline{A \cup B} \\ \\ \overline{B} \subset \overline{A \cup B} \end{cases} \Longrightarrow \overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B} \quad (1)$$

d'autre part

$$\begin{cases} A \subset \overline{A} \\ B \subset \overline{B} \end{cases} \Longrightarrow A \cup B \subset \overline{A} \cup \overline{B} \Longrightarrow \overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B} \quad (2)$$

(L'adhéerence A est le plus petit fermée qui contient A.)
Donc d'après (1) et (2) on a :

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

Exercice 7 : (suite)

4) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

$$\begin{cases} A \subset A \cup B \\ \\ B \subset A \cup B \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \overline{A} \subset \overline{A \cup B} \\ \\ \overline{B} \subset \overline{A \cup B} \end{cases} \Longrightarrow \overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B} \quad (1)$$

d'autre part

$$\begin{cases} A \subset \overline{A} \\ B \subset \overline{B} \end{cases} \Longrightarrow A \cup B \subset \overline{A} \cup \overline{B} \Longrightarrow \overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B} \quad (2)$$

(L'adhéerence A est le plus petit fermée qui contient A.)

Donc d'après (1) et (2) on a :

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

Exercice 7 : (suite)

4) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

$$\left\{\begin{array}{l} A \subset A \cup B \\ \\ B \subset A \cup B \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \overline{A} \subset \overline{A \cup B} \\ \\ \overline{B} \subset \overline{A \cup B} \end{array}\right. \Longrightarrow \overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B} \quad (1)$$

d'autre part

$$\left\{\begin{array}{l} A \subset \overline{A} \\ B \subset \overline{B} \end{array}\right. \Longrightarrow A \cup B \subset \overline{A} \cup \overline{B} \Longrightarrow \overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B} \quad (2)$$

(L'adhéerence A est le plus petit fermée qui contient A.)
Donc d'après (1) et (2) on a :

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

Exercice 7 : (suite)

4) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

$$\left\{\begin{array}{l} A \subset A \cup B \\ \\ B \subset A \cup B \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \overline{A} \subset \overline{A \cup B} \\ \\ \overline{B} \subset \overline{A \cup B} \end{array}\right. \Longrightarrow \overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B} \quad (1)$$

d'autre part

$$\left\{\begin{array}{l} A \subset \overline{A} \\ B \subset \overline{B} \end{array}\right. \Longrightarrow A \cup B \subset \overline{A} \cup \overline{B} \Longrightarrow \overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B} \quad (2)$$

(L'adhéerence $\overline{A}$ est le plus petit fermée qui contient A.)
Donc d'après (1) et (2) on a :

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

Exercice 7 : (suite)

4) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

$$\begin{cases} A \subset A \cup B \\ \\ B \subset A \cup B \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \overline{A} \subset \overline{A \cup B} \\ \\ \overline{B} \subset \overline{A \cup B} \end{cases} \Longrightarrow \overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B} \quad (1)$$

d'autre part

$$\begin{cases} A \subset \overline{A} \\ B \subset \overline{B} \end{cases} \Longrightarrow A \cup B \subset \overline{A} \cup \overline{B} \Longrightarrow \overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B} \quad (2)$$

(L'adhéerence $\overline{A}$ est le plus petit fermée qui contient A.)
Donc d'après (1) et (2) on a :

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

4) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

$$\begin{cases} A \subset A \cup B \\ \\ B \subset A \cup B \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \overline{A} \subset \overline{A \cup B} \\ \\ \overline{B} \subset \overline{A \cup B} \end{cases} \Longrightarrow \overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B} \quad (1)$$

d'autre part

$$\begin{cases} A \subset \overline{A} \\ B \subset \overline{B} \end{cases} \Longrightarrow A \cup B \subset \overline{A} \cup \overline{B} \Longrightarrow \overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B} \quad (2)$$

(L'adhéerence A est le plus petit fermée qui contient A.)

Donc d'après (1) et (2) on a :

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

Exercice 7 : (suite)

4) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

$$\begin{cases} A \subset A \cup B \\ \\ B \subset A \cup B \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \overline{A} \subset \overline{A \cup B} \\ \\ \overline{B} \subset \overline{A \cup B} \end{cases} \Longrightarrow \overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B} \quad (1)$$

d'autre part

$$\begin{cases} A \subset \overline{A} \\ B \subset \overline{B} \end{cases} \Longrightarrow A \cup B \subset \overline{A} \cup \overline{B} \Longrightarrow \overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B} \quad (2)$$

(L'adhéerence A est le plus petit fermée qui contient A.)
Donc d'après (1) et (2) on a :

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

Exercice 7 : (suite)

5) $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.

$$\begin{cases} A \cap B \subset A \\ \\ A \cap B \subset B \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \overline{A \cap B} \subset \overline{A} \\ \\ \overline{A \cap B} \subset \overline{B} \end{cases} \Longrightarrow \overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}.$$

Exercice 7 : (suite)

5) $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.

$$\left\{ \begin{array}{l} A \cap B \subset A \\ \\ A \cap B \subset B \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \overline{A \cap B} \subset \overline{A} \\ \\ \overline{A \cap B} \subset \overline{B} \end{array} \right. \Longrightarrow \overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}.$$

Exercice 7 : (suite)

5) $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.

$$\left\{\begin{array}{l} A \cap B \subset A \\ \\ A \cap B \subset B \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \overline{A \cap B} \subset \overline{A} \\ \\ \overline{A \cap B} \subset \overline{B} \end{array}\right. \Longrightarrow \overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}.$$

Exercice 7 : (suite)

6) Montrer par des exemples simples qu'en général, on a pas

$$\overset{0}{\widehat{A \cup B}} = \overset{0}{A} \cup \overset{0}{B}; \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

a) $\overset{0}{\widehat{A \cup B}} = \overset{0}{A} \cup \overset{0}{B}$

Pour $A = [0, 1]$ et $B =]1, 2]$

On a $A \cup B = [0, 2]$, $\overset{0}{A} =]0, 1[$ et $\overset{0}{B} =]1, 2[$.

Donc $\overset{0}{\widehat{A \cup B}} =]0, 2[$ et $\overset{0}{A} \cup \overset{0}{B} =]0, 1[\cup]1, 2[$

$\Longrightarrow \overset{0}{\widehat{A \cup B}} \neq \overset{0}{A} \cup \overset{0}{B}$

Exercice 7 : (suite)

6) Montrer par des exemples simples qu'en général, on a pas

$$\overset{0}{\widehat{A \cup B}} = \overset{0}{A} \cup \overset{0}{B}; \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

a) $\overset{0}{\widehat{A \cup B}} = \overset{0}{A} \cup \overset{0}{B}$

Pour $A = [0,1]$ et $B =]1,2]$

On a $A \cup B = [0,2]$, $\overset{0}{A} =]0,1[$ et $\overset{0}{B} =]1,2[$.

Donc $\overset{0}{\widehat{A \cup B}} =]0,2[$ et $\overset{0}{A} \cup \overset{0}{B} =]0,1[\cup]1,2[$

$\Longrightarrow \overset{0}{\widehat{A \cup B}} \neq \overset{0}{A} \cup \overset{0}{B}$

Exercice 7 : (suite)

6) Montrer par des exemples simples qu'en général, on a pas

$$\overset{0}{\widehat{A\cup B}} = \overset{0}{A} \cup \overset{0}{B}; \quad \overline{A\cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

a) $\overset{0}{\widehat{A\cup B}} = \overset{0}{A} \cup \overset{0}{B}$

Pour $A = [0,1]$ et $B =]1,2]$

On a $A\cup B = [0,2]$, $\overset{0}{A} =]0,1[$ et $\overset{0}{B} =]1,2[$.

Donc $\overset{0}{\widehat{A\cup B}} =]0,2[$ et $\overset{0}{A} \cup \overset{0}{B} =]0,1[\cup]1,2[$

$\Longrightarrow \overset{0}{\widehat{A\cup B}} \neq \overset{0}{A} \cup \overset{0}{B}$

Exercice 7 : (suite)

b) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

Pour $A =]0,1[$ et $B =]1,2[$
On a $A \cap B = \phi$, $\overline{A} = [0,1]$ et $\overline{B} = [1,2]$.
Donc $\overline{A \cap B} = \phi$ et $\overline{A} \cap \overline{B} = [0,1] \cap [1,2] = \{1\}$
$\Longrightarrow \overline{A \cap B} \neq \overline{A} \cap \overline{B}$

b) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

Pour $A =]0,1[$ et $B =]1,2[$
On a $A \cap B = \phi$, $\overline{A} = [0,1]$ et $\overline{B} = [1,2]$.
Donc $\overline{A \cap B} = \phi$ et $\overline{A} \cap \overline{B} = [0,1] \cap [1,2] = \{1\}$
$\Longrightarrow \overline{A \cap B} \neq \overline{A} \cap \overline{B}$

Exercice 7 : (suite)

b) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

Pour $A =]0,1[$ et $B =]1,2[$
On a $A \cap B = \phi$, $\overline{A} = [0,1]$ et $\overline{B} = [1,2]$.
Donc $\overline{A \cap B} = \phi$ et $\overline{A} \cap \overline{B} = [0,1] \cap [1,2] = \{1\}$
$\Longrightarrow \overline{A \cap B} \neq \overline{A} \cap \overline{B}$