UNIVERSITE MOHAMMED PREMIER
ECOLE NATIONALE DES SCIENCES APPLIQUEES
OUJDA-MAROC

Filière : STPI-CP2 — Année universitaire : 2014 - 2015

Module : Analyse 3 — Enseignant : M. Derouich

---

Fiche TD $N°$ : 2

**Exercice 1.** : Montrer que

1) Toute intersection d'ensembles fermés de $E$ est fermée dans $E$.

2) Toute réunion finie d'ensembles fermés de $E$ est fermée dans $E$.

**Exercice 2.** : Soit $a \in E$.

Montrer que la sphère $S(a, r)$, de centre $a$ et de rayon $r$, de $E$ est un ensemble fermé dans $E$.

**Exercice 3.** : Montrer que tout sous-ensemble fini de $E$ est fermé dans $E$.

**Exercice 4.** : Soit $A$ une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$. Montrer que $\sup A$ et $\inf A$ sont des éléments de $\overline{A}$.

**Exercice 5.** : Soit $A$ une partie de $E$. Montrer que

1) $A$ est fermée $\Longleftrightarrow A = \overline{A}$.

2) $A$ est ouverte $\Longleftrightarrow A = \overset{0}{A}$.

3) Soit $\mathbb{R}$ muni de la métrique habituelle. On pose

$$A = (\mathbb{Q} \cap ]-1, 0[) \cup ]0, 1[ \cup ]1, 2[ \cup \{3\}.$$

Déterminer $\overset{0}{A}$, $\overline{A}$, $\overset{0}{\overline{A}}$, $\overline{\overset{0}{A}}$ et vérifier qu'ils sont tous distincts.

**Exercice 6.** : Soit $A$ une partie non vide de $E$. Pour $x \in E$, on pose

$$d(x, A) = \inf_{y \in A} [d(x, y)], \text{ (distance du point } x \text{ à } A).$$

Prouver que

1) $d(x, A) = 0 \Leftrightarrow x \in \overline{A}$.

2) $\forall (x, y) \in E^2$, $|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$.

**Exercice 7.** : Soient $A$ et $B$ deux parties non vides de $E$. Montrer que

1) $\overset{0}{\widehat{A \cap B}} = \overset{0}{A} \cap \overset{0}{B}$.

2) $\overset{0}{A} \cup \overset{0}{B} \subset \overset{0}{\widehat{A \cup B}}$.

3) $\overset{0}{\complement_A} = \complement_{\overline{A}}$.

4) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

5) $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.

6) Montrer par des exemples simples qu'en général, on a pas

$$\overset{0}{\widehat{A \cup B}} = \overset{0}{A} \cup \overset{0}{B}; \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

**Exercice 8.** : Les ensembles suivants sont-ils compacts ? Justifier votre réponse.

a) $\mathbb{Z}$ ; b) $[0,1] \cap \mathbb{Q}$ ; c) $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \ldots \times [a_p, b_p]$.

d) Une union finie de réels.

e) Une union infinie de réels distincts.

f) La boule fermée de centre $a$ et de rayon $r > 0$ dans $\mathbb{R}^p$.

**Exercice 9.** : Soit $(a_n)$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}^p$ de limite $a \in \mathbb{R}^p$. Le sous-ensemble $A = \{a_n; n \in \mathbb{N}\} \cup \{a\}$ est-il compact dans $\mathbb{R}^p$?