UNIVERSITE MOHAMMED PREMIER
ECOLE NATIONALE DES SCIENCES APPLIQUEES
OUJDA-MAROC

Filière : STPI-CP2 — Année universitaire : 2014 - 2015
Module : Analyse 3 — Enseignant : M. Derouich

Fiche TD $N°$: 4

Exercice 1. : Etudier la différentiabilité à l'origine de l'application $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ qui est définie par $f(0;0) = 0$ et par $f(x;y) = \dfrac{|xy|}{\sqrt{x^2+3y^2}}$ si $(x;y) \neq (0;0)$.

Exercice 2. : Etudier la différentiablilité des fonctions suivantes :
1) $f(x,y) = x^2 + y^2$; 2) $g(x,y,z) = \sin(x^2+y) + \cos yz$; 3) $h(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$;
4) $t(x;y) = y^2 \sin \dfrac{x}{y}$ si $y \neq 0$ et $t(x;0) = 0$ si $y = 0$.

Exercice 3. : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x;y) = \frac{x^3 - y^3}{x^2+y^2} \text{ si } (x;y) \neq (0;0) \text{ et } f(0;0) = 0.$$

1. Montrer que f admet des dérivées partielles en tout point (x,y) de $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que f est différentiable sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ mais ne l'est pas en $(0,0)$.

Exercice 4. : Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $f(x,y) = xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ si $(x;y) \neq (0;0)$ et $f(0;0) = 0$ admet des dérivées partielles d'ordre 2 en tout point mais que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.

Exercice 5. : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x;y) = (x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \text{ si } (x;y) \neq (0;0) \text{ et } f(0;0) = 0.$$

1. Déterminer les fonctions $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.
2. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et calculer la différentielle de f au point $(x,y) \neq (0,0)$.
3. Montrer que les fonctions $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ ne sont pas continues en $(0,0)$ mais f est différentiable en $(0;0)$.

Exercice 6. : Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$f(x;y) = (\cos x + \sin y, -\sin x + \cos y, 2\sin x \cos y).$$

1. Déterminer la matrice Jacobienne $J_{(x,y)}(f)$ de f au point (x,y).

2. Soit $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par : $g(u,v,w) = u^2 + v^2 + w$. Déterminer la matrice Jacobienne $J_{(u,v,w)}(g)$ de g au point (u,v,w).
3. Calculer la matrice Jacobienne $J_{(x,y)}(gof)$ de gof au point (x,y)

   a) En explicitant gof. b) Au moyen d'un produit de matrices.

Exercice 7. : Soit f la fonction de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue en $(0,0)$.
2. Calculer en tout point $(x,y) \neq (0,0)$ $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.
3. Etudier l'existance des dérivées partielles en $(0,0)$. f est-elle différentiable en $(0,0)$?

Exercice 8. : Soient les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ et $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définies par :

$$f(x,y) = (x^2 + y, x^2 - y^2, 1);\ g(x,y) = (e^{x-y}, 2xy).$$

1. Rappeler la définition d'une fonction de classe C^k sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$.
2. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

   a- Déterminer les matrices jacobiennes $J_f(x,y)$ et $J_g(x,y)$ respectives de f et g.

   b- Calculer de deux manières différentes la matrice jacobienne $J_{(fog)}(x,y)$ de fog.

   c- Donner $d(fog)_{(x,y)}(h,k)$, $(h,k) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 9. : Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - y^3}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad ; \quad g(x,y) = (x+y, xy).$$

1. Montrer qu'il existe $K > 0$ tel que $\forall x \in V(0,0)$, $|f(x,y)| \leq K \|(x,y)\|$. En déduire le domaine de continuité de f.
2. Montrer que les dérivées partielles de f sont définies sur $\mathbb{R}^2$.
3. f est-elle différentiable au point $(0,0)$? Est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$?
4. Donner l'expression de $df_{(1,1)}(h,k)$ et $dg_{(1,1)}(h,k)$.

5. Ecrire les matrices jacobiennes de f, g, et fog.

Exercice 10. :

1. Trouver les extrema de $f(x,y) = \left(x^2 + y^2\right) e^{x^2 - y^2}$.
2. Trouver les extrema de $f(x,y) = xe^y + y\ln(x)$.