UNIVERSITE MOHAMMED PREMIER
ECOLE NATIONALE DES SCIENCES APPLIQUEES
OUJDA-MAROC

Filière : STPI-CP2 — Année universitaire : 2014 - 2015
Module : Analyse 4 — Enseignant : M. Derouich

Fiche TD $N°$: 1

Exercice 1. : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, impaire, 2π-périodique et égale à $\pi - x$ pour $x \in]0, \pi[$ et soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, paire, 2π-périodique et égale à $\pi - x$ sur $[0, \pi]$.

1) Représenter et développer f en série de Fourier. La série obtenue converge-t-elle uniformément sur $[-\pi, \pi]$?

2) Représenter et développer g en série de Fourier. La série obtenue converge-t-elle uniformément sur $[-\pi, \pi]$?

3) Que constatez-vous ? Calculer la somme $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{(2n+1)^2}$.

Exercice 2. : Développer en série de Fourier la fonction f, 2π-périodique sur $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = e^x$ pour $x \in [-\pi, \pi[$. En déduire la valeur des sommes suivantes :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}.$$

Exercice 3. : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction 2π-périodique, impaire définie sur $[0, \pi]$ par : $f(x) = x(\pi - x)$.

1) Déterminer la série de Fourier associée à f.

2) Donner l'expression de f dans l'intervalle $[2\pi, 3\pi]$.

3) Quelles sommes de séries numériques peut-on en déduire ?

Exercice 4. : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction 2π-périodique définie sur $]0, 2\pi[$ par : $f(x) = e^{ax}$ avec $a \neq 0$.

1) Donner le développement en série de Fourier de la fonction f.

2) Calculer $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a}{a^2+n^2}$ et en déduire $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$.

3) Que vaut $\lim\limits_{a \longrightarrow +\infty} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a}{a^2+n^2}$?

Exercice 5. : Soit f la fonction 2π-périodique impaire et égale à 1 sur $]0,\pi[$.

1) Dessiner la courbe représentative de f sur $]-3\pi,3\pi[$.

2) Calculer les coefficients de Fourier réels de f.

3) Etudier la convergence simple et uniforme de la série de Fourier de f.

4) Déterminer $\sum\limits_{p=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^p}{(2p+1)}$ et $\sum\limits_{p=0}^{\infty} \dfrac{1}{(2p+1)^2}$.

5) Calculer $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ et $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^2}$.

Exercice 6. : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, 2π-périodique et telle que :

$$f(x) = \pi^2 - x^2,\ x \in]-\pi;\pi[.$$

1) Dessiner cette fonction sur l'intervalle $[-2\pi;2\pi]$.

2) Calculer les coefficients de Fourier de f. En déduire la série de Fourier de f. La série obtenue converge-t-elle uniformément sur $\mathbb{R}$?

3) En déduire les sommes des séries suivantes :

$$S = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2};\ T = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2};\ U = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^4}.$$

Exercice 7. : Soit f la fonction 2π-périodique définie par : $f(x) = e^{-x}$, $x \in\ ]-\pi,\pi[$.

1) Représenter la fonction f sur l'intervalle $[-3\pi,3\pi]$. Donner l'expression de f dans l'intervalle $]4\pi,5\pi[$.

2) Calculer les coefficients de Fourier complexes de la fonction f.

3) Donner les coefficients de Fourier réels de la fonction f.

4) Etudier la convergence de la série de Fourier de f et préciser sa somme.

5) Déterminer la valeur des séries

$$S = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{1+k^2},\ T = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+k^2},\ U = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{1+k^2}.$$