UNIVERSITE MOHAMMED PREMIER
ECOLE NATIONALE DES SCIENCES APPLIQUEES
OUJDA-MAROC

Filière : STPI-CP2 — Année universitaire : 2014 - 2015

Module : Analyse 4 — Enseignant : M. Derouich

Fiche TD $N°$: 1

Exercice 1. : **Exercice 1 :** Résoudre les systèmes différentiels suivants :

$$(S_1)\quad \begin{cases} x' = x + y - z \\ y' = 2x + 3y - 4z \\ z' = 4x + y - 4z, \end{cases} \qquad (S_2)\quad \begin{cases} x' = x + 2y - z \\ y' = 2x + 4y - 2z \\ z' = -x - 2y + z. \end{cases}$$

Exercice 2 : Donner les solutions complexes et réelles du système différentiel :

$X' = AX$ lorsque

$$1)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad 2)\ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -2 \\ 2 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

Exercice 3 : On considère les systèmes différentiels suivants :

$$(S_1)\quad \begin{cases} x' = 2y + 2z \\ y' = -x + 2y + 2z \\ z' = -x + y + 3z. \end{cases} \qquad (S_2)\quad \begin{cases} x' = -6x + 5y + 3z \\ y' = -8x + 7y + 4z \\ z' = -2x + y + z. \end{cases}$$

1) Résoudre les systèmes différentiels (S_1) et (S_2).

2) En déduire l'expression de l'unique solution x, y, z du système (S_1) satisfaisant les conditions initiales $x(0) = y(0) = z(0) = 1$.

Exercice 4 : Résoudre le système différentiel suivant :

$$(S)\quad \begin{cases} x' = -4x + y + z \\ y' = x - y - 2z \\ z' = -2x + y - z. \end{cases} \quad , \quad \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5 : 1) On définit l'exponentielle d'une matrice carrée A comme

$$e^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!} = I + A + \frac{A^2}{2!} + \cdots$$

où I est la matrice identité. On suppose en plus que la matrice A est diagonalisable et on note $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, ses valeurs propres. Posons $A = PDP^{-1}$ où D est la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, et P la matrice de passage de la base canonique à la base constituée des vecteurs propres de A. Montrer que

$$e^A = Pe^D P^{-1},$$

où e^D est la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont $e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}, \ldots, e^{\lambda_n}$.

2) On considère le système différentiel (S_1) suivant :

$$(S_1) \quad \begin{cases} x' = -2x + y \\ y' = x - 2y \end{cases}, \quad \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1) Résoudre le système différentiel (S_1).

2) Calculer la matrice carrée e^{tA}. Vérifier que la solution du système (S_1) est égale à $e^{tA} \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix}$.

3) Utiliser la méthode de la question 2) pour résoudre le système suivant :

$$(S_2) \quad \begin{cases} x' = -2y - z, \\ y' = 2x + z, \\ z' = x - y, \end{cases} \quad \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6 : Soit (S) le système différentiel avec second membre

$$(S) \quad \begin{cases} x' = x + 8y + e^t \\ y' = 2x + y + e^{-3t}. \end{cases}$$

1) Déterminer la solution générale du système linéaire associé à (S).

2) Déterminer la solution particulière du système linéaire (S) pour les conditions initiales $x(0) = 0$, $y(0) = 1$.

3) Déterminer la solution générale du système (S).

Exercice 7 : Résoudre le système différentiel linéaire avec second membre,

$$(S) \quad \begin{cases} x' = y + z + t \\ y' = x + t^2 e^{-t} \\ z' = x + y + z + te^t. \end{cases}$$

Exercice 8 : Résoudre le système différentiel linéaire avec second membre,

$$(S)\quad \left\{\begin{array}{l} x' = 2x - y + 2z + 1 \\ y' = 10x - 5y + 7z - e^t \\ z' = 4x - 2y + 2z + 2e^t, \end{array}\right. \qquad \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 9 : Résoudre les systèmes d'équations différentielles suivantes :

$$(S_1)\quad \left\{\begin{array}{l} x' + y' - y = \sin t \\ x' - y' + x = t, \end{array}\right. \quad , \quad (S_2)\quad \left\{\begin{array}{l} x'' - x' + y = 0 \\ y'' - y + x = 0. \end{array}\right.$$

Exercice 10 : Résoudre les équations différentielles suivantes :

1) $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0.$ 2) $y^{(4)} - 6y'' + 8y' - 3y = e^x.$

UNIVERSITE MOHAMMED PREMIER
ECOLE NATIONALE DES SCIENCES APPLIQUEES
OUJDA-MAROC

Filière : STPI-CP2
Module : Analyse 4

Année universitaire : 2014 - 2015
Enseignants :A. Kissami & M. Derouich

Correction TD N° : 2

Exercice 1 : La matrice associé au système (S_1) est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \\ 4 & 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Son polynôme caractéristique est

$$P(\lambda) = -(\lambda + 3)(\lambda - 1)(\lambda - 2).$$

Les valeurs propres de A sont simples. Donc, A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$. Les vecteurs propres associés respectivement aux valeurs propres -3, 1 et 2 sont :

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 11 \end{pmatrix}, \ u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

D'où, la solution générale du système (S_1) est

$$Y(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = ae^{-3t}u_1 + be^{t}u_2 + ce^{2t}u_3, \ \ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3.$$

Donc,

$$\begin{cases} x(t) = ae^{-3t} + be^{t} + ce^{2t} \\ y(t) = 7ae^{-3t} + be^{t} + 2ce^{2t} \\ z(t) = 11ae^{-3t} + be^{t} + ce^{2t}. \end{cases}$$

La matrice associé au système (S_2) est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Son polynôme caractéristique est

$$P(\lambda) = \lambda^2 (\lambda - 6).$$

Les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = 0$ (double) et $\lambda_2 = 6$ (simple). On trouve que la dimension de ker(A) est égale à 2. Donc, A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$. Les vecteurs propres associés respectivement aux valeurs propres 0 et 6 sont :

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

D'où, la solution générale du système (S_2) est

$$Y(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = ae^{0t}u_1 + be^{0t}u_2 + ce^{6t}u_3, \;\; (a,b,c) \in \mathbb{R}^3.$$

Donc,

$$\begin{cases} x(t) = a + 2b + ce^{6t} \\ y(t) = -b + 2ce^{6t} \\ z(t) = a - ce^{6t}, \;\; (a,b,c) \in \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

Exercice 2 : 1) Les valeurs propres de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sont 2, $1+i$ et $1-i$. Les vecteurs propres associés respectivement àaux valeurs propres 2, $1+i$ et $\overline{1+i} = 1-i$ sont :

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -i \end{pmatrix} \text{ et } u_3 = \overline{u_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ i \end{pmatrix}.$$

Les solutions dans $\mathbb{C}$ sont données par :

$$\begin{aligned} X(t) &= \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \alpha e^{2t}u_1 + \beta e^{(1+i)t}u_2 + \gamma e^{\overline{(1+i)}t}\overline{u_2} \\ &= \alpha e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta e^{(1+i)t} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -i \end{pmatrix} + \gamma e^{(1-i)t} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -i \end{pmatrix}, \;\; (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3. \end{aligned}$$

Les solutions dans $\mathbb{R}$ sont données par :

$$\begin{aligned} X(t) &= \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = ae^{2t}u_1 + bRe\left[e^{(1+i)t}u_2\right] + cIm\left[e^{(1+i)t}u_2\right] \\ &= ae^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + be^t\begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \\ \sin t \end{pmatrix} + ce^t\begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \\ -\cos t \end{pmatrix},\ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

Soit

$$\begin{cases} x(t) = ae^{2t} + be^t \cos t + ce^t \sin t \\ y(t) = ae^{2t} - be^t \sin t + ce^t \cos t \\ z(t) = ae^{2t} + be^t \sin t - ce^t \cos t,\ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

Exercice 3 : Le système (S_2) s'écrit

$$X'(t) = AX(t),$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 5 & 3 \\ -8 & 7 & 4 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de A est

$$P(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)^2.$$

Donc, A admet deux valeurs propres $\lambda_1 = 0$ (simple) et $\lambda_2 = 1$ (double).

- Un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda_1 = 0$ est $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

- Vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda_2 = 1$. Soit $u_2 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé à $\lambda_2 = 1$. On a

$$\begin{aligned} Au_2 &= \lambda_2 u_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -6 & 5 & 3 \\ -8 & 7 & 4 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -7\alpha + 5\beta + 3\gamma = 0, \\ -8\alpha + 6\beta + 4\gamma = 0 \\ -2\alpha + \beta = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Donc, $\beta = 2\alpha$ et $\gamma = -\alpha$. On prend comme vecteur propre associé à la valeur propre 1, le vecteur $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. $\ker(A - I)$ est de dimension 1. Donc, A n'est pas diagonalisable. Elle est trigonalisable. On complète les vecteurs libres u_1 et u_2 par un troisième vecteur pour former une base $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ de $\mathbb{R}^3$. On prend $u_3 = e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. On vérifie que

$$\det\left((u_1, u_2, u_3)\right) = 2 \neq 0.$$

Donc, $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$. On va maintenant exprimer Au_3 en fonction de u_1, u_2 et u_3. Nous avons

$$\begin{cases} u_1 = e_1 + 2e_3 \\ u_2 = e_1 + 2e_2 - e_3 \\ u_3 = e_3. \end{cases}$$

D'où,

$$\begin{aligned} e_1 &= u_1 - 2u_3, \; e_2 = \frac{-u_1 + u_2 + 3u_3}{2}, \;\text{ et }\; u_3 = e_3, \\ \\ Au_3 &= Ae_3 = 3e_1 + 4e_2 + e_3 = u_1 + 2u_2 + u_3. \end{aligned}$$

La matrice A dans la nouvelle base $\mathcal{B}'$ est donc

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice de passage de la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ à la base $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ est

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On résout maintenant le système $Z' = TZ$, avec $Z = \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \end{pmatrix}$ soit

$$\begin{cases} z_1' = & z_3, \\ z_2' = & z_2 + 2z_3, \\ z_3' = & z_3. \end{cases}$$

La troisième équation a pour solution générale,

$$z_3 = k_1 e^t,\ k_1 \in \mathbb{R}.$$

En portant dans la deuxième et la première équation, on obtient,

$$z_2' = z_2 + 2k_1 e^t,$$

qui admet la solution générale,

$$z_2 = (k_2 + 2k_1 t)\, e^t,\ k_2 \in \mathbb{R}.$$

$$z_1' = k_1 e^t,$$

qui admet la solution générale,

$$z_1 = k_1 e^t + k_3,\ k_3 \in \mathbb{R}.$$

Finalement,

$$Z(t) = \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 e^t + k_3 \\ (k_2 + 2k_1 t)\, e^t \\ k_1 e^t \end{pmatrix},\quad (k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{R}^3.$$

La solution générale du système est donnée alors par :

$$\begin{aligned} Y(t) &= \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ x(t) \end{pmatrix} = PZ(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 e^t + k_3 \\ (k_2 + 2k_1 t)\, e^t \\ k_1 e^t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} k_1 e^t + k_3 + (k_2 + 2k_1 t)\, e^t \\ 2\,(k_2 + 2k_1 t)\, e^t \\ 2\left(k_1 e^t + k_3\right) - (k_2 + 2k_1 t)\, e^t + k_1 e^t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} k_3 + (k_1 + k_2 + 2k_1 t)\, e^t \\ 2\,(k_2 + 2k_1 t)\, e^t \\ 2k_3 + (3k_1 - k_2 - 2k_1 t)\, e^t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Exercice 4 : La matrice dusystème différentiel est donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de A est donné par :

$$P(\lambda) = -\left(\lambda + 2\right)^3.$$

Donc, A admet $\lambda = -2$ comme valeur propre d'ordre 3. La solution générale du système passant par $Y(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ est alors

$$\begin{aligned} Y(t) &= \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \left[e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{2} \frac{t^k}{k!} (A - \lambda I)^k \right] Y(0) \\ &= e^{-2t} \left[I + t(A+2I) + \frac{t^2}{2} (A+2I)^2 \right] Y(0). \end{aligned}$$

Nous avons,

$$\begin{aligned} I &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ (A+2I) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & +1 \end{pmatrix}, \\ (A+2I)^2 &= \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

D'où,

$$\begin{aligned} Y(t) &= e^{-2t} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{t^2}{2} \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \\ &= e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 - 2t + \frac{3t^2}{2} & t & t - \frac{3t^2}{2} \\ t + \frac{3t^2}{2} & 1 + t & -2t - \frac{3t^2}{2} \\ -2t + \frac{3t^2}{2} & t & 1 + t - \frac{3t^2}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \\ &= e^{-2t} \begin{pmatrix} \left(1 - 2t + \frac{3t^2}{2}\right) x_0 + t y_0 + \left(t - \frac{3t^2}{2}\right) z_0 \\ \left(t + \frac{3t^2}{2}\right) x_0 + (1+t) y_0 - \left(2t + \frac{3t^2}{2}\right) z_0 \\ \left(-2t + \frac{3t^2}{2}\right) x_0 + t y_0 + \left(1 + t - \frac{3t^2}{2}\right) z_0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

<u>Exercice 5 :</u> 1) Par récurrence, on montre que

$$A^k = P D^k P^{-1}, \ k \in \mathbb{N},$$

où,

$$D^k = diag\left(\lambda_1^k, \lambda_2^k, \cdots, \lambda_n^k\right) = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n^k \end{pmatrix}.$$

D'où,

$$e^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!} = P\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{D^k}{k!}\right) P^{-1} = Pe^D P^{-1},$$

avec,

$$e^D = diag\left(e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}, \cdots, e^{\lambda_n}\right) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}.$$

2) La matrice associé au système différentiel (S_1) est

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

On a $spect(A) = \{-1, -3\}$. $\ker(A + I)$ est engendré par le vecteur $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\ker(A + 3I)$ est engendré par le vecteur $u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. La solution du système (S_1) est donnée par :

$$\begin{aligned} Y(t) &= \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \alpha e^{-t} u_1 + \beta e^{-3t} u_2 \\ &= \alpha e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta e^{-3t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

Soit

$$\begin{cases} x(t) = \alpha e^{-t} - \beta e^{-3t} \\ \\ y(t) = \alpha e^{-t} + \beta e^{-3t}, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

Pour chercher α et β, on résout le système

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Comme

$$P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

alors,

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Donc, la solution générale qui satisfait $Y(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est donnée par :

$$\begin{cases} x(t) = \frac{3}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-3t} \\ \\ y(t) = \frac{3}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-3t}. \end{cases}$$

2) Nous avons

$$\begin{aligned} P &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},\ e^{tD} = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-3t} \end{pmatrix}. \\ e^{tA} &= Pe^{tD}P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-3t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{-t}+e^{-3t} & e^{-t}-e^{-3t} \\ e^{-t}-e^{-3t} & e^{-t}+e^{-3t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Nous avons

$$\begin{aligned} e^{tA}Y(0) &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{-t}+e^{-3t} & e^{-t}-e^{-3t} \\ e^{-t}-e^{-3t} & e^{-t}+e^{-3t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{3}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-3t} \\ \\ \frac{3}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-3t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Donc, la solution du système (S_1) est égale à $e^{tA}\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix}$.

3) D'après 1), la solution du système (S_2) est donnée par :

$$e^{tA}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix},\ \text{avec } A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de la matrice A est $P(\lambda) = -\lambda^3 - 6\lambda$. Les valeurs propres sont 0, $i\sqrt{6}$ et $-i\sqrt{6}$. un vecteur propre associé à $\lambda = 0$ est $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Un vecteur propre associé à la valeur propre $i\sqrt{6}$ est $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Le vecteur propre associé

<u>Exercice 6 :</u> Le système (S_1) s'écrit

$$\begin{aligned} Y'(t) &= \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = AY(t) + B(t) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^t \\ e^{-3t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La matrice A admet deux valeurs propres -3 et 5. Donc elle est diagonalisable.

• Le sous espace propre associé à la valeur propre -3 est engendré par le vacteur $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

• Le sous espace propre associé à la valeur propre 5 est engendré par le vacteur $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Nous avons

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = P^{-1}AP$$

avec

$$P = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \ P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Posons $Z = P^{-1}Y$. Z est solution du système

$$Z' = DZ + C(t)$$

avec

$$C(t) = P^{-1}B(t) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} e^t + 2e^{-3t} \\ -e^t + 2e^{-3t} \end{pmatrix}.$$

Après résolution, on obtient

$$Z(t) = \begin{pmatrix} \alpha e^{5t} - \frac{1}{16}e^t - \frac{1}{16}e^{-3t} \\ \beta e^{-3t} - \frac{1}{16}e^t + \frac{1}{2}te^{-3t} \end{pmatrix}.$$

Finalement,

$$Y(t) = \alpha \begin{pmatrix} 2e^{5t} \\ e^{5t} \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -2e^{-3t} \\ e^{-3t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -te^{-3t} - \frac{1}{8}e^{-3t} \\ -\frac{1}{8}e^{t} + \frac{t}{2}e^{-3t} - \frac{1}{16}e^{-3t} \end{pmatrix}$$

Exercice 7 : La matrice associée au système est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\mathrm{Spec}(A) = \{-1, 0, 2\}$. A est diagonalisable.

- Le sous espace propre associé à la valeur propre $\lambda = -1$ est engendré par $u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
- Le sous espace propre associé à la valeur propre $\lambda = 0$ est engendré par $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$
- Le sous espace propre associé à la valeur propre $\lambda = 2$ est engendré par $u_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Exercice 8 : La matrice associée au système est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 10 & -5 & 7 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

$det(A - \lambda I) = -\lambda^2(\lambda + 1)$

- Le sous espace propre associé à la valeur propre $\lambda = 0$ est engendré par $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- Le sous espace propre associé à la valeur propre $\lambda = -1$ est engendré par $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

La matrice n'est pas diagonalisable.

Exercice 9 : Le systèmr (S_1) est équivalent au système

$$(S_1') \quad \begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}(t+\sin t) \\ y' = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}(-t+\sin t). \end{cases}$$

Posons

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, B(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(t+\sin t) \\ \frac{1}{2}(-t+\sin t) \end{pmatrix}, \ A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Le système (S_1') s'écrit alors

$$X'(t) = AX(t) + B(t).$$

$det(A - \lambda I) = \lambda^2 - \frac{1}{2}$. Les valeurs propres de A sont $\lambda = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. A est diagonalisable.

• Le sous espace propre associé à la valeur propre $\lambda = \frac{\sqrt{2}}{2}$ est engendré par $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

• Le sous espace propre associé à la valeur propre $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ est engendré par $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-\sqrt{2} \end{pmatrix}$

Les solutions du système homogène sont donc de la forme

$$X(t) = \alpha u_1 e^{\frac{\sqrt{2}}{2}t} + \beta u_1 e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}t}, \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Comme

$$\begin{aligned} B(t) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \sin t \\ &= v_1 t + v_2 \sin t, \end{aligned}$$

alors la solution particulière $Z(t)$ du système (S_1') s'écrit comme

$$Z(t) = U_1 t^2 + U_2 t + U_3 + V_1 \sin t + V_2 \cos t,$$

où U_1, U_2, U_3, V_1 et V_2 sont des vecteurs de $\mathbb{R}^2$ que nous allons déterminer. Nous avons

$$\begin{aligned} B(t) &= Z'(t) - AZ(t) = -AU_1t^2 + (2U_1 - AU_2) + \\ &\quad + (U_2 - AU_3) + (V_1 - AV_2)\cos t - (V_2 + AV_1)\sin t. \end{aligned}$$

D'où,

$$\begin{cases} AU_1 = 0 \\ 2U_1 - AU_2 = v_1 \\ U_2 - AU_3 = 0 \\ V_1 - AV_2 = 0 \\ V_2 + AV_1 = -v_2. \end{cases}$$

La solution générale du système est

$$\begin{cases} x(t) = k_1 e^{\frac{\sqrt{2}}{2}t} + k_2 e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}t} + t - 1 - \dfrac{1}{3}\cos t \\ \\ y(t) = \left(1+\sqrt{2}\right) k_1 e^{\frac{\sqrt{2}}{2}t} + \left(1-\sqrt{2}\right) k_2 e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}t} + 1 - \dfrac{1}{3}\sin t - \dfrac{1}{3}\cos t \end{cases}$$

où k_1 et k_2 sont des constantes réelles.

Exercice 10 :

1) Posons

$$Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix} \implies Y'(t) = \begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \\ y_3'(t) \end{pmatrix}.$$

L'équation différentielle proposée est équivalente au système

$$Y'(t) = AY(t)$$

où A est la matrice carrée

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de A est

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = -\left(\lambda - 1\right)^3.$$

La solution du système est donc donnée sous la forme

$$Y(t) = \left(U_0 + U_1 t + U_2 t^2\right) e^t$$

où U_0, U_1 et U_2 sont des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ que nous allons préciser. Nous avons

$$\begin{aligned} Y'(t) &= \left[(U_0 + U_1) + (U_0 + 2U_1)\, t + U_2 t^2\right] \\ &= \left(AU_0 + AU_1 t + AU_2 t^2\right) e^t. \end{aligned}$$

D'où,

$$\begin{cases} AU_2 = U_2 \\ AU_1 = U_1 + 2U_2 \\ AU_0 = U_0 + U_1. \end{cases}$$

La résolution de ce sysème donne

$$\begin{cases} U_2 = (k_2, k_2, k_2)\,,\, k_2 \in \mathbb{R} \\ U_1 = (k_1, k_1 + 2k_2, k_1 + 4k_2)\,,\, k_1 \in \mathbb{R} \\ U_0 = (k_0, k_0 + k_1, k_0 + 2k_1 + 2k_2)\,,\, k_0 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Les solutions du système (S') sont donc

$$Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix} = Y(t) = \begin{pmatrix} \left(k_0 + k_1 t + k_2 t^2\right) e^t \\ \left(k_0 + k_1 + (k_1 + 2k_2)\, t + k_2 t^2\right) e^t \\ \left(k_0 + 2k_1 + 2k_2 + (k_1 + 4k_2)\, t + k_2 t^2\right) e^t, \end{pmatrix}$$

où k_0, k_1 et k_2 sont des réels. La solution de l'équation différentielle est alors

$$y(t) = \left(k_0 + k_1 t + k_2 t^2\right) e^t, \quad (k_0, k_1, k_2) \in \mathbb{R}^3.$$

2) Les solutions de l'équation différentielle proposée est donnée par :

$$y(t) = k_1 e^{-3t} + \left(\frac{t^3}{24} + k_2 t^2 + k_3 t + k_4\right) e^t, \quad (k_1, k_2, k_3, k_4) \in \mathbb{R}^4.$$