Intégrales généralisées (ou impropres)

Dans ce chapitre, on cherche

• à intégrer une fonction sur un intervalle non borné c'est-à-dire un intervalle de la forme, $]-\infty, a]$, $[a, +\infty[$, $]-\infty, +\infty[$.

• à intégrer, sur un intervalle d'extrémités a et b, une fonction non bornée en a ou en b.

Ces intégrales sont dites **généralisées** ou **impropres**.

Les cas à envisager sont les intervalles de la forme $]-\infty, a]$, $[a, +\infty[$, $]-\infty, +\infty[$, $[a, b[$, $]a, b]$, $]a, b[$. Comme $]-\infty, +\infty[=]-\infty, a] \cup [a, +\infty[$, $]a, b[=]a, c] \cup [c, b[$, et que les situations $]-\infty, a]$ et $]a, b]$ sont similaires à celles des intervalles $[a, +\infty[$ et $]a, b]$, on se limitera à l'intervalle $[a, b[$ et nous travaillons sur la droite réelle achevée $\overline{\mathbb{R}}$, ce qui permet d'écrire $b = +\infty$.

Dans tout ce chapitre, nous retrouvons les principes et les méthodes déjà vues dans le cadre des séries numériques.

3.1 Locale intégrabilité

Définition 1.1

On dit que f est **localement intégrable** *sur un intervalle I ssi $\forall \alpha, \beta$ tel que $[\alpha, \beta] \subset I$, f est intégrable sur $[\alpha, \beta]$.*

Exemples 1

1. *La fonction $\frac{1}{x}$ est localement intégrable sur $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.*
2. *La fonction $\frac{1}{1-x^2}$ est localement intégrable sur $]-\infty, -1[$, $]-1, 1[$ et $]1, +\infty[$.*
3. *Toute fonction continue sur I est localement intégrable sur I. Par exemple, la fonction $x \longmapsto \ln x$ est localement intégrable sur $]0, +\infty[$.*
4. *Toute fonction monotone sur I est localement intégrable sur I.*
5. *Toute fonction continue par morceaux sur I est localement intégrable sur I.*
6. *La fonction f égale à 0 si x est rationnel et 1 si x est irrationnel n'est pas localement intégrable.*

Définition 2.1

Soit f *une fonction* **localement intégrable** *sur* $[a,b[$ *avec* $-\infty < a < b \leq +\infty$. *Si la limite de* $\int_a^x f(t)dt$ *existe lorsque* x *tend vers* b, *on dit que l'intégrale impropre de* f *sur* $[a,b[$ *est* **convergente**, *et on note*

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{x \longrightarrow b} \int_a^x f(t)dt.$$

Quand une intégrale ne converge pas, on dit qu'elle **diverge** *(ou elle est* **divergente***). La nature d'une intégrale généralisée est le fait qu'elle converge ou qu'elle diverge.*

1. Les intégrales généralisées $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ et $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ sont convergentes.
   En effet, La fonction $x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ est continue sur $]0,1]$. Elle est donc localement intégrable sur cet intervalle.
   D'autre part,
   $$\lim_{x \longrightarrow 0} \int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} = \lim_{x \longrightarrow 0} 2\left[\sqrt{t}\right]_x^1 = 2.$$
   Donc, $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ est convergente.
   De même, la fonction $x \longmapsto \frac{1}{1+x^2}$ est localement intégrable sur $[0,+\infty[$ car elle est continue sur cet intevalle. Comme
   $$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \lim_{x \longrightarrow +\infty} [\arctan t]_0^x = \frac{\pi}{2},$$
   alors $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ est convergente.

Exemples (suite)

2. L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x}$ est divergente car la fonction

$$\int_1^x \frac{dt}{1+t} dt = [\ln(t+1)]_1^x = \ln(x+1) - \ln 2,$$

n'admet pas de limite quand $x \longrightarrow +\infty$.

3. L'intégrale $\int_0^{+\infty} \cos(t)dt$ est divergente car la fonction

$$\int_0^x \sin(t)dt = [-\cos(t)]_0^x = 1 - -\cos(x),$$

n'admet pas de limite quand $x \longrightarrow +\infty$.

1. Il est inexact d'écrire

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \lim_{X \longrightarrow +\infty} \int_{-X}^{X} f(t)dt.$$

2. Ne pas confondre la convergence de la fonction au point considéré avec la convergence de l'intégrale.
Par exemple, l'application $x \longrightarrow \ln x$ n'admet pas de limite lorsque x tend vers 0^+. Cependant, $\int_0^1 \ln x dx$ converge car

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} \int_x^1 \ln(t)\, dt = \lim_{x \longrightarrow 0^+} [t \ln(t) - t]_x^1 = \ln 1 - 1.$$

3. Quand on calcule l'intégrale d'une fonction sur un intervalle donné il faut s'assurer que la fonction est bien intégrable.
Par exemple, l'application $x \longrightarrow 1/x$ n'est pas intégrable sur $[-1, 1]$.

Remarques (suite)

4. Les formules
   - de changement de variables,
   - d'intégration par parties,

   vues en première année se généralisent facilement aux cas des intégrales généralisées. Cette extension découle de l'application de ces formules à l'intégrale généralisée $\int_a^x f(t)dt$. On passe ensuite à la limite.

   Par exemple,
   - Le changement de variable ramène l'intégrale généralisée $\int_0^1 \sin(\frac{1}{t})dt$ à l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}dx$.
   - L'intégration par parties transforme l'étude de l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}dt$ à celle de l'intégrale généralisée $\cos(1) + \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}dt$.

Exemple 2 (Intégrales de Riemenn)

- $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ **converge** $\Leftrightarrow \alpha > 1.$
- $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ **converge** $\Leftrightarrow \alpha < 1.$

Démontrons la première proposition.
Pour tout $x \in [1, +\infty[$ *, on a*

$$F(x) = \int_1^x \frac{dt}{t^\alpha} = \begin{cases} \ln x & si \;\; \alpha = 1, \\ \frac{1}{1-\alpha}\left(x^{-\alpha+1} - 1\right) & si \;\; \alpha \neq 1. \end{cases}$$

On voit que $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} F(x)$ *existe si et seulement si* $\alpha > 1$*. Donc, l'intégrale généralisée* $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ *est convergente si et seulement si* $\alpha > 1$*. En faisant le changement de variables* $x = \frac{1}{t}$ *dans* $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$*, et en utilisant ce qui précède, on démontre que* $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ *converge si et seulement si* $\alpha < 1$*.*

Exemple 3 (Intégrales de Bertrand)

- $\forall a \in]1,+\infty[,\ \int_a^{+\infty} \frac{dt}{t(\ln t)^\alpha}$ **converge** $\Leftrightarrow \alpha > 1.$
- $\forall a \in]0,1[,\ \int_0^{a} \frac{dt}{t(\ln t)^\alpha}$ **converge** $\Leftrightarrow \alpha > 1.$

Démontrons la première proposition. Soit $a > 1$ et $x \in [a,+\infty[$. On a

$$G(x) = \int_a^x \frac{dt}{t\,(\ln t)^\alpha} = \int_a^x \frac{d\,(\ln t)}{(\ln t)^\alpha} = \int_a^x d\,(\ln t)\,(\ln t)^{-\alpha}$$

$$= \begin{cases} [\ln\ln t]_a^x = \ln\ln x - \ln\ln a & \text{si } \alpha = 1, \\ \frac{1}{1-\alpha}\left[(\ln t)^{-\alpha+1}\right]_a^x = \frac{1}{1-\alpha}\left[(\ln x)^{-\alpha+1} - (\ln a)^{-\alpha+1}\right] & \text{si } \alpha \neq 1. \end{cases}$$

Exemple (suite)

Donc, $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} G(x)$ *existe si et seulement si* $\alpha > 1$. *Par conséquent,* $\int_a^{+\infty} \frac{dt}{t(\ln t)^\alpha}$ *converge si et seulement si* $\alpha > 1$.

En faisant le changement de variables $x = \frac{1}{t}$ *dans* $\int_0^a \frac{dt}{t(\ln t)^\alpha}$*, et en utilisant ce qui précède, on démontre que* $\int_0^a \frac{dt}{t(\ln t)^\alpha}$ *converge si et seulement si* $\alpha > 1$.

Remarque 2.1

On peut déduire les conditions nécessaires et suffisantes de convergence des intégrales généralisées de Bertrand à partir de celles des intégrales de Riemann en faisant le changement de variable $x = \ln t$.

Proposition 2.1

Soit f une fonction localement intégrable sur $[a,b[$ et $c \in [a,b[$.
Alors $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_c^b f(t)dt$ sont de même nature.
Dans le cas où elles convergent, on a

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt.$$

Preuve. Pour tout $x \in [c,b[$, on a

$$\int_a^x f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^x f(t)dt.$$

Puisque $\int_a^c f(t)dt$ existe, alors $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_c^b f(t)dt$ sont de même nature. Par passage à la limite dans la relation de Chasles, on déduit la deuxième assertion.

Remarque 2.2

On écrira

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_{-\infty}^{a} f(t)dt + \int_{a}^{+\infty} f(t)dt$$

que lorsque les deux intégrales généralisées du second membre sont convergentes.

Proposition 2.2

Soient f, g deux fonctions localement intégrables sur un intervalle $[a,b[$, λ et μ deux réels. Si les intégrales $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_a^b g(t)dt$ sont convergentes, alors $\int_a^b [\lambda f(+\mu g](t)dt$ est convergente et on a

$$\int_a^b [\lambda f(+\mu g](t)dt = \lambda \int_a^b f(t)dt + \mu \int_a^b g(t)dt.$$

Preuve. Il suffit d'utiliser la linéarité des intégrales sur l'intervalle $[a,x]$, $x \in [a,b[$ et de passer à la limite.

Remarque 2.3

La réciproque est fausse.
Par exemple, $\int_2^{+\infty} \frac{2dx}{1-x^2}$ *est convergente, mais on n'écrira pas*

$$\int_2^{+\infty} \frac{2dx}{1-x^2} = \int_2^{+\infty} \frac{dx}{1-x} - \int_2^{+\infty} \frac{dx}{1+x}$$

car les deux intégrales du second membre sont divergentes.

Proposition 2.3

Soit f une fonction continue sur un intervalle borné $[a,b[$ et admettant une limite l finie en b. Alors, $\int_a^b f(t)dt$ est convergente.

Preuve. Comme $\lim\limits_{x \longrightarrow b} f(x) = l$ existe, on peut prolonger f par continuité en b en posant

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in [a,b[, \\ l & \text{si } x = b. \end{cases}$$

Pour tout $x \in [a,b[$, on a $F(x) = \int_a^x f(t)dt = \int_a^x \widetilde{f}(t)dt$.
Comme F est continue, par passage à la limite, on obtient

$$\lim_{x \longrightarrow b} \int_a^x f(t)dt = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b \widetilde{f}(t)dt.$$

Donc, $\int_a^b f(t)dt$ est convergente.

Proposition 3.1

Soit f est une fonction **positive** *et* **localement intégrable** *sur $[a,b[$ alors, la fonction,*

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt,$$

est croissante et F admet une limite finie, quand x tend vers b, si et seulement si elle est majorée. Pour tout $x\in[a,b[$, on a

$$0\leq F(x)=\int_a^x f(t)dt\leq\int_a^b f(t)dt=\lim_{x\longrightarrow b}\int_a^x f(t)dt.$$

Preuve. Pour tout $y > x$, on a,

$$F(y) - F(x) = \int_a^y f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_x^y f(t)dt \geq 0,$$

car f est positive. Donc F est croissante et par conséquent admet une limite finie, quand x tend vers b, si et seulement si elle est majorée.

Proposition 3.2

Soit f et g deux fonctions **positives** *et* **localement intégrables** *sur $[a,b[$. On suppose que pour tout $x \in [a,b[$, $0 \leq f(x) \leq g(x)$. Alors,*

$$\begin{cases} (i) \quad \int_a^b g(t)dt \text{ converge} \Longrightarrow \int_a^b f(t)dt \text{ converge,} \\ \\ (ii) \quad \int_a^b f(t)dt \text{ diverge} \Longrightarrow \int_a^b g(t)dt \text{ diverge.} \end{cases}$$

Preuve. Supposons que $\int_a^b g(t)dt$ est convergente. Pour tout $x \in [a,b[$, on a

$$0 \leq \int_a^x f(t)dt \leq \int_a^x g(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt \leq M.$$

D'où (i).
L'assertion (ii) se déduit par contraposé.

Exemples 5

1. $\int_0^{+\infty} \frac{\cos^2(x)}{1+x^2} dx$ *est convergente.*

   En effet, la fonction $f : x \longmapsto \frac{\cos^2(x)}{1+x^2}$ *est continue sur* $I = [0, +\infty[$. *Donc localement intégrable sur cet intervalle. Le seul problème est au voisinage de* $+\infty$. *Pour tout* $x \in [0, +\infty[$, *on a*

$$0 \leq \frac{\cos^2(x)}{1+x^2} \leq \frac{1}{1+x^2}.$$

   Or, $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ *est convergente car*

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{x \longrightarrow +\infty} \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \lim_{x \longrightarrow +\infty} [\arctan(t)]_0^x = \frac{\pi}{2}.$$

   Donc, $\int_0^{+\infty} \frac{\cos^2(x)}{1+x^2} dx$ *est convergente.*

Exemples (suite)

2. $\int_0^1 \frac{dx}{\sin x}$ *est divergente. En effet, soit* $x \in \left]0,1\right]$. *On a,* $\quad 0 < \sin x < x$.
D'où, $\quad \frac{1}{\sin x} > \frac{1}{x} > 0.$. $\quad$ *Or,* $\int_0^1 \frac{dx}{x}$ *diverge car*

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \int_x^1 \frac{dt}{t} = \lim_{x \longrightarrow 0} \left[\ln t\right]_x^1 = +\infty.$$

Donc, $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sin x}$ *est divergente.*

Remarque 3.1

La proposition 3.2 reste appliquable si on a l'inégalité $0 \leq f(x) \leq g(x)$ *sur* $[c,b[$ *avec* $c \in [a,b[$ *(c'est à dire au voisinage de* b*). Il suffit de couper l'intégrale généralisée en deux intégrales : une non impropre sur* $[a,c]$ *et l'autre impropre sur* $[c,b[$ *et d'appliquer la proposition 3.2 sur* $[c,b[$.

Proposition 3.3 (Comparaison série-intégrale)

Soit f une fonction définie sur $[a,+\infty[$, **positive et décroissante.** *Alors, la série $\sum f(n)$ et l'intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ sont de même nature.*

Preuve.

Posons

$$v_n = \int_n^{n+1} f(x)dx.$$

Puisque f est décroissante, pour tout entier $k \geq a$ et pour tout $x \in [k,k+1]$, on a

$$f(k+1) \leq f(x) \leq f(k).$$

En intégrant les dernières relations entre k et $k+1$, nous obtenons

$$f(k+1) \leq v_k \leq f(k).$$

Par sommation sur k et par utilisation de la relation de Chasles, on déduit le résultat.

Proposition 3.4

Soit f et g deux fonctions **positives** *et* **localement intégrables** *sur* $[a, b[$. *On suppose que* $\lim\limits_{x \longrightarrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = l$.

(i) *Si* $l \neq 0$, *alors* $\int_a^b f(x)dx$ *et* $\int_a^b g(x)dx$ *sont de même nature (toutes les deux convergentes ou toutes les deux divergentes).*

(ii) *Si* $l = 0$, *alors la convergence de* $\int_a^b g(x)dx$ *implique la convergence de* $\int_a^b f(x)dx$.

Preuve.

Prouvons (i). Puisque $\lim\limits_{x \longrightarrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = l > 0$, il existe $c \in [a, b[$ tel que pour tout $x \in [c, b[$, on ait (prendre $\varepsilon = \frac{l}{2}$)

$$\frac{l}{2} g(x) \leq f(x) \leq \frac{3l}{2} g(x).$$

D'où (i) à partir de ces inégalités et la proposition 3.1.
Démontrons (ii). Par hypothèse, il existe $c \in [a, b[$ tel que pour tout $x \in [c, b[$, on ait (prendre $\varepsilon = 1$) $\quad 0 \leq f(x) \leq g(x)$.
D'où (ii) à partir de ces inégalités et la proposition 3.2

Corollaire 3.1

Soit f et g deux fonctions **positives** *et* **localement intégrables** *sur $[a, b[$. Si $f(x) \underset{b}{\backsim} g(x)$, alors $\int_a^b f(x)dx$ et $\int_a^b g(x)dx$ sont de même nature (toutes les deux convergentes ou toutes les deux divergentes).*

Preuve.
Evident (prendre $l = 1$ dans la proposition 3.4).

Remarque 3.2

Si f est négative et localement intégrable, la fonction $(-f)$ est positive et localement intégrable. Donc, on peut appliquer la proposition à la fonction $(-f)$.

Remarque 3.3

En pratique, on compare souvent $f(x)$ avec les fonctions

- $\dfrac{C}{x^\alpha}$ *(Riemann)*, $C \in \mathbb{R}^+$,
- $\dfrac{M}{x(\ln x)^\alpha}$ *(Bertrand)*, $M \in \mathbb{R}^+$.

Exemple 6

Etudier la nature des intégrales suivantes :

1) $\int_0^1 \frac{\sin\sqrt{x}}{x}dx$, *2)* $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$; *3)* $\int_2^{+\infty} \frac{\ln(\cos\frac{1}{x})}{\ln x}dx$.

1. *La fonction* $f(x) = \frac{\sin\sqrt{x}}{x}$ *est continue sur* $]0,1]$, *donc localement intégrable sur cet intervalle. On a un problème au voisinage de 0. La fonction* f *est positive sur* $]0,1]$ *et* $f(x) \underset{0}{\backsim} \frac{1}{\sqrt{x}}$.

   Or $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ *est convergente (Riemann* $\alpha < 1$*) ou*

   $$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}dt = \lim_{x\longrightarrow 0}\left[2\sqrt{t}\right]_x^1 = 2.$$

   Donc, d'après le corollaire 3.1, $\int_0^1 \frac{\sin\sqrt{x}}{x}dx$ *est convergente.*

2. *La fonction* $f(x) = e^{-x^2}$ *est positive et localement intégrable sur* $[0,+\infty[$. *D'autre part,* $\lim_{x\longrightarrow+\infty} x^2e^{-x^2} = 0$. *Comme* $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$ *converge (Riemann* $\alpha > 1$*), on déduit de la proposition 3.4 que* $\int_2^{+\infty} e^{-x^2}dx$ *est convergente.*

Exemple (suite)

3. *La fonction* $f(x) = \frac{\ln(\cos\frac{1}{x})}{\ln x}$ *est localement intégrable sur* $[2, +\infty[$ *et négative sur cet intervalle. Au lieu d'étudier* $\int_2^{+\infty} f(x)dx$*, on va étudier* $\int_2^{+\infty} -f(x)dx$ *(car* $-f(x) \geq 0$ *sur* $[2, +\infty[$*). On a*

$$-f(x) = -\frac{\ln(\cos\frac{1}{x})}{\ln x} \underset{+\infty}{\backsim} -\frac{\ln\left[1 - \frac{1}{2x^2} + o(\frac{1}{x^2})\right]}{\ln x} \underset{+\infty}{\backsim} \frac{1}{2x^2 \ln x} = g(x).$$

La fonction g *est intégrable sur* $[2, +\infty[$ *car sur cet intervalle,*

$$0 \leq \frac{1}{2x^2 \ln x} \leq \frac{1}{\ln(2)x^2}.$$

Par application du corollaire 3.1, on déduit que $\int_2^{+\infty} -f(x)dx$ *est convergente. Par suite, l'intégrale généralisée* $\int_2^{+\infty} f(x)dx$ *est convergente.*

Définition 4.1

Soit f une fonction **localement intégrable** *sur $[a,b[$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On dit que $\int_a^b f(x)dx$ est* **absolument convergente (ou converge absolument)** *si $\int_a^b |f(x)|\,dx$ est convergente.*

Exemple 7

L'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}dx$ est absolument convergente. En effet, pour tout $x \geq 1$,

$$0 \leq \left|\frac{\cos x}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2}.$$

Comme $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ est convergente (Riemann $\alpha > 1$), on déduit, en utilisant le critère de majoration, que $\int_1^{+\infty} \left|\frac{\cos x}{x^2}\right| dx$ est convergente. Donc, $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}dx$ est absolument convergente.

Proposition 4.1 (condition suffisante d'intégrabilité)

Soit f une fonction localement intégrable sur $[a,b[$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
Si $\int_a^b f(x)dx$ est **absolument convergente**, *alors elle est convergente et on a*

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx.$$

Preuve. Puisque

$$|\mathrm{Re} f| \leq |f| \text{ et } |\mathrm{Im} f| \leq |f|,$$

il suffit de prouver la proposition pour une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Soit f une fonction réelle. Posons

$$g(x) = \sup(f(x), 0) \text{ et } h(x) = \sup(-f(x), 0).$$

Pour tout $x \in [a,b[$, on a

$$0 \leq g(x) \leq |f(x)| \text{ et } 0 \leq h(x) \leq |f(x)|.$$

En utilisant le critère de majoration, on déduit que les intégrales $\int_a^b g(x)dx$ et $\int_a^b h(x)dx$ sont convergentes.
Or, pour tout $x \in [a, b[$,

$$f(x) = g(x) - h(x) \text{ et } |f(x)| = g(x) + h(x).$$

Donc, $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx - \int_a^b h(x)dx$ est convergente.

Exemple 8

Montrons que $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x\sqrt{x}} dx$ *est absolument convergente. Notons que la fonction* $f(x) = \frac{\sin x}{x\sqrt{x}}$ *ne garde pas un signe constant au voisinage de* $+\infty$*. Par ailleurs, nous avons*

$$\left| \frac{\sin x}{x\sqrt{x}} \right| \leq \frac{1}{x\sqrt{x}}.$$

Or, $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x}}$ *est convergente. Donc,* $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x\sqrt{x}} dx$ *est absolument convergente et par conséquent convergente.*

Remarque 4.1

La fonction $x \longmapsto |f(x)|$ *est* **positive.** *Donc, les critères de convergence relatifs aux fonctions positives peuvent être utilisés pour montrer qu'une intégrale est absolument convergente.*

Définition 4.2

Soit f une fonction **localement intégrable** *sur $[a, b[$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On dit que $\int_a^b f(x)dx$ est* **semi convergente** *si :*

$$\begin{cases} (i) \ \int_a^b f(x)dx \text{ converge,} \\ \\ (ii) \ \int_a^b |f(x)|\, dx \text{ diverge.} \end{cases}$$

3.4.2.2 Exemple

Exemple 9

$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ *est semi convergente.*
Montrons d'abord que l'intégrale est convergente.
La fonction $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ se prolonge par continuité à l'origine.
Donc $\int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{x} dx$ est convergente.

Exemple (suite)

D'autre part, à l'aide d'une intégratin par parties, on déduit que pour tout $X \geq 2\pi$,

$$\int_{2\pi}^{X} \frac{\sin x}{x} dx = \left[\frac{1-\cos x}{x}\right]_{2\pi}^{X} + \int_{2\pi}^{X} \frac{1-\cos x}{x^2} dx.$$

En faisant tendre X *vers* $+\infty$, *on déduit que*

$$\int_{2\pi}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \int_{2\pi}^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2} dx.$$

Pour tout $X \geq 2\pi$,

$$0 \leq \frac{1-\cos x}{x^2} \leq \frac{2}{x^2}.$$

Donc, $\int_{2\pi}^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2} dx$ *est convergente. Par conséquent,* $\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ *est convergente.*

Exemple (suite)

Montrons maintenant que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ *n'est pas absolument convergente.*
Pour tout $x \in [(k-1)\pi, k\pi]$, *on a* $\left|\frac{\sin x}{x}\right| \geq \frac{1}{k\pi} |\sin x|$.
D'où, $\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx \geq \frac{1}{k\pi} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin x| \, dx = \frac{1}{k\pi} \int_0^{\pi} \sin t dt = \frac{2}{k\pi}$.
D'où, par sommation,

$$\int_0^{n\pi} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx \geq \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

La série $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ *est divergente. Donc,* $\int_0^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx$ *est divergente. Par conséquent, l'intégrale* $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ *est semi convergente.*

Proposition 4.2

Soit $f : [a, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, *une fonction* **positive, décroissante et tendant vers 0 à l'infini.** *Soit* $g : [a, +\infty[\longrightarrow \mathbb{K}$ $(\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C})$ *une fonction localement intégrable et telle que*

$$\forall x \in [a, +\infty[, \quad \left| \int_a^x g(x)\, dx \right| \leq M.$$

Alors, $\int_a^{+\infty} f(x) g(x)\, dx$ *est* **convergente**.

Remarque 4.2

1. *Le théorème d'Abel est utilisé pour montrer la convergence de certaines intégrales généralisées non absolument convergentes.*
2. *N'appliquer ce théorème que lorsque les critères usuels ont échoué.*
3. *Pour appliquer le critère, il suffit que la fonction* f *vérifie les conditions du théorème d'Abel pour* x *assez grand.*

Corollaire 4.1

Soit f une fonction **positive**, **décroissante** *sur* $[a, +\infty[$ *et telle que* $\lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = 0$. *Alors,* $\forall \lambda \neq 0$ *et* $\forall a \in \mathbb{R}$, $\int_a^{+\infty} e^{i\lambda x} f(x) dx$ *est convergente.*

Preuve.

Pour tout $x \in [a, +\infty[$, on a

$$\left| \int_a^x e^{i\lambda t} dt \right| = \left| \frac{e^{i\lambda x} - e^{i\lambda a}}{i\lambda} \right| \leq \frac{2}{|\lambda|}.$$

D'après le critère d'Abel, $\int_a^{+\infty} e^{i\lambda x} f(x) dx$ est convergente.

Corollaire 4.2

Soit f *une fonction* **positive**, **décroissante** *sur* $[a, +\infty[$ *et telle que* $\lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = 0$. *Alors,* $\forall \lambda \neq 0$ *et* $\forall a \in \mathbb{R}$, *les intégrales*

$$\int_a^{+\infty} \cos(\lambda x) f(x) dx \quad \text{et} \quad \int_a^{+\infty} \sin(\lambda x) f(x) dx,$$

sont convergentes.

Exemples 10

Les intégrales impropres

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx \text{ et } \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx,$$

sont convergentes.

Proposition 5.1

Soit f une fonction **localement intégrable** *sur l'intervalle $[a, b[$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Les deux propositions suivantes sont équivalentes.*

(i) $\int_a^b f(x)dx$ *converge.*

(ii) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists X_\varepsilon$, $X_\varepsilon < u < v < b \Longrightarrow \left|\int_u^v f(x)dx\right| < \varepsilon$.

Preuve.

Montrons que $(i) \Longrightarrow (ii)$.

$$\text{Posons} \quad F(x) = \int_a^x f(x)dx,\ x \in [a, b[\,,\ \ A = \int_a^b f(x)dx.$$

On a

$$\lim_{x \longrightarrow b} F(x) = A.$$

Donc, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists X_\varepsilon$ tel que $x \in [X_\varepsilon, b[\Longrightarrow |F(x) - A| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Soit maintenant deux réels u et v tels que $u \in [X_\varepsilon, b[$, $v \in [X_\varepsilon, b[$ et $u < v$. Alors, on a

$$|F(u) - A| \leq \frac{\varepsilon}{2} \text{ et } |F(v) - A| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

En vertu de l'inégalité triangulaire, on déduit que

$$|F(v) - F(u)| = \left| \int_u^v f(x)dx \right| < \varepsilon.$$

Montrons que $(ii) \Longrightarrow (i)$.
Soit (x_n) une suite de $[a, b[$ convergeant vers b.

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_\varepsilon,\ n > n_\varepsilon \Longrightarrow x_n > X_\varepsilon.$$

$$n > n_\varepsilon \text{ et } m > n_\varepsilon \Longrightarrow |F(x_n) - F(x_m)| = \left| \int_{x_n}^{x_m} f(x)dx \right| < \varepsilon.$$

Cela montre que la suite $(F(x_n))$ est de Cauchy dans $\mathbb{K}$. Puisque $\mathbb{K}$ est complet, la suite $(F(x_n))$ est convergente. Donc, $\int_a^b f(x)dx$ converge.

Remarque 5.1

Le critère de Cauchy est surtout utile dans les questions théoriques.

Exemple 11

Montrons que $\int_0^{+\infty} e^{x\sin x}dx$ *est divergente. Soit* $n \in \mathbb{N}$ *et* $x \in [2n\pi, 2n\pi + 1]$. *On a* $x \sin x \geq 0$. *Donc,* $e^{x\sin x} \geq 1$ *et*

$$\int_{2n\pi}^{2n\pi+1} e^{x\sin x}dx \geq \int_{2n\pi}^{2n\pi+1} dx = \pi.$$

Le critère de Cauchy n'est pas satisfait. L'intégrale est donc divergente.

3.6 Utilisation de développements asymptotiques

Il est parfois possible, en utilisant des développements limités, d'écrire une fonction f, dont on veut étudier la convergence de l'intégrale sur $[a, b[$, comme somme de deux (ou plusieurs) fonctions dont la convergence des intégrales est plus simple à étudier. Considérons par exemple,

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x + \cos x} dx.$$

La fonction $f(x) = \frac{\sin x}{x+\cos x}$ est continue sur $[1, +\infty[$. Donc localement intégrable sur cet intervalle. D'autre part, on peut écrire pour x assez grand

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sin x}{x} \frac{1}{1 + \frac{\cos x}{x}} = \frac{\sin x}{x} \left[1 - \frac{\cos x}{x} (1 + \varepsilon(x)) \right] \\ &= \frac{\sin x}{x} - \frac{\sin x \cos x}{x^2} [1 + \varepsilon(x)] \quad \text{avec} \lim_{x \longrightarrow +\infty} \varepsilon(x) = 0. \end{aligned}$$

$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ est semi convergente, donc convergente (cf : exemple 4).

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x \cos x}{x^2} \left(1 + \varepsilon(x)\right) dx,$$

est absolument convergente car $\exists A > 1$ tel que pour tout $x > A$,

$$\left| \frac{\sin x \cos x}{x^2} \left(1 + \varepsilon(x)\right) \right| \leq \frac{2}{x^2}.$$

On conclut donc que $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x + \cos x} dx$ est convergente.