Intégrales doubles et triples

Introduction

Dans ce chapitre, nous n'allons pas développer la théorie générale de l'intégrale d'une fonction de n variables sur une partie bornée de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$. Nous nous contenterons de donner des méthodes de calcul des intégrales doubles et triples (càd $n = 2$, $n = 3$) sur des compacts particuliers, ceux dont on peut délimiter leur frontière par des fonctions continues.

Théorème 1.1 (Théorème et définition.)

Soit Δ *le compact de* $\mathbb{R}^2$ *défini par :*

$$\Delta = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \in [a,b]\,,\ \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\right\}, \qquad (1)$$

• a, b *sont des réels* $(a < b)$,

• α *et* β *des fonctions numériques continues sur* $[a,b]$ *et vérifiant* $\alpha(x) \leq \beta(x)$ *pour tout* $x \in [a,b]$.

Soit f *une fonction continue sur* Δ*. On appelle* **intégrale double** *de* f *sur* Δ*, le nombre,*

$$I = \int_{\Delta} f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)dy\right) dx.$$

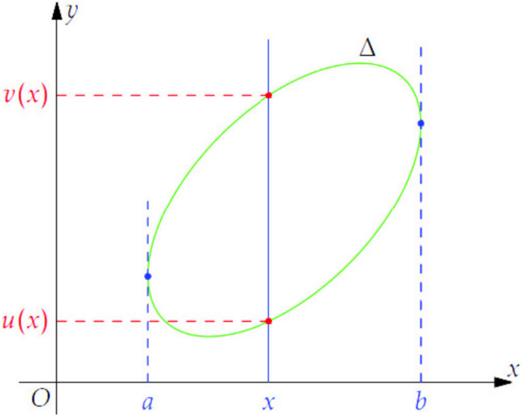


FIGURE – Compact de $\mathbb{R}^2$ délimité verticalement par deux fonctions continues

Remarques

1. Le théorème transforme l'intégrale double en deux intégrales simples emboitées.
2. Si $\Delta = [a,b] \times [c,d]$, càd Δ est un rectangle de $\mathbb{R}^2$, alors

$$\int_\Delta f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx.$$

3. En échangeant les rôles de x et y, on peut calculer l'intégrale double de f sur le compact Δ de $\mathbb{R}^2$ défini par :

$$\Delta = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / y \in [c,d],\ \gamma(y) \leq x \leq \delta(y) \right\}, \qquad (2)$$

où c, d sont des réels ($c < d$), γ et δ sont deux fonctions continues sur $[c,d]$ et vérifiant $\gamma(y) \leq \delta(y)$ $\forall y \in [c,d]$. On aura dans ce cas,

$$\int_\Delta f(x,y)dxdy = \int_c^d \left(\int_{\gamma(y))}^{\delta(y)} f(x,y)dx \right) dy.$$

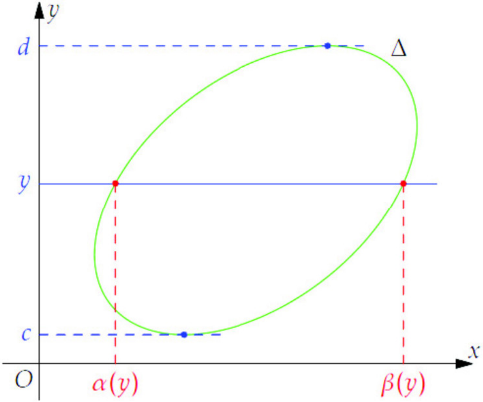
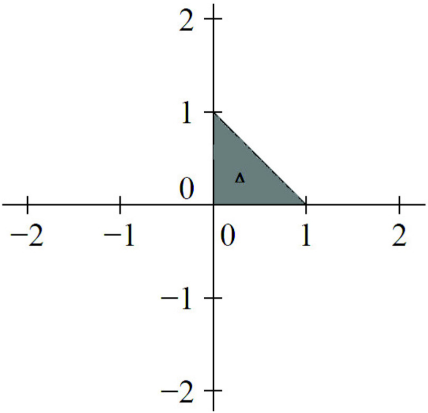


FIGURE – Compact de $\mathbb{R}^2$ délimité horizontalement par deux fonctions continues

Exemples

1. Calcul de $\int_\Delta xydxdy$ où
$\Delta = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0,\ y \geq 0 \text{ et } x+y \leq 1\right\}.$



Cherchons d'abord une description hiérarchique du compact Δ. On peut représenter Δ de deux manières différentes

$$\Delta = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \in [0,1]\,,\ 0 \leq y \leq 1-x\right\}, \tag{3}$$

$$\Delta = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y \in [0,1]\,,\ 0 \leq x \leq 1-y\right\}. \tag{4}$$

✓ Si Δ est de la forme (3), on obtient,

$$\begin{aligned}
\int_\Delta xydxdy &= \int_{x=0}^{x=1} \left(\int_{y=0}^{y=1-x} xydy\right) dx \\
&= \int_{x=0}^{x=1} x \left(\int_{y=0}^{y=1-x} ydy\right) dx \\
&= \int_0^1 x\frac{(1-x)^2}{2}dx = \frac{1}{24}.
\end{aligned}$$

Exemples [suite]

✓ Si Δ est de la forme (4), on obtient,

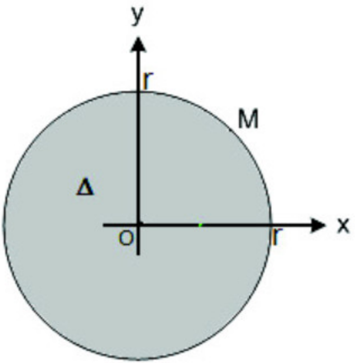
$$\begin{aligned}
\int_{\Delta} xydxdy &= \int_{y=0}^{y=1} \left(\int_{x=0}^{x=1-y} xydx \right) dy \\
&= \int_{y=0}^{y=1} y \left(\int_{x=0}^{x=1-y} xdx \right) dy \\
&= \int_0^1 y \frac{(1-y)^2}{2} dy = \frac{1}{24}.
\end{aligned}$$

Notons que

$$\int_0^1 \left(\int_0^{1-x} xydy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^{1-y} xydx \right) dy.$$

Exemples [suite]

2. Calcul de $I = \int_{\Delta} y^2 dxdy$ où $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq r^2, r > 0\}$.



Une description hiérarchique de Δ est donné par :

$$\Delta = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y \in [-r,r]\,,\ x \in \left[-\sqrt{r^2-y^2}, \sqrt{r^2-y^2}\right]\right\}.$$

D'où,

$$\begin{aligned} I &= \int_{\Delta} y^2 dx dy \\ &= \int_{y=-r}^{y=r} y^2 \left(\int_{x=-\sqrt{r^2-y^2}}^{x=\sqrt{r^2-y^2}} dx\right) dy \\ &= \int_{-r}^{r} 2y^2\sqrt{r^2-y^2} dy \\ &= 4\int_{0}^{r} y^2\sqrt{r^2-y^2} dy. \end{aligned}$$

Exemples [suite]

En faisant le changement de variable $y = r\sin\theta$, on obtient

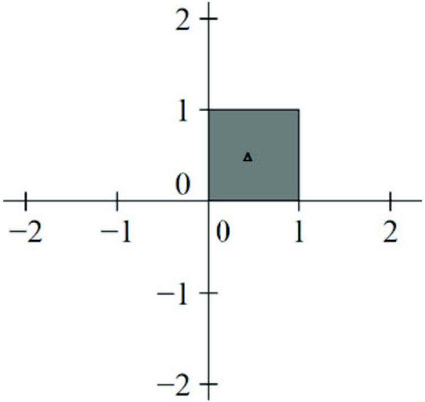
$$\begin{aligned} I &= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^4 \sin^2\theta\cos^2\theta d\theta = r^4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2\theta d\theta \\ &= r^4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1-\cos 4\theta}{2}\right) d\theta = \frac{\pi r^4}{4}. \end{aligned}$$

Notons qu'on peut représenter le compact Δ sous la forme

$$\Delta = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/x\in[-r,r]\,,\ y\in\left[-\sqrt{r^2-x^2},\sqrt{r^2-x^2}\right]\right\}.$$

Exemples [suite]

2. Calcul de $I = \int_{\Delta} \frac{2}{(1+x+y)^3} dxdy$ où $\Delta = [0,1] \times [0,1]$.
   Ici, Δ est un rectangle de $\mathbb{R}^2$.



Donc,

$$
\begin{aligned}
I &= \int_{\Delta} \frac{2}{(1+x+y)^3} dxdy \\
&= \int_{y=0}^{y=1} \left(\int_{x=0}^{x=1} \frac{2}{(1+x+y)^3} dx \right) dy \\
&= \int_{y=0}^{y=1} \left[\frac{-1}{(1+x+y)^2} \right]_{x=0}^{x=1} dy \\
&= \int_0^1 \left(\frac{1}{(1+y)^2} - \frac{1}{(2+y)^2} \right) dy = \frac{1}{3}.
\end{aligned}
$$

Théorème de Fubini : Inversion des bornes

Proposition 1.1

Soit Δ un compact de $\mathbb{R}^2$ admettant deux représentations de la forme (1) et (2). Soit f une fonction continue sur Δ. Alors,

$$\int_\Delta f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f(x,y)dx \right) dy.$$

Remarque 1.1

Le théorème signifie qu'on peut changer l'ordre d'intégration sans changer la valeur de l'intégrale.

Corollaire 1.1

Soit $\Delta = [a,b] \times [c,d]$ *un rectangle de* $\mathbb{R}^2$ *et* f *une fonction continue sur* Δ. *Alors,*

$$\int_\Delta f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy.$$

En particulier, si $f(x) = g(x)h(y)$ *sur* Δ, *alors,*

$$\begin{aligned} \int_\Delta f(x,y)dxdy &= \int_a^b \left(\int_c^d g(x)h(y)dxdy \right) \\ &= \int_c^d \left(\int_a^b g(x)h(y)dxdy \right) \\ &= \left(\int_a^b g(x)dx \right) \left(\int_c^d h(y)dy \right). \end{aligned}$$

Exemple 1

Calculer $\int_{[0,1]\times[0,2]} \frac{2ye^x}{1+y^2} dxdy$. *D'après le corollaire 1.1, nous avons,*

$$\begin{aligned}
\int_{[0,1]\times[0,2]} \frac{2ye^x}{1+y^2} dxdy &= \left(\int_{x=0}^{x=1} e^x dx\right)\left(\int_{y=0}^{y=2} \frac{2y}{1+y^2} dy\right) \\
&= \left[e^x\right]_{x=0}^{x=1} \left[\ln\left(1+y^2\right)\right]_{y=0}^{y=2} \\
&= (e-1)\ln 5.
\end{aligned}$$

Intégrales triples

Soit Δ un compact de $\mathbb{R}^3$ admettant la représentation hiérarchique suivante :

$$\Delta = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x \in [a,b]\,,\ u(x) \leq y \leq v(x), \alpha\,(x,y) \leq z \leq \beta\,(x,y)\right\}, \tag{5}$$

- a et b sont des réels $(a < b)$,
- u et v des fonctions continues sur $[a,b]$ et vérifiant $u(x) \leq v(x)\ \forall x \in [a,b]$,
- α et β des fonctions numériques continues sur le compact

$$K = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \in [a,b]\,,\ u(x) \leq y \leq v(x)\right\},$$

$$\alpha(x,y) \leq \beta(x,y)\ \forall\,(x,y) \in K.$$

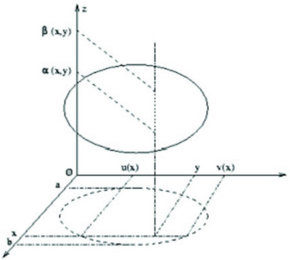


FIGURE – Compact de $\mathbb{R}^2$ délimité horizontalement par deux fonctions continues

Théorème 2.1 (Théorème et définition)

Soit f une fonction continue sur le compact Δ défini par (5).
On appelle **intégrale triple** *de f sur Δ, le nombre*

$$I = \int_{\Delta} f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b \left[\int_{u(x)}^{v(x)} \left(\int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x,y,z)dz \right) dy \right] dx.$$

Exemples

1. Calculer $I = \int_{[0,\pi]^3} \cos(x+y-z)dxdydz$. On a

$$\begin{aligned}
I &= \int_{x=0}^{x=\pi} \left[\int_{y=0}^{y=\pi} \left(\int_{z=0}^{z=\pi} \cos(x+y-z)dz \right) dy \right] dx \\
&= \int_{x=0}^{x=\pi} \left(\int_{y=0}^{y=\pi} \left[-\sin(x+y-z) \right]_{z=0}^{z=\pi} dy \right) dx \\
&= \int_{x=0}^{x=\pi} \left(\int_{y=0}^{y=\pi} \left[\sin(x+y) - \sin(x+y-\pi) \right] dy \right) dx \\
&= \int_{x=0}^{x=\pi} \left(\left[\cos(x+y-\pi) - \cos(x+y) \right]_{y=0}^{y=\pi} \right) dx \\
&= \int_{0}^{\pi} \left[2\cos x - \cos(x+\pi) - \cos(x-\pi) \right] dx \\
&= \left[2\sin x - \sin(x+\pi) - \sin(x-\pi) \right]_0^{\pi} = 0.
\end{aligned}$$

Exemples [suite]

2. Calculer $I = \int_\Delta \frac{1}{(1+x+y+z)^3} dxdydz$ où
$$\Delta = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \text{ et } x+y+z \leq 1\right\}.$$
Une description hiérarchique du compact Δ est donné par :
$$\Delta = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x \in [0,1], y \in [0,1-x], \text{ et } z \in [0,1-x-y]\right\}.$$
D'où,
$$\begin{aligned}
I &= \int_{x=0}^{x=1} \left[\int_{y=0}^{y=1-x} \left(\int_{z=0}^{z=1-x-y} \frac{1}{(1+x+y+z)^3} dz\right) dy\right] dx \\
&= \frac{1}{2} \int_{x=0}^{x=1} \left[\int_{y=0}^{y=1-x} \left[\frac{-1}{(1+x+y+z)^2}\right]_{z=0}^{z=1-x-y} dy\right] dx \\
&= \frac{1}{2} \int_{x=0}^{x=1} \left(\int_{y=0}^{y=1-x} \left(\frac{1}{(1+x+y)^2} - \frac{1}{4}\right) dy\right) dx
\end{aligned}$$

Exemples [suite]

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{1}{2}\int_{x=0}^{x=1}\left[\frac{-1}{(1+x+y)} - \frac{y}{4}\right]_{y=0}^{y=1-x} dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \left(-\frac{1}{2} - \frac{1-x}{4} + \frac{1}{1+x}\right) dx = \frac{\ln 2}{2} - \frac{5}{16}.
\end{aligned}
$$

3. Calculer $I = \int_\Delta y dx dy dz$ où

$$\Delta = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq z \leq 1\right\}.$$

Une description hiérarchique du compact Δ est donné par :

$$\Delta = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}, x^2 + y^2 \leq z \leq 1\right\}.$$

$$
\begin{aligned}
\text{Donc,} \quad I &= \int_{x=0}^{x=1} \left[\int_{y=0}^{y=\sqrt{1-x^2}} y \left(\int_{z=x^2+y^2}^{z=1} dz \right) dy \right] dx \\
&= \int_{x=0}^{x=1} \left[\int_{y=0}^{y=\sqrt{1-x^2}} y \left([z]_{z=x^2+y^2}^{z=1} \right) dy \right] dx \\
&= \int_{x=0}^{x=1} \left[\int_{y=0}^{y=\sqrt{1-x^2}} y \left(1 - x^2 - y^2\right) dy \right] dx \\
&= \int_{x=0}^{x=1} \left[\int_{y=0}^{y=\sqrt{1-x^2}} \left[\left(1 - x^2\right) y - y^3 \right] dy \right] dx \\
&= \int_{x=0}^{x=1} \left(\left[\left(1 - x^2\right) \frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{4} \right]_{y=0}^{y=\sqrt{1-x^2}} \right) dx \\
&= \int_0^1 \left[\frac{\left(1 - x^2\right)^2}{2} - \frac{\left(1 - x^2\right)^2}{4} \right] dx = \frac{2}{15}.
\end{aligned}
$$

Propriétés des intégrales multiples

Soit Δ un compact de $\mathbb{R}^n$, $n = 2$ ou $n = 3$, f et g deux fonctions numériques continues sur Δ. Par la suite, pour simplifier les notations, on note $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $d\mathbf{x} = dx_1 dx_2 \ldots dx_n$.

Linéarité

Proposition 3.1

Pour tous réels λ et μ, on a

$$\int_\Delta [\lambda f(\mathbf{x}) + \mu g(\mathbf{x})]\, d\mathbf{x} = \lambda \int_\Delta f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \mu \int_\Delta g(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Positivité

Proposition 3.2

Si pour tout $y \in \Delta, f(\mathbf{x}) \geq 0$, alors $\quad \int_\Delta f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \geq 0.$

Monotonie

Proposition 3.3

Si pour tout $\mathbf{x} \in \Delta, f(\mathbf{x}) \leq g(\mathbf{x})$, alors $\quad \int_\Delta f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \leq \int_\Delta g(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$
En particulier, $\quad \left| \int_\Delta f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right| \leq \int_\Delta |f(\mathbf{x})|\, d\mathbf{x}.$

Inégalité de Cauchy-Schwarz

Proposition 3.4

$$\left(\int_\Delta f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})d\mathbf{x}\right)^2 \leq \left(\int_\Delta [f(\mathbf{x})]^2 \, d\mathbf{x}\right)\left(\int_\Delta [g(\mathbf{x})]^2 \, d\mathbf{x}\right).$$

Aires et volumes

Proposition 3.5

Si f est une constante égale à 1 sur Δ, alors

- *Pour $n = 2$,*
$$\int_\Delta dxdy = \textit{Aire}\,(\Delta)\,.$$
- *Pour $n = 3$,*
$$\int_\Delta dxdydz = \textit{Volume}\,(\Delta)\,.$$

Additivité selon les domaines

Proposition 3.6

Soit Δ_1 et Δ_2 deux compacts de $\mathbb{R}^2$ tel que :
Aire$(\Delta_1 \cap \Delta_2) = 0$ et f une fonction continue sur $\Delta_1 \cup \Delta_2$. Alors,

$$\int_{\Delta_1 \cup \Delta_2} f(x,y)dxdy = \int_{\Delta_1} f(x,y)dxdy + \int_{\Delta_2} f(x,y)dxdy.$$

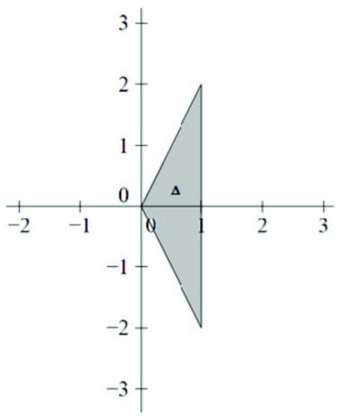
Exemple 2

Calculer

$$\int_{\Delta} xy^2 dxdy$$

où Δ est la partie bornée par l'axe des x positifs et les droites d'équations $y = 2x, y = -2x$ et $x = 1$.

Exemple 3



- *Si on représente le compact* Δ *sous la forme*

$$\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \in [0,1], -2x \leq y \leq 2x\},$$

Exemple 4

$$\text{alors, } \int_\Delta xy^2dxdy = \int_{x=0}^{x=1} x\left(\int_{y=-2x}^{y=2x} y^2dy\right)dx$$
$$= \int_0^1 x\left[\frac{y^3}{3}\right]_{y=-2x}^{y=2x} dx$$
$$= \frac{16}{3}\int_0^1 x^4dx = \frac{16}{15}.$$

- *Si l'on considère* Δ *comme réunion de deux compacts,* $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$ *avec*

$$\Delta_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y \in [0,2],\ \frac{y}{2} \leq x \leq 1\right\},$$
$$\Delta_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y \in [-2,0], \frac{-y}{2} \leq x \leq 1\right\},$$

Exemple 5

alors,

$$\begin{aligned}\int_{\Delta} xy^2 dxdy &= \int_{\Delta_1} xy^2 dxdy + \int_{\Delta_2} xy^2 dxdy \\ &= \int_0^2 y^2 \left(\int_{\frac{y}{2}}^1 xdx \right) dy + \int_{-2}^0 y^2 \left(\int_{-\frac{y}{2}}^1 xdx \right) dy.\end{aligned}$$

Dans ca cas, on a deux intégrales à calculer au lieu d'une seule intégrale.

Définition 4.1

Soit U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^n$ et $\varphi : U \longrightarrow V$ une application **différentiable** *sur U telle que*
$\forall \mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in U,\ \varphi(\mathbf{x}) = (\varphi_1(\mathbf{x}), \varphi_2(\mathbf{x}), \ldots, \varphi_n(\mathbf{x}))$.

- *On appelle* **matrice jacobienne de** φ *sur U, la matrice carrée d'ordre n définie par :*

$$J_\varphi(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} \in U.$$

- *On appelle* **jacobien de** φ *sur U, le déterminant de la matrice jacobienne de φ et on le note* $\det\left[J_\varphi(\mathbf{x})\right]$.

Définition 4.2

Soit U et V deux **ouverts** *de $\mathbb{R}^n$ et $\varphi : U \longrightarrow V$ une application. On dit que φ est un* **difféomorphisme** *de U sur V si φ vérifie les trois conditions suivantes :*

(i) φ *est* **bijective** *;*

(ii) φ *est de* **classe** C^1 *;*

(iii) φ^{-1} *est de* **classe** C^1.

Proposition 4.1

Soit U et V deux **ouverts** *de $\mathbb{R}^n$ et $\varphi : U \longrightarrow V$ une application. Pour que φ soit un* **difféomorphisme** *de U sur V, il faut et il suffit que φ soit bijective, de classe C^1 et que son* **jacobien** *ne s'annule pas sur U.*

Exemple 6

Soit $U = \{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 / r \in]0,1[\,,\ \theta \in]0,2\pi[\}$ *et* φ *l'application définie sur* U *par :*

$$\varphi(r,\theta) = (\varphi_1(r,\theta), \varphi_2(r,\theta)) = (r\cos\theta, r\sin\theta).$$

Montrons que φ *est un difféomorphisme de* U *sur* $\varphi(U)$.

- *Montrons que* φ *est de classe* C^1.
  Les fonctions, φ_1 *et* φ_2 *sont de classe* C^∞ *sur* U.
  Donc φ *est une fonction de classe* C^∞ *sur* U.
  D'où φ *est de classe* C^1.

Exemple 7

- *Montrons que φ est bijective.*
  Soit $(x,y) \in \varphi(U)$.

  $$(x,y) = \varphi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = r\cos\theta \\ \\ y = r\sin\theta. \end{cases}$$

  D'où, $\quad x^2 + y^2 = r^2.$
  Comme $r \in \left]0,1\right[$, *on déduit que*

  $$r = \sqrt{x^2+y^2}; \;\; \cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}; \;\; \sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

  Connaissant $\cos\theta$ *et* $\sin\theta$, *l'angle* θ *est défini à* 2π *près.*
  Or, dans U, $\theta \in \left]0,2\pi\right[$.
  Donc, $\forall (x,y) \in \varphi(U)$, $\exists! (r,\theta) \in U$ *tel que*
  $(x,y) = \varphi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$. *Donc, l'application* φ *est une bijection de* U *dans* $\varphi(U)$.

Exemple 8

- *Montrons que le jacobien de φ ne s'annule pas sur U. La matrice jacobienne de φ est donnée par :*

$$J_\varphi(r,\theta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Donc, $$\det\left[J_\varphi(r,\theta)\right] = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r.$$

Ce jacobien ne s'annule pas sur U. En vertu de la proposition (4.1), φ est un difféomorphisme de U sur $\varphi(U)$.

Théorème 4.1 (théorème de changement de variables)

Soient :

- ✓ *K un compact de $\mathbb{R}^n$,*
- ✓ *φ un* **difféomorphisme** *de $\overset{o}{K}$ sur $\varphi\left(\overset{o}{K}\right)$ ($\overset{o}{K}$ désigne l'intérieur de K),*
- ✓ *f une fonction continue sur $\varphi(K) = \Delta$.*

Alors, on a

$$\int_{\Delta} f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \int_{K} (f o \varphi)(\mathbf{y}) \left|\det\left[J_{\varphi}(\mathbf{y})\right]\right| d\mathbf{y}. \tag{6}$$

Remarque 4.1

1. *On utilise le changement de variables soit pour s'implifier les compacts, soit pour s'implifier les calculs.*
2. *Si $n = 1$ (c.à.d on se place dans $\mathbb{R}$), la formule de changement de variables pour les intégrales simples est un cas particulier de la formule énoncée dans le théorème 4.1.*

Remarque 4.2

En effet, soit $\varphi : [\alpha, \beta] \longrightarrow \varphi([\alpha, \beta])$ *une fonction bijective de classe* C^1 *sur* $[\alpha, \beta]$.
Cette notion correspond à celle de φ *difféomorphisme de* $]\alpha, \beta[$ *sur* $\varphi(]\alpha, \beta[)$.
Soit f *une fonction continue sur* $\varphi([\alpha, \beta])$
et posons $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$.
Considérons le changement de variable $x = \varphi(t)$. *On a*

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx &= \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx \\
&= \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f[\varphi(t)]\, \varphi'(t)dt \\
&= \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f[\varphi(t)] \det\left[J_\varphi(t)\right] dt,
\end{aligned}$$

car pour une fonction φ *de* $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $J_\varphi(t) = \varphi'(t)$
et $\det\left[J_\varphi(t)\right] = \varphi'(t)$.

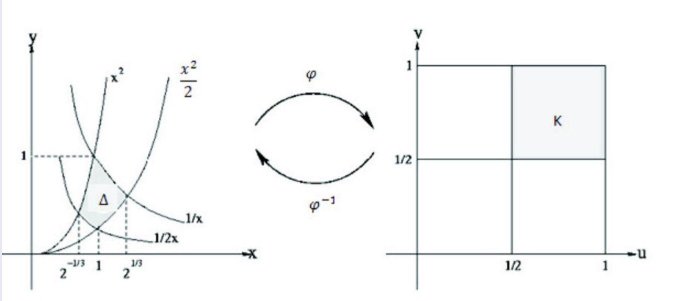
Exemple 9

1. *Calculer* $\int_\Delta (x+y)\,dxdy$ *où* Δ *est le compact délimité par deux paraboles et deux hyperboles.*

$$\Delta = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / \frac{x^2}{2} \leq y \leq x^2, \frac{1}{2x} \leq y \leq \frac{1}{x} \right\}.$$

Faisons le changement de variables suivant :

$$(u,v) = \phi(x,y) = \left(\frac{y}{x^2}, xy\right).$$



Exemple 10

Pour pouvoir appliquer la formule de changement de variables, nous devons calculer $\varphi = \phi^{-1}$, $K = \phi(\Delta)$ *et le jacobien de* φ.

- *Calcul de* $\varphi = \phi^{-1}$. *Pour cela, on résoud le système*

$$\begin{cases} u = \frac{y}{x^2} \\ v = xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = u^{-1/3}v^{1/3} \\ y = u^{1/3}v^{2/3}. \end{cases}$$

  D'où,

$$(x,y) = \varphi(u,v) = (\varphi_1(u,v), \varphi_2(u,v)) = \left(u^{-1/3}v^{1/3}, u^{1/3}v^{2/3}\right).$$

- *Calcul de* $K = \varphi^{-1}(\Delta) = \phi(\Delta)$. *Pour cela, on remplace* x *et* y *par leur expression en fonction de* u *et* v *dans les inégalités qui définissent le compact* Δ.

Exemple 11

$$D'où,\ \ K \ = \ \left\{(u,v)\in\mathbb{R}^2 / \frac{\left(u^{-1/3}v^{1/3}\right)^2}{2} \le u^{1/3}v^{2/3} \le \left(u^{-1/3}v^{1/3}\right)^2, \right.$$

$$\left. \frac{1}{2u^{-1/3}v^{1/3}} \le u^{1/3}v^{2/3} \le \frac{1}{u^{-1/3}v^{1/3}} \right\}$$

$$= \ \left\{(u,v)\in\mathbb{R}^2 / \frac{1}{2} \le u \le 1, \frac{1}{2} \le v \le 1\right\} = \left[\frac{1}{2},1\right] \times \left[\frac{1}{2},1\right].$$

- *Calcul du jacobien de φ. On a*

$$\det\left[J_\varphi(u,v)\right] = \left|\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}\right| = \begin{vmatrix} -\frac{u^{-\frac{4}{3}}v^{\frac{1}{3}}}{3} & \frac{u^{-\frac{1}{3}}v^{\frac{-2}{3}}}{3} \\ \frac{u^{-\frac{2}{3}}v^{\frac{2}{3}}}{3} & \frac{2u^{\frac{1}{3}}v^{\frac{-1}{3}}}{3} \end{vmatrix} = -\frac{1}{3u} \neq 0.$$

φ est bijective, de classe C^1 sur $\left]\frac{1}{2},1\right[\times \left]\frac{1}{2},1\right[$ *et* $\det\left[J_\varphi(u,v)\right] \neq 0.$

Exemple 12

Donc, d'après la proposition 4.1, φ *est un difféomorphisme de* $\left]\frac{1}{2},1\right[\times\left]\frac{1}{2},1\right[$ *sur* $\varphi\left(\left]\frac{1}{2},1\right[\times\left]\frac{1}{2},1\right[\right)$.
Calculons maintenant la valeur de $\int_\Delta (x+y)\,dxdy$.

$$\begin{aligned}
\int_\Delta (x+y)\,dxdy &= \int_K \left(u^{-\frac{1}{3}}v^{\frac{1}{3}} + u^{\frac{1}{3}}v^{\frac{2}{3}}\right)\left|\det\left[J_\varphi(u,v)\right]\right| dudv \\
&= \int_K \left(u^{-\frac{1}{3}}v^{\frac{1}{3}} + u^{\frac{1}{3}}v^{\frac{2}{3}}\right)\frac{1}{3u}dudv \\
&= \frac{1}{3}\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left[\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(u^{-\frac{4}{3}}v^{\frac{1}{3}} + u^{\frac{-2}{3}}v^{\frac{2}{3}}\right)du\right]dv \\
&= \frac{1}{3}\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1} u^{-\frac{4}{3}}du\right)\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1} v^{\frac{1}{3}}dv\right) \\
&\qquad + \frac{1}{3}\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1} u^{-\frac{2}{3}}du\right)\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1} v^{\frac{2}{3}}dv\right) \\
&= \frac{3}{4}\left(-1+2^{\frac{1}{3}}\right)\left(1-2^{-\frac{4}{3}}\right) + \frac{3}{5}\left(1-2^{-\frac{1}{3}}\right)\left(1-2^{-\frac{5}{3}}\right).
\end{aligned}$$

Exemple 13

1. *Calculer le volume intérieur à l'ellipsoïde d'équation*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

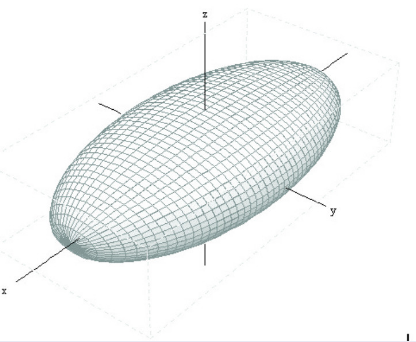


FIGURE – Ellipsoïde avec a=4, b=2 et c=1

Exemple 14

où a, b et c sont des réels strictement positifs. Notons E cette ellipsoïde. On a

$$E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\}.$$

Effectuons le changement de variables suivant :

$$(x, y, z) = \varphi(u, v, w) = (\varphi_1(u, v, w), \varphi_2(u, v, w), \varphi_3(u, v, w)),$$

avec

$$\varphi_1(u, v, w) = au, \ \varphi_2(u, v, w) = bv, \ \varphi_3(u, v, w) = cw,$$

$$(x, y, z) \in E \ \Leftrightarrow \ (u, v, w) \in B = \left\{ (u, v, w) \in \mathbb{R}^3 / u^2 + v^2 + w^2 = 1 \right\}.$$

On vérifie que φ est une bijection de classe C^1 sur $\overset{o}{B}$. Comme

$$\det \left[J_\varphi(u, v, w) \right] = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = abc \neq 0,$$

Exemple 15

alors, φ *définit un difféomorphisme de* $\overset{o}{B}$ *vers* $\varphi\left(\overset{o}{B}\right) = \overset{o}{E}$*. La formule (6) de changement de variables donne*

$$\begin{aligned} \int_E dxdydz &= abc \int_B dudvdw = abc \times \text{volume de la boule unité} \\ &= \frac{4abc\pi}{3}. \end{aligned}$$

Exemple 16

1. *Calculer* $\int_\Delta \frac{z^3}{(y+z)(x+y+z)}dxdydz$ *où,*

$$\Delta = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x+y+z \leq 1\}.$$

Posons

$$x+y+z = u, v = y+z, z = w$$

$$\Leftrightarrow$$

$$(x,y,z) = \varphi(u,v,w) = (u-v, v-w, w).$$

Le jacobien de φ *est donné par :*

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

On vérifie facilement que φ *est une bijection de classe* C^1

Exemple 17

Donc, d'après la proposition 4.1, φ est un difféomorphisme de $\overset{o}{K}$ sur $\varphi\left(\overset{o}{K}\right) = \overset{o}{\Delta}$ où $\quad K = \{(u,v,w) \in \mathbb{R}^3 /\ u \in [0,1]\,, v \in [0,u]\,, w \in [0,v]\}$.
Par application de la formule (6) de changement de variables, on déduit que

$$\begin{aligned}
\int_\Delta \frac{z^3}{(y+z)(x+y+z)} dxdydz &= \int_K \frac{w^3}{uv} dudvdw \\
&= \left(\int_0^1 \frac{1}{u} \int_0^u \left(\frac{1}{v} \int_0^v w^3 dw \right) dv \right) du \\
&= \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{1}{u} \left(\int_0^u \left(v^3\right) dv \right) du \\
&= \frac{1}{16} \int_0^1 u^3 du \\
&= \frac{1}{64}.
\end{aligned}$$

Changement de variables en coordonnées polaires (intégrale double)