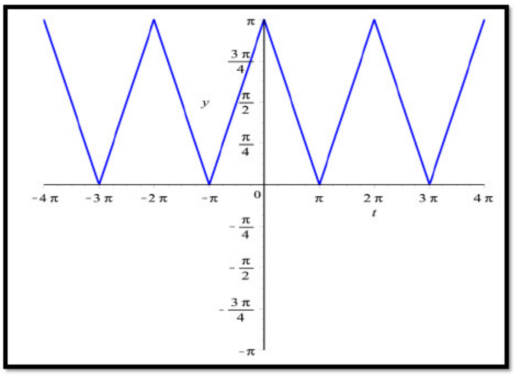
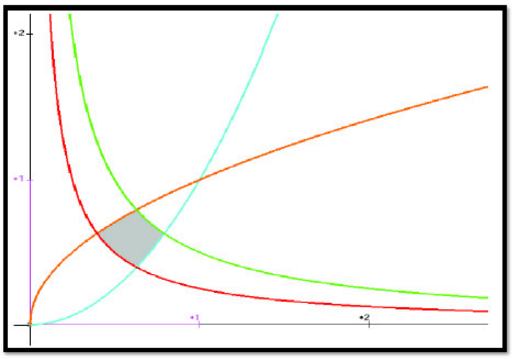
UNIVERSITE MOHAMMED PREMIER
ECOLE NATIONALE DES SCIENCES APPLIQUEES
OUJDA-MAROC

ANALYSE IV : EXERCICES

STPI-CP2





A. Kissami & M. Derouich

Année universitaire : 2014 - 2015

Table des matières

Chapitre 1

SÉRIES DE FOURIER

Exercice 1 : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, impaire, 2π-périodique et égale à $\pi - x$ pour $x \in]0, \pi[$ et soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, paire, 2π-périodique et égale à $\pi - x$ sur $[0, \pi]$.

1) Représenter et développer f en série de Fourier. La série obtenue converge-t-elle uniformément sur $[-\pi, \pi]$?

2) Représenter et développer g en série de Fourier. La série obtenue converge-t-elle uniformément sur $[-\pi, \pi]$?

3) Que constatez-vous ? Calculer la somme $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

Exercice 2 : Développer en série de Fourier la fonction f, 2π-périodique sur $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = e^x$ pour $x \in [-\pi, \pi[$. En déduire la valeur des sommes suivantes :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}.$$

Exercice 3 : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction 2π-périodique, impaire définie sur $[0, \pi]$ par : $f(x) = x(\pi - x)$.

1) Déterminer la série de Fourier associée à f.

2) Donner l'expression de f dans l'intervalle $[2\pi, 3\pi]$.

3) Quelles sommes de séries numériques peut-on en déduire ?

Exercice 4 : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction 2π-périodique définie sur $]0, 2\pi[$ par : $f(x) = e^{ax}$ avec $a \neq 0$.

1) Donner le développement en série de Fourier de la fonction f.

2) Calculer $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a}{a^2+n^2}$ et en déduire $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$.

3) Que vaut $\lim\limits_{a \longrightarrow +\infty} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a}{a^2+n^2}$?

Exercice 5 : : Soit f la fonction 2π-périodique impaire et égale à 1 sur $]0, \pi[$.

1) Dessiner la courbe représentative de f sur $]-3\pi, 3\pi[$.

2) Calculer les coefficients de Fourier réels de f.

3) Etudier la convergence simple et uniforme de la série de Fourier de f.

4) Déterminer $\sum\limits_{p=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^p}{(2p+1)}$ et $\sum\limits_{p=0}^{\infty} \dfrac{1}{(2p+1)^2}$.

5) Calculer $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ et $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^2}$.

Exercice 6 : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, 2π-périodique et telle que :

$$f(x) = \pi^2 - x^2, \ \ x \in]-\pi; \pi[.$$

1) Dessiner cette fonction sur l'intervalle $[-2\pi; 2\pi]$.

2) Calculer les coefficients de Fourier de f. En déduire la série de Fourier de f. La série obtenue converge-t-elle uniformément sur $\mathbb{R}$?

3) En déduire les sommes des séries suivantes :

$$S = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}; \ \ T = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}; \ \ U = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^4}.$$

Exercice 7 : Soit f la fonction 2π-périodique définie par : $f(x) = e^{-x}$, $x \in \left]-\pi, \pi\right[$.

1) Représenter la fonction f sur l'intervalle $[-3\pi, 3\pi]$. Donner l'expression de f dans l'intervalle $]4\pi, 5\pi[$.

2) Calculer les coefficients de Fourier complexes de la fonction f.

3) Donner les coefficients de Fourier réels de la fonction f.

4) Etudier la convergence de la série de Fourier de f et préciser sa somme.

5) Déterminer la valeur des séries

$$S = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{1+k^2}, \ \ T = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+k^2}, \ \ U = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{1+k^2}.$$

Corrigé

Exercice 1 : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, impaire, 2π-périodique et égale à $\pi - x$ pour $x \in]0, \pi[$ et soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, paire, 2π-périodique et égale à $\pi - x$ sur $[0, \pi]$.

1) Représenter et développer f en série de Fourier. La série obtenue converge-t-elle uniformément sur $[-\pi, \pi]$?

2) Représenter et développer g en série de Fourier. La série obtenue converge-t-elle uniformément sur $[-\pi, \pi]$?

3) Que constatez-vous ? Calculer la somme $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{(2n+1)^2}$.

Correction de l'exercice 1 :

1) f est de classe C^1 par morceaux, donc elle est développable en série de Fourier. Puisque f est impaire, ce développement est en série de sinus. D'où,

$$\begin{aligned}
a_n &= 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \ \text{ et} \\
b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi - x) \sin(nx) dx \\
&= 2 \left[-\frac{1}{n} \cos(nx) \right]_0^{\pi} + \frac{2}{\pi} \left[\frac{x}{n} \cos(nx) \right]_0^{\pi} \\
&= \frac{-2}{n} \left[\cos(n\pi) - 1 \right] + \frac{2}{n} \cos(n\pi) = \frac{2}{n}, \quad n \in \mathbb{N}^*.
\end{aligned}$$

La série de Fourier associée à f est donnée par :

$$SF(f; x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\sin(nx)}{n}, \ x \in x \in \mathbb{R}.$$

Les conditions de Dirichlet sont satisfaites, donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\sin(nx)}{n} = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}, \ x \in \mathbb{R}..$$

En particulier,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\sin(nx)}{n} = f(x) = \pi - x, \ x \in]0, \pi[. \tag{1.1}$$

La série de Fourier associée à f ne converge pas uniformément sur $[-\pi, \pi]$ car si la convergence est uniforme sa somme $f(x)$ serait continue. Ce qui n'est pas le cas.

2) g est de classe C^1 par morceaux, donc elle est développable en série de Fourier. Puisque g est paire, ce développement est en série de cosinus. Donc,

$$\begin{aligned}
b_n &= 0 \ \ \forall n \in \mathbb{N}^* \text{ et} \\
a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (\pi - x)\cos(nx)dx, \ \ n \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

D'où,

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (\pi - x)dx = \pi,$$

et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (\pi - x)\cos(nx)dx \\
&= 2\int_0^\pi \cos(nx)dx - \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos(nx)dx \\
&= +\frac{2}{\pi n}\int_0^\pi \sin(nx)dx = -\frac{2}{\pi n^2}\left[\cos(n\pi) - 1\right] = \frac{2\left[1 - (-1)^n\right]}{\pi n^2} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } n = 2k, \\ \dfrac{4}{\pi\left(2k+1\right)^2} & \text{si } n = 2k+1, \ k \in \mathbb{N}. \end{cases}
\end{aligned}$$

La série de Fourier associée à g est donnée par :

$$SF(g;x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{4\cos(nx)}{\pi\left(2k+1\right)^2}, \ \ x \in \mathbb{R}.$$

D'après la règle de Dirichlet,

$$\frac{\pi}{2} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{4\cos(nx)}{\pi\left(2k+1\right)^2} = \frac{g(x+0) + g(x-0)}{2}, \ \ x \in \mathbb{R}.$$

Comme g est continue sur $]0,\pi[$, alors

$$\frac{\pi}{2} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{4\cos(nx)}{\pi\left(2k+1\right)^2} = g(x) = \pi - x, \ \ x \in x \in \left]0,\pi\right[. \tag{1.2}$$

La série de Fourier associée à g converge normalement sur $[-\pi,\pi]$ car

$$\left|\frac{4\cos(nx)}{\pi\left(2k+1\right)^2}\right| \leq \frac{4}{\pi\left(2k+1\right)^2},$$

et la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{4}{\pi\,(2k+1)^2}$ est convergente. Par conséquent, $SF(g;x)$ converge uniformément vers $g(x)$ sur $[-\pi,\pi]$. Par suite,

$$SF(g;x) = g(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{4\cos(nx)}{\pi\,(2k+1)^2},\ x \in [-\pi,\pi]. \tag{1.3}$$

3) Pour tout $x \in \left]0,\pi\right[$, les relations (1) et (2) montrent que $\pi - x$ s'écrit de deux manières différentes comme somme de séries trigonométriques. La série (1) est une série trigonométrique impaire non normalement convergente tandis que la série (2) est une une série trigonométrique paire normalement convergente.

En posant $x=0$ dans (3), nous obtenons

$$SF(g;0) = g(0) = \frac{\pi}{2} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{4}{\pi\,(2k+1)^2} = \pi.$$

D'où,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

En écrivant

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k)^2} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2},$$

on déduit que

$$\frac{3}{4}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2},$$

et donc,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Exercice 2 : Développer en série de Fourier la fonction f, 2π-périodique sur $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = e^x$ pour $x \in \left[-\pi,\pi\right[$. En déduire la valeur des sommes suivantes :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}.$$

Correction de l'exercice 2 : La fonction f est de classe C^1 par morceaux, donc elle est développable en série de Fourier. Nous avons

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos(nx)dx, \ n \in \mathbb{N}, \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x \sin(nx)dx, \ n \in \mathbb{N}^*. \end{aligned}$$

D'où,

$$\begin{aligned} a_n + ib_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x e^{inx}dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{(1+in)x}dx \\ &= \frac{1}{\pi(1+ni)}\left[e^{(1+ni)x}\right]_{-\pi}^{+\pi} = \frac{e^{in\pi}\left(e^{\pi}-e^{-\pi}\right)}{\pi(1+ni)} \\ &= \frac{(-1)^n\left(e^{\pi}-e^{-\pi}\right)}{\pi(1+n^2)}(1-ni) = \frac{2(-1)^n sh(\pi)}{\pi(1+n^2)}(1-ni). \end{aligned}$$

En séparant les parties réelles et imaginaires, nous déduisons

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2(-1)^n sh(\pi)}{\pi(1+n^2)} \text{ et} \\ b_n &= -\frac{2n(-1)^n sh(\pi)}{\pi(1+n^2)}. \end{aligned}$$

La série de Fourier associée à f est donnée par :

$$SF(f;x) = \frac{sh(\pi)}{\pi} + \frac{2sh(\pi)}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(1+n^2)}\left[\cos(nx) - n\sin(nx)\right], \ x \in \mathbb{R}.$$

Les conditions de Dirichlet sont satisfaites. Donc,

$$\begin{aligned} SF(f;x) &= \frac{sh(\pi)}{\pi} + \frac{2sh(\pi)}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(1+n^2)}\left[\cos(nx) - n\sin(nx)\right] \\ &= \begin{cases} e^x & \text{si } x \in \left]-\pi,\pi\right[, \\ \dfrac{e^{\pi}+e^{-\pi}}{2} = ch(\pi) & \text{si } x = \pi. \end{cases} \end{aligned} \tag{1.4}$$

En posant $x = \pi$ et $x = 0$ dans (4), on déduit que

$$\begin{aligned} SF(f;\pi) &= ch(\pi) = \frac{sh(\pi)}{\pi}\left[1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(1+n^2)}\right] \quad \text{et} \\ SF(f;0) &= 1 = \frac{sh(\pi)}{\pi}\left[1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(1+n^2)}\right]. \end{aligned}$$

D'où,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(1+n^2)} &= \frac{1}{2}\left[\pi \coth(\pi) - 1\right], \quad \text{et} \\
\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(1+n^2)} &= \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{sh(\pi)} - 1\right].
\end{aligned}$$

Exercice 3 : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction 2π-périodique, impaire définie sur $[0, \pi]$ par : $f(x) = x(\pi - x)$.

1) Déterminer la série de Fourier associée à f.

2) Donner l'expression de f dans l'intervalle $[2\pi, 3\pi]$.

3) Quelles sommes de séries numériques peut-on en déduire ?

Correction de l'exercice 3 : f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Donc elle est développable en série de Fourier. Puisque f est impaire, ce développement est en série de sinus. Donc

$$\begin{aligned}
a_n &= 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \ \ \text{et} \\
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x(\pi - x)\sin(nx)dx \\
&= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{x(\pi - x)}{n}\cos(nx)\right]_0^{\pi} + \frac{1}{n^2\pi}\int_0^{\pi}(\pi - 2x)\cos(nx)dx \\
&= \frac{1}{n^2}\left[\int_0^{\pi}(\pi - 2x)\sin(nx)\right]_0^{\pi} + \frac{2}{n^2}\int_0^{\pi}\sin(nx)dx \\
&= -\frac{2}{\pi n^3}\left[\cos(nx)\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi n^3}\left[(-1)^{n+1} + 1\right] \\
&= \begin{cases} \dfrac{4}{\pi (2p+1)^3} & \text{si } n = 2p+1 \\ 0 & \text{si } n = 2p \end{cases}.
\end{aligned}$$

La série de Fourier associée à f est donnée par :

$$SF(f;x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{4}{\pi (2p+1)^3}\sin(2p+1)x, \ \ x \in \mathbb{R}.$$

La série de Fourier associée à f converge normalement sur $\mathbb{R}$. D'après la règle de Dirichlet,

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{4}{\pi (2p+1)^3}\sin(2p+1)x = f(x), \ \ x \in \mathbb{R}.$$

D'où,
$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{4}{\pi\left(2p+1\right)^3} \sin\left(2p+1\right)x = x\left(\pi - x\right),\ x \in \left[0,\pi\right]. \tag{1.5}$$
En particulier, en posant $x = \dfrac{\pi}{2}$ dans (7), nous obtenons
$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{4\left(-1\right)^p}{\pi\left(2p+1\right)^3} = \frac{\pi^2}{4} \Longrightarrow \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\left(-1\right)^p}{\left(2p+1\right)^3} = \frac{\pi^3}{16}.$$
Par application de la formule de Parseval, on déduit que
$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{\left(2p+1\right)^6} = \frac{\pi^6}{240}.$$

Exercice 4 : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction 2π-périodique définie sur $]0, 2\pi[$ par : $f\left(x\right) = e^{ax}$ avec $a \neq 0$.

1) Donner le développement en série de Fourier de la fonction f.

2) Calculer $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a}{a^2+n^2}$ et en déduire $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$.

3) Que vaut $\lim\limits_{a \longrightarrow +\infty} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a}{a^2+n^2}$?

Correction de l'exercice 4 : La fonction f est de classe C^1 par morceaux. Donc elle est développable en série de Fourier. Les coefficients de Fourier sont donnés par :
$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)dx,\ n \in \mathbb{N}, \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)dx,\ n \in \mathbb{N}^*. \end{aligned}$$
D'où,
$$\begin{aligned} a_n + ib_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{inx}dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^{ax}e^{inx}dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^{(in+a)x}dx \\ &= \frac{1}{\pi\left(in+a\right)}\left[e^{(in+a)x}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{\pi\left(in+a\right)}\left[e^{2(in+a)\pi} - 1\right] \\ &= \frac{1}{\pi\left(in+a\right)}\left[e^{2a\pi} - 1\right] = \frac{\left(a-in\right)\left(e^{2a\pi}-1\right)}{\pi\left(n^2+a^2\right)} \\ &= \frac{a\left(e^{2a\pi}-1\right)}{\pi\left(n^2+a^2\right)} - i\frac{n\left(e^{2a\pi}-1\right)}{\pi\left(n^2+a^2\right)}. \end{aligned}$$

En séparant les parties réelles et imaginaires, nous déduisons,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{a\left(e^{2a\pi}-1\right)}{\pi\left(n^2+a^2\right)}\ n \in \mathbb{N} \text{ et} \\ b_n &= -\frac{n\left(e^{2a\pi}-1\right)}{\pi\left(n^2+a^2\right)},\ n \in \mathbb{N}^*. \end{aligned}$$

$$SF(f;x) = \frac{e^{2a\pi}-1}{2\pi a} + \frac{\left(e^{2a\pi}-1\right)}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+a^2}\left[a\cos(nx) - n\sin nx\right],\ x \in \mathbb{R}.$$

Les conditions de Dirichlet sont satisfaites. Donc, $SF(f;x)$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers $\dfrac{f(x+)+f(x-)}{2}$. En particulier, on a

$$\begin{aligned} &\frac{e^{2a\pi}-1}{2\pi a} + \frac{a\left(e^{2a\pi}-1\right)}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+a^2}\left[\cos(nx) - n\sin nx\right] \\ &= \begin{cases} e^{ax} & \text{si } x \in]0, 2\pi[\\ \dfrac{f(0+)+f(0-)}{2} = \dfrac{\left(e^{2a\pi}+1\right)}{2} & \text{si } x = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Pour $x = 0$, on obtient

$$\left(e^{2a\pi}-1\right)\left(\frac{1}{2\pi a} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n^2+a^2}\right) = \frac{\left(e^{2a\pi}+1\right)}{2}.$$

D'où,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+a^2} = \frac{1}{a}\left(\frac{\pi}{2}\frac{e^{2a\pi}+1}{e^{2a\pi}-1} - \frac{1}{2a}\right).$$

Puisque la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2+a^2}$ converge normalent sur $\mathbb{R}$, alors

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{a \longrightarrow 0} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+a^2} = \lim_{a \longrightarrow 0} \frac{1}{a}\left(\frac{\pi}{2}\frac{e^{2a\pi}+1}{e^{2a\pi}-1} - \frac{1}{2a}\right) = \frac{\pi^2}{6}.$$

$$\lim_{a \longrightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n^2+a^2} = \lim_{a \longrightarrow 0} \frac{\pi}{2}\frac{e^{2a\pi}+1}{e^{2a\pi}-1} - \frac{1}{2a} = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 5 Soit f la fonction 2π-périodique impaire et égale à 1 sur $]0, \pi[$.

1) Dessiner la courbe représentative de f sur $]-3\pi, 3\pi[$.

2) Calculer les coefficients de Fourier réels de f.

3) Etudier la convergence simple et uniforme de la série de Fourier de f.

4) Déterminer $\sum\limits_{p=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^p}{(2p+1)}$ et $\sum\limits_{p=0}^{\infty} \dfrac{1}{(2p+1)^2}$.

5) Calculer $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ et $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^2}$.

Correction de l'exercice 5 :

1)

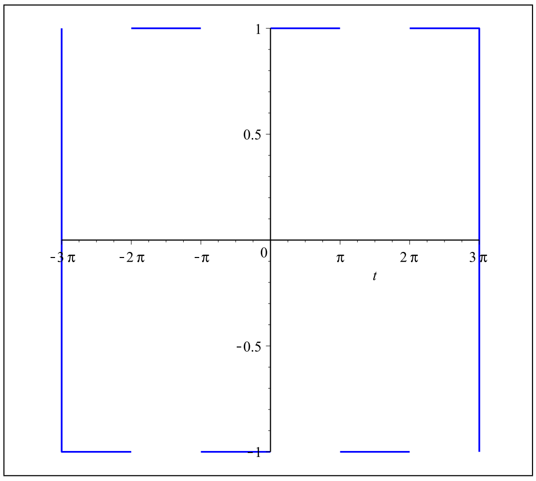


FIGURE 1.1 –

2) Puisque f est impaire, on a $a_n = 0\ \forall n \in \mathbb{N}$ et

$$b_n == \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx = \begin{cases} 0 \quad \text{si} \quad n = 2p \\[2ex] \dfrac{4}{(2p+1)\,\pi} \quad \text{si} \quad n = 2p+1. \end{cases}$$

3) La série de Fourier associée à f est donnée par :

$$S_f(x) = \sum_{n\geq 1} b_n \sin nx = \frac{4}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\sin(2p+1)\,x}{(2p+1)}.$$

D'après le théorème de Diruchlet $S_f(x)$ converge sur $\mathbb{R}$ et on a

$$S_f(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2} & \text{si} \quad f \text{ est discontinue en } x, \\ f(x) & \text{si} \quad f \text{ est continue en } x. \end{cases}$$

La convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}$ car si elle était uniforme, la somme $S_f(x)$ serait une fonction continue. Cependant, la convergence est uniforme sur tout intervalle compact de la forme

$$I_{k,\alpha} = [2k\pi - \alpha, 2(k+1)\pi + \alpha], \ 0 < \alpha < \pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

La somme $S_f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

4) Pour $x = \dfrac{\pi}{2}$, on a

$$S_f(\frac{\pi}{2}) = \frac{4}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{\sin(2p+1)\frac{\pi}{2}}{(2p+1)} = 1.$$

Comme $\sin(2p+1)\dfrac{\pi}{2} = (-1)^p$, on déduit que

$$\frac{4}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{(2p+1)} = 1 \implies \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{(2p+1)} = \frac{\pi}{4}.$$

Par application de la formule de parseval, on obtient

$$\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2\,dx = 2\pi = \pi\sum_{p=0}^{+\infty}b_{2p+1}^2 = \frac{16}{\pi^2}\pi\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2}.$$

D'où,

$$\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

5) Nous avons

$$\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{(2p)^2} + \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{1}{4}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{p^2} + \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2}.$$

Donc,

$$\frac{3}{4}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2} \implies \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

De même, on a

$$\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} = \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{2p}}{(2p)^2} + \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{2p+1}}{(2p+1)^2} = \frac{1}{4}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{p^2} - \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2}.$$

D'où,

$$\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{\pi^2}{24} - \frac{\pi^2}{8} = -\frac{\pi^2}{12}.$$

Exercice 6 : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, 2π-périodique et telle que :

$$f(x) = \pi^2 - x^2, \;\; x \in]-\pi; \pi[.$$

1) Dessiner cette fonction sur l'intervalle $[-2\pi; 2\pi]$.

2) Calculer les coefficients de Fourier de f. En déduire la série de Fourier de f. La série obtenue converge-t-elle uniformément sur $\mathbb{R}$?

3) En déduire les sommes des séries suivantes :

$$S = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}; \;\; T = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}; \;\; U = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^4}.$$

Correction de l'exercice 6 :

1)

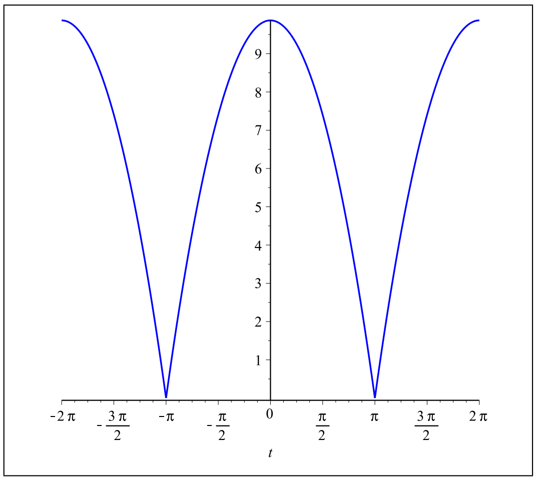


FIGURE 1.2 –

2) La fonction f est paire. Donc, $b_n = 0 \; \forall n$ et

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos(nx)\, dx, \;\; n \in \mathbb{N}.$$

D'où,

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left(\pi^2 - x^2\right) dx = \frac{4\pi^2}{3}.$$

Pour $n \geq 1$,

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\pi^2 - x^2\right) \cos(nx)\, dx.$$

En faisant deux intégrations successives par parties, nous obtenons

$$a_n = \frac{4\,(-1)^{n-1}}{n^2}, \quad n \geq 1.$$

D'où la série de Fourier associée à f est

$$\begin{aligned} Sf(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1} a_n \cos(nx) \\ &= \frac{2\pi^2}{3} + 4 \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \cos(nx), \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

f est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 par morceaux. Donc, d'après la règle de Dirichletla série de Fourier de f converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers $f(x)$. Comme

$$\left| \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \cos(nx) \right| \leq \frac{1}{n^2},$$

et que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge, alors la la série de Fourier de f converge normalement, donc uniformémént sur $\mathbb{R}$ vers $f(x)$.

3)

- Pour $x = 0$, on obtient

$$Sf(x) = \frac{2\pi^2}{3} + 4 \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = f(0) = \pi^2.$$

D'où,

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

- Pour $x = \pi$, on obtient

$$Sf(x) = \frac{2\pi^2}{3} - 4 \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} = f(\pi) = 0.$$

D'où,

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

• Par application de la formule de Parseval,

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx = \pi \left[\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \right],$$

on obtient,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(\pi^2 - x^2\right)^2 dx = \pi \left[\frac{8\pi^4}{9} + 16 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \right].$$

D'où,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Exercice 7 : Soit f la fonction 2π-périodique définie par : $f(x) = e^{-x}$, $x \in \left]-\pi, \pi\right[$.

1) Représenter la fonction f sur l'intervalle $[-3\pi, 3\pi]$. Donner l'expression de f dans l'intervalle $\left]4\pi, 5\pi\right[$.

2) Calculer les coefficients de Fourier complexes de la fonction f.

3) Donner les coefficients de Fourier réels de la fonction f.

4) Etudier la convergence de la série de Fourier de f et préciser sa somme.

5) Déterminer la valeur des séries

$$S = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{1+k^2}, \quad T = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+k^2}, \quad U = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{1+k^2}.$$

Correction de l'exercice 7 :

1) Représentation graphique
Posons $X = x - 4\pi$. Nous avons

$$x \in \left]4\pi, 5\pi\right[\quad \Leftrightarrow \quad X \in \left]0, \pi\right[.$$

D'où,

$$\begin{aligned} f(X) &= f(x - 4\pi) = f(x) \text{ (car } f \text{ est } 2\pi - \text{périodique} \\ &= e^{-X} = e^{-(x-4\pi)} = e^{4\pi} e^{-x}. \end{aligned}$$

Donc,

$$\forall x \in \left]4\pi, 5\pi\right[, \quad f(x) = e^{4\pi} e^{-x}.$$

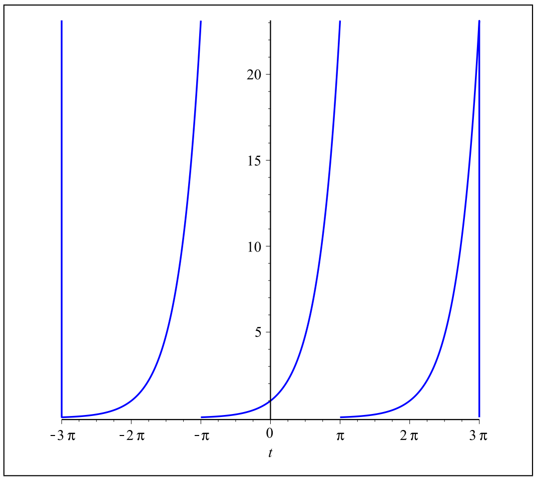


FIGURE 1.3 –

2) Les coefficients de Fourier complexes sont donnés par :

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-inx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-x}e^{-inx}dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-(1+in)x} = -\frac{1}{1+in}\left[e^{-(1+in)x}\right]_{-\pi}^{\pi}, \\
&= -\frac{1}{2\pi(1+in)}\left[e^{-(1+in)\pi} - e^{(1+in)\pi}\right] \\
&= -\frac{1}{2\pi(1+in)}\left[e^{-\pi}e^{-in\pi} - e^{\pi}e^{in\pi}\right] \\
&= \frac{1}{2\pi(1+in)}\left[e^{\pi}e^{in\pi} - e^{-\pi}e^{-in\pi}\right] \\
&= \frac{1}{2\pi(1+in)}e^{in\pi}\left(e^{\pi} - e^{-\pi}\right) = \frac{(-1)^n}{2\pi(1+in)}\left(e^{\pi} - e^{-\pi}\right) \quad n \in \mathbb{Z},
\end{aligned}$$

La série de Fourier complexe est donnée par :

$$\frac{(e^{\pi} - e^{-\pi})}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n e^{inx}}{1+in}.$$

3) Les coefficients de Fourier réels sont donnés par :

$$\begin{aligned}
a_n &= c_n + c_{-n} = \frac{(-1)^n}{2\pi(1+in)}\left(e^{\pi} - e^{-\pi}\right) + \frac{(-1)^n}{2\pi(1-in)}\left(e^{\pi} - e^{-\pi}\right) \\
&= \frac{(-1)^n(e^{\pi} - e^{-\pi})}{2\pi}\left[\frac{1}{1+in} + \frac{1}{1-in}\right] \\
&= \frac{(-1)^n(e^{\pi} - e^{-\pi})}{\pi(1+n^2)}, \ n \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_n &= i\left(c_n - c_{-n}\right) = \frac{i}{2\pi}\left[\frac{(-1)^n}{1+in}\left(e^{\pi}-e^{-\pi}\right) - \frac{(-1)^n}{1-in}\left(e^{\pi}-e^{-\pi}\right)\right] \\
&= \frac{(-1)^n\left(e^{\pi}-e^{-\pi}\right)i}{2\pi}\left[\frac{1}{1+in} - \frac{1}{1-in}\right] \\
&= \frac{(-1)^n\left(e^{\pi}-e^{-\pi}\right)i}{2\pi} \times \frac{-2in}{1+n^2} = \frac{(-1)^n n\left(e^{\pi}-e^{-\pi}\right)}{\left(1+n^2\right)\pi},\ n \in \mathbb{N}^*.
\end{aligned}$$

La série de Fourier réel associée à f est

$$\begin{aligned}
SF(f;x) &= \frac{\left(e^{\pi}-e^{-\pi}\right)}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(e^{\pi}-e^{-\pi}\right)}{\left(1+n^2\right)}\left[\cos(nx) + n\sin(nx)\right] \\
&= \frac{\left(e^{\pi}-e^{-\pi}\right)}{\pi}\left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+n^2}\left[\cos(nx) + n\sin(nx)\right]\right].
\end{aligned}$$

4) L a fonction f est de classe C^1 par morceaux. Donc les conditions de Dirichlet sont satisfaites. Par conséquent, la série de Fourier de f converge simplement sur $\mathbb{R}$ et on a

$$SF(f;x) = \begin{cases} \dfrac{f(x+) + f(x-)}{2} & \text{si } f \text{ est continue au point } x \\[2ex] \dfrac{f(\pi+) + f(\pi-)}{2} = \dfrac{e^{\pi}+e^{-\pi}}{2} & \text{si est dicontinue au point } x. \end{cases}$$

5) La formule de Parseval donne

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\, dx = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 .$$

Or,

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\, dx &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{-2x} dx = \left[\frac{-1}{2}e^{-2x}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{e^{2\pi}-e^{-2\pi}}{2}, \\
2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 &= 2\pi\left[\frac{\left(e^{\pi}-e^{-\pi}\right)}{2\pi}\right]^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+n^2}.
\end{aligned}$$

Donc,

$$2\pi\left[\frac{\left(e^{\pi}-e^{-\pi}\right)}{2\pi}\right]^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+n^2} = \frac{e^{2\pi}-e^{-2\pi}}{2}.$$

D'où,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+n^2} &= \frac{\dfrac{e^{2\pi}-e^{-2\pi}}{2}}{2\pi\left[\dfrac{(e^{\pi}-e^{-\pi})}{2\pi}\right]^2} = \frac{\dfrac{e^{2\pi}-e^{-2\pi}}{2}}{2\pi\dfrac{(e^{\pi}-e^{-\pi})^2}{4\pi^2}} = \frac{\dfrac{e^{2\pi}-e^{-2\pi}}{2}}{\dfrac{(e^{\pi}-e^{-\pi})^2}{2\pi}}\\
&= \pi\frac{e^{2\pi}-e^{-2\pi}}{(e^{\pi}-e^{-\pi})^2} = \pi\frac{e^{\pi}+e^{-\pi}}{e^{\pi}-e^{-\pi}} = \pi\coth(\pi).
\end{aligned}$$

Nous avons

$$\begin{aligned}
\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+n^2} &= 1+\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{1}{1+n^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2}\\
&= 1+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2}.
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2} = \frac{1}{2}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+n^2}-1\right] = \frac{1}{2}\left[\pi\coth(\pi)-1\right].$$

- Pour $x=0$, on obtient

$$\frac{(e^{\pi}-e^{-\pi})}{\pi}\left[\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+n^2}\right] = f(0) = 1.$$

Donc,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+n^2} = \frac{\pi}{(e^{\pi}-e^{-\pi})}-\frac{1}{2}.$$

- Pour $x=\pi$, on obtient

$$\frac{(e^{\pi}-e^{-\pi})}{\pi}\left[\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2}\right] = \frac{f(\pi+)+f(\pi-)}{2} = \frac{(e^{\pi}+e^{-\pi})}{2}$$

Donc,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2} = \frac{\pi}{2}\frac{e^{\pi}+e^{-\pi}}{e^{\pi}-e^{-\pi}}-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left[\pi\coth(\pi)-1\right].$$

Chapitre 2

SYSTEMES DIFFERENTIELS LINEAIRES A COEFFICIENTS CONSTANTS

Exercice 1 : Résoudre les systèmes différentiels suivants :

$$(S_1) \quad \left\{ \begin{array}{l} x' = x + y - z \\ y' = 2x + 3y - 4z \\ z' = 4x + y - 4z, \end{array} \right. \qquad (S_2) \quad \left\{ \begin{array}{l} x' = x + 2y - z \\ y' = 2x + 4y - 2z \\ z' = -x - 2y + z. \end{array} \right.$$

Exercice 2 : Donner les solutions complexes et réelles du système différentiel :

$X' = AX$ lorsque

$$1)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad 2)\ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -2 \\ 2 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

Exercice 3 : On considère les systèmes différentiels suivants :

$$(S_1) \quad \left\{ \begin{array}{l} x' = 2y + 2z \\ y' = -x + 2y + 2z \\ z' = -x + y + 3z. \end{array} \right. \qquad (S_2) \quad \left\{ \begin{array}{l} x' = -6x + 5y + 3z \\ y' = -8x + 7y + 4z \\ z' = -2x + y + z. \end{array} \right.$$

1) Résoudre les systèmes différentiels (S_1) et (S_2).

2) En déduire l'expression de l'unique solution $x,\ y, z$ du système (S_1) satisfaisant les conditions initiales $x(0) = y(0) = z(0) = 1$.

Exercice 4 : Résoudre le système différentiel suivant :

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{l} x' = -4x + y + z \\ y' = x - y - 2z \\ z' = -2x + y - z. \end{array} \right. , \quad \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5 : 1) On définit l'exponentielle d'une matrice carrée A comme

$$e^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!} = I + A + \frac{A^2}{2!} + \cdots$$

où I est la matrice identité. On suppose en plus que la matrice A est diagonalisable et on note $\lambda_1,\ \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, ses valeurs propres. Posons $A = PDP^{-1}$ où D est la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont $\lambda_1,\ \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, et P la matrice de passage de la base canonique à la base constituée des vecteurs propres de A. Montrer que

$$e^A = Pe^D P^{-1},$$

où e^D est la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont e^{λ_1}, e^{λ_2},..., e^{λ_n}.

2) On considère le système différentiel (S_1) suivant :

$$(S_1) \quad \begin{cases} x' = -2x + y \\ y' = x - 2y \end{cases}, \quad \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1) Résoudre le système différentiel (S_1).

2) Calculer la matrice carrée e^{tA}. Vérifier que la solution du système (S_1) est égale à $e^{tA}\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix}$.

3) Utiliser la méthode de la question 2) pour résoudre le système suivant :

$$(S_2) \quad \begin{cases} x' = -2y - z, \\ y' = 2x + z, \\ z' = x - y, \end{cases} \quad \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6 : Soit (S) le système différentiel avec second membre

$$(S) \quad \begin{cases} x' = x + 8y + e^t \\ y' = 2x + y + e^{-3t}. \end{cases}$$

1) Déterminer la solution générale du système linéaire associé à (S).

2) Déterminer la solution particulière du système linéaire (S) pour les conditions initiales $x(0) = 0$, $y(0) = 1$.

3) Déterminer la solution générale du système (S).

Exercice 7 : Résoudre le système différentiel linéaire avec second membre,

$$(S) \quad \begin{cases} x' = y + z + t \\ y' = x + t^2 e^{-t} \\ z' = x + y + z + te^t. \end{cases}$$

Exercice 8 : Résoudre le système différentiel linéaire avec second membre,

$$(S) \quad \begin{cases} x' = 2x - y + 2z + 1 \\ y' = 10x - 5y + 7z - e^t \\ z' = 4x - 2y + 2z + 2e^t, \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 9 : Résoudre les systèmes d'équations différentielles suivantes :

$$(S_1) \quad \begin{cases} x' + y' - y = \sin t \\ x' - y' + x = t, \end{cases} \quad , \quad (S_2) \quad \begin{cases} x'' - x' + y = 0 \\ y'' - y + x = 0. \end{cases}$$

Exercice 10 : Résoudre les équations différentielles suivantes :

1) $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0.$ 2) $y^{(4)} - 6y'' + 8y' - 3y = e^x.$

Corrigé

Correction de l'exercice 1 : La matrice associé au système (S_1) est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \\ 4 & 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Son polynôme caractéristique est

$$P(\lambda) = -(\lambda+3)(\lambda-1)(\lambda-2).$$

Les valeurs propres de A sont simples. Donc, A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$. Les vecteurs propres associés respectivement aux valeurs propres -3, 1 et 2 sont :

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 11 \end{pmatrix}, \ u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

D'où, la solution générale du système (S_1) est

$$Y(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = ae^{-3t}u_1 + be^t u_2 + ce^{2t}u_3, \ \ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3.$$

Donc,

$$\begin{cases} x(t) = ae^{-3t} + be^t + ce^{2t} \\ y(t) = 7ae^{-3t} + be^t + 2ce^{2t} \\ z(t) = 11ae^{-3t} + be^t + ce^{2t}. \end{cases}$$

La matrice associé au système (S_2) est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Son polynôme caractéristique est

$$P(\lambda) = \lambda^2(\lambda-6).$$

Les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = 0$ (double) et $\lambda_2 = 6$ (simple). On trouve que la dimension de $\ker(A)$ est égale à 2. Donc, A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$. Les vecteurs propres associés respectivement aux valeurs propres 0 et 6 sont :

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

D'où, la solution générale du système (S_2) est

$$Y(t)=\begin{pmatrix} x(t)\\ y(t)\\ z(t)\end{pmatrix}=ae^{0t}u_1+be^{0t}u_2+ce^{6t}u_3,\ \ (a,b,c)\in\mathbb{R}^3.$$

Donc,

$$\left\{\begin{array}{l} x(t)=a+2b+ce^{6t}\\ y(t)=-b+2ce^{6t}\\ z(t)=a-ce^{6t},\ \ (a,b,c)\in\mathbb{R}^3.\end{array}\right.$$

<u>Correction de l'exercice 2 :</u> 1) Les valeurs propres de la matrice

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

sont 2, $1+i$ et $1-i$. Les vecteurs propres associés respectivement àaux valeurs propres 2, $1+i$ et $\overline{1+i}=1-i$ sont :

$$u_1=\begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 1\end{pmatrix},\ u_2=\begin{pmatrix} 1\\ i\\ -i\end{pmatrix}\ \text{ et } u_3=\overline{u_2}=\begin{pmatrix} 1\\ -i\\ i\end{pmatrix}.$$

Les solutions dans $\mathbb{C}$ sont données par :

$$\begin{array}{rcl} X(t) &=& \begin{pmatrix} x(t)\\ y(t)\\ z(t)\end{pmatrix}=\alpha e^{2t}u_1+\beta e^{(1+i)t}u_2+\gamma e^{\overline{(1+i)}t}\overline{u_2}\\ &=& \alpha e^{2t}\begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}+\beta e^{(1+i)t}\begin{pmatrix} 1\\ i\\ -i\end{pmatrix}+\gamma e^{(1-i)t}\begin{pmatrix} 1\\ i\\ -i\end{pmatrix},\ \ (\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{C}^3.\end{array}$$

Les solutions dans $\mathbb{R}$ sont données par :

$$\begin{array}{rcl} X(t) &=& \begin{pmatrix} x(t)\\ y(t)\\ z(t)\end{pmatrix}=ae^{2t}u_1+bRe\left[e^{(1+i)t}u_2\right]+cIm\left[e^{(1+i)t}u_2\right]\\ &=& ae^{2t}\begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}+be^{t}\begin{pmatrix} \cos t\\ -\sin t\\ \sin t\end{pmatrix}+ce^{t}\begin{pmatrix} \sin t\\ \cos t\\ -\cos t\end{pmatrix},\ \ (a,b,c)\in\mathbb{R}^3.\end{array}$$

Soit

$$\left\{\begin{array}{l} x(t)=ae^{2t}+be^{t}\cos t+ce^{t}\sin t\\ y(t)=ae^{2t}-be^{t}\sin t+ce^{t}\cos t\\ z(t)=ae^{2t}+be^{t}\sin t-ce^{t}\cos t,\ (a,b,c)\in\mathbb{R}^3.\end{array}\right.$$

Correction de l'exercice 3 : Le système (S_2) s'écrit

$$X'(t) = AX(t),$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 5 & 3 \\ -8 & 7 & 4 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de A est

$$P(\lambda) = \lambda\,(\lambda - 1)^2\,.$$

Donc, A admet deux valeurs propres $\lambda_1 = 0$ (simple) et $\lambda_2 = 1$ (double).

• Un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda_1 = 0$ est $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

• Vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda_2 = 1$. Soit $u_2 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé à $\lambda_2 = 1$. On a

$$\begin{aligned} Au_2 &= \lambda_2 u_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -6 & 5 & 3 \\ -8 & 7 & 4 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -7\alpha + 5\beta + 3\gamma = 0, \\ -8\alpha + 6\beta + 4\gamma = 0 \\ -2\alpha + \beta = 0. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Donc, $\beta = 2\alpha$ et $\gamma = -\alpha$. On prend comme vecteur propre associé à la valeur propre 1, le vecteur $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. $\ker(A - I)$ est de dimension 1. Donc, A n'est pas diagonalisable. Elle est trigonalisable. On complète les vecteurs libres u_1 et u_2 par un troisième vecteur pour former une base $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ de $\mathbb{R}^3$. On prend $u_3 = e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. On vérifie que

$$\det\left((u_1, u_2, u_3)\right) = 2 \neq 0.$$

Donc, $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$. On va maintenant exprimer Au_3 en fonction de u_1, u_2 et u_3. Nous avons

$$\left\{\begin{array}{l} u_1 = e_1 + 2e_3 \\ u_2 = e_1 + 2e_2 - e_3 \\ u_3 = e_3. \end{array}\right.$$

D'où,

$$\begin{aligned} e_1 &= u_1 - 2u_3,\ e_2 = \frac{-u_1 + u_2 + 3u_3}{2}, \quad \text{et} \quad u_3 = e_3, \\ Au_3 &= Ae_3 = 3e_1 + 4e_2 + e_3 = u_1 + 2u_2 + u_3. \end{aligned}$$

La matrice A dans la nouvelle base $\mathcal{B}'$ est donc

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice de passage de la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ à la base $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ est

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On résout maintenant le système $Z' = TZ$, avec $Z = \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \end{pmatrix}$ soit

$$\begin{cases} z_1' = & z_3, \\ z_2' = & z_2 + 2z_3, \\ z_3' = & z_3. \end{cases}$$

La troisième équation a pour solution générale,

$$z_3 = k_1 e^t,\ k_1 \in \mathbb{R}.$$

En portant dans la deuxième et la première équation, on obtient,

$$z_2' = z_2 + 2k_1 e^t,$$

qui admet la solution générale,

$$z_2 = (k_2 + 2k_1 t)\, e^t,\ k_2 \in \mathbb{R}.$$

$$z_1' = k_1 e^t,$$

qui admet la solution générale,

$$z_1 = k_1 e^t + k_3,\ k_3 \in \mathbb{R}.$$

Finalement,

$$Z(t) = \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 e^t + k_3 \\ (k_2 + 2k_1 t)\, e^t \\ k_1 e^t \end{pmatrix}, \quad (k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{R}^3.$$

La solution générale du système est donnée alors par :

$$\begin{aligned}
Y(t) &= \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ x(t) \end{pmatrix} = PZ(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 e^t + k_3 \\ (k_2 + 2k_1 t) e^t \\ k_1 e^t \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} k_1 e^t + k_3 + (k_2 + 2k_1 t) e^t \\ 2(k_2 + 2k_1 t) e^t \\ 2(k_1 e^t + k_3) - (k_2 + 2k_1 t) e^t + k_1 e^t \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} k_3 + (k_1 + k_2 + 2k_1 t) e^t \\ 2(k_2 + 2k_1 t) e^t \\ 2k_3 + (3k_1 - k_2 - 2k_1 t) e^t \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

<u>Correction de l'exercice 4 :</u> La matrice dusystème différentiel est donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de A est donné par :

$$P(\lambda) = -(\lambda + 2)^3.$$

Donc, A admet $\lambda = -2$ comme valeur propre d'ordre 3. La solution générale du système passant par $Y(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ est alors

$$\begin{aligned}
Y(t) &= \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \left[e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{2} \frac{t^k}{k!} (A - \lambda I)^k \right] Y(0) \\
&= e^{-2t} \left[I + t(A + 2I) + \frac{t^2}{2} (A + 2I)^2 \right] Y(0).
\end{aligned}$$

Nous avons,

$$\begin{aligned}
I &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ (A + 2I) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & +1 \end{pmatrix}, \\
(A + 2I)^2 &= \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

D'où,

$$\begin{aligned}
Y\left(t\right) &= e^{-2t}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{t^2}{2}\begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \\
&= e^{-2t}\begin{pmatrix} 1-2t+\frac{3t^2}{2} & t & t-\frac{3t^2}{2} \\ t+\frac{3t^2}{2} & 1+t & -2t-\frac{3t^2}{2} \\ -2t+\frac{3t^2}{2} & t & 1+t-\frac{3t^2}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \\
&= e^{-2t}\begin{pmatrix} \left(1-2t+\frac{3t^2}{2}\right)x_0 + ty_0 + \left(t-\frac{3t^2}{2}\right)z_0 \\ \left(t+\frac{3t^2}{2}\right)x_0 + \left(1+t\right)y_0 - \left(2t+\frac{3t^2}{2}\right)z_0 \\ \left(-2t+\frac{3t^2}{2}\right)x_0 + ty_0 + \left(1+t-\frac{3t^2}{2}\right)z_0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

<u>Correction de l'exercice 5 :</u> 1) Par récurrence, on montre que

$$A^k = PD^kP^{-1},\ k \in \mathbb{N},$$

où,

$$D^k = diag\left(\lambda_1^k, \lambda_2^k, \cdots, \lambda_n^k\right) = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n^k \end{pmatrix}.$$

D'où,

$$e^A = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{A^k}{k!} = P\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{D^k}{k!}\right)P^{-1} = Pe^DP^{-1},$$

avec,

$$e^D = diag\left(e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}, \cdots, e^{\lambda_n}\right) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}.$$

2) La matrice associé au système différentiel (S_1) est

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

On a $spect(A) = \{-1, -3\}$. $\ker(A+I)$ est engendré par le vecteur $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\ker(A+3I)$ est engendré par le vecteur $u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. La solution du système (S_1) est donnée par :

$$\begin{aligned} Y(t) &= \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \alpha e^{-t} u_1 + \beta e^{-3t} u_2 \\ &= \alpha e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta e^{-3t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

Soit

$$\begin{cases} x(t) = \alpha e^{-t} - \beta e^{-3t} \\ \\ y(t) = \alpha e^{-t} + \beta e^{-3t}, \ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

Pour chercher α et β, on résout le système

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Comme

$$P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

alors,

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Donc, la solution générale qui satisfait $Y(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est donnée par :

$$\begin{cases} x(t) = \frac{3}{2} e^{-t} + \frac{1}{2} e^{-3t} \\ \\ y(t) = \frac{3}{2} e^{-t} - \frac{1}{2} e^{-3t}. \end{cases}$$

2) Nous avons

$$\begin{aligned} P &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \ P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \ e^{tD} = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-3t} \end{pmatrix}. \\ e^{tA} &= P e^{tD} P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{-t} + e^{-3t} & e^{-t} - e^{-3t} \\ e^{-t} - e^{-3t} & e^{-t} + e^{-3t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Nous avons

$$\begin{aligned} e^{tA}Y(0) &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{-t}+e^{-3t} & e^{-t}-e^{-3t} \\ e^{-t}-e^{-3t} & e^{-t}+e^{-3t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{3}{2}e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-3t} \\ \\ \frac{3}{2}e^{-t}-\frac{1}{2}e^{-3t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Donc, la solution du système (S_1) est égale à $e^{tA}\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix}$.

3) D'après 1), la solution du système (S_2) est donnée par :

$$e^{tA}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}, \text{ avec } A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de la matrice A est $P(\lambda) = -\lambda^3 - 6\lambda$. Les valeurs propres sont 0, $i\sqrt{6}$ et $-i\sqrt{6}$. un vecteur propre associé à $\lambda = 0$ est $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Un vecteur propre associé à la valeur propre $i\sqrt{6}$ est $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Le vecteur propre associé

<u>Correction de l'exercice 6 :</u> Le système (S_1) s'écrit

$$\begin{aligned} Y'(t) &= \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = AY(t) + B(t) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{t} \\ e^{-3t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La matrice A admet deux valeurs propres -3 et 5. Donc elle est diagonalisable.

• Le sous espace propre associé à la valeur propre -3 est engendré par le vacteur $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

• Le sous espace propre associé à la valeur propre 5 est engendré par le vacteur $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Nous avons

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = P^{-1}AP$$

avec

$$P = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Posons $Z = P^{-1}Y$. Z est solution du système

$$Z' = DZ + C(t)$$

avec

$$C(t) = P^{-1}B(t) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} e^t + 2e^{-3t} \\ -e^t + 2e^{-3t} \end{pmatrix}.$$

Après résolution, on obtient

$$Z(t) = \begin{pmatrix} \alpha e^{5t} - \frac{1}{16}e^t - \frac{1}{16}e^{-3t} \\ \beta e^{-3t} - \frac{1}{16}e^t + \frac{1}{2}te^{-3t} \end{pmatrix}.$$

Finalement,

$$Y(t) = \alpha\begin{pmatrix} 2e^{5t} \\ e^{5t} \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} -2e^{-3t} \\ e^{-3t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -te^{-3t} - \frac{1}{8}e^{-3t} \\ -\frac{1}{8}e^t + \frac{t}{2}e^{-3t} - \frac{1}{16}e^{-3t} \end{pmatrix}$$

Correction de l'exercice 7 : La matrice associée au système est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\mathrm{Spec}(A) = \{-1, 0, 2\}$. A est diagonalisable.

• Le sous espace propre associé à la valeur propre $\lambda = -1$ est engendré par $u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

• Le sous espace propre associé à la valeur propre $\lambda = 0$ est engendré par $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

• Le sous espace propre associé à la valeur propre $\lambda = 2$ est engendré par $u_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

<u>Correction de l'exercice 8 :</u> La matrice associée au système est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 10 & -5 & 7 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

$det(A - \lambda I) = -\lambda^2(\lambda + 1)$

• Le sous espace propre associé à la valeur propre $\lambda = 0$ est engendré par $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

• Le sous espace propre associé à la valeur propre $\lambda = -1$ est engendré par $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

La matrice n'est pas diagonalisable.

<u>Correction de l'exercice 9 :</u> Le systèmr (S_1) est équivalent au système

$$(S_1') \quad \begin{cases} x' = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}y + \dfrac{1}{2}(t + \sin t) \\ y' = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}y + \dfrac{1}{2}(-t + \sin t). \end{cases}$$

Posons

$$X(t) = \begin{pmatrix} x\,(t) \\ y\,(t) \end{pmatrix}, \; B(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2}(t + \sin t) \\ \dfrac{1}{2}(-t + \sin t) \end{pmatrix}, \; A = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Le système (S_1') s'écrit alors

$$X'(t) = AX(t) + B(t).$$

$det(A - \lambda I) = \lambda^2 - \dfrac{1}{2}$. Les valeurs propres de A sont $\lambda = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. A est diagonalisable.

• Le sous espace propre associé à la valeur propre $\lambda = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ est engendré par $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 + \sqrt{2} \end{pmatrix}$.

• Le sous espace propre associé à la valeur propre $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ est engendré par $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - \sqrt{2} \end{pmatrix}$

Les solutions du système homogène sont donc de la forme

$$X(t) = \alpha u_1 e^{\frac{\sqrt{2}}{2}t} + \beta u_1 e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}t}, \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Comme

$$\begin{aligned} B(t) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \sin t \\ &= v_1 t + v_2 \sin t, \end{aligned}$$

alors la solution particulière $Z(t)$ du système (S_1') s'écrit comme

$$Z(t) = U_1 t^2 + U_2 t + U_3 + V_1 \sin t + V_2 \cos t,$$

où U_1, U_2, U_3, V_1 et V_2 sont des vecteurs de $\mathbb{R}^2$ que nous allons déterminer. Nous avons

$$\begin{aligned} B(t) &= Z'(t) - AZ(t) = -AU_1 t^2 + (2U_1 - AU_2) + \\ &\quad + (U_2 - AU_3) + (V_1 - AV_2)\cos t - (V_2 + AV_1)\sin t. \end{aligned}$$

D'où,

$$\begin{cases} AU_1 = 0 \\ 2U_1 - AU_2 = v_1 \\ U_2 - AU_3 = 0 \\ V_1 - AV_2 = 0 \\ V_2 + AV_1 = -v_2. \end{cases}$$

La solution générale du système est

$$\begin{cases} x(t) = k_1 e^{\frac{\sqrt{2}}{2}t} + k_2 e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}t} + t - 1 - \frac{1}{3}\cos t \\ \\ y(t) = \left(1+\sqrt{2}\right) k_1 e^{\frac{\sqrt{2}}{2}t} + \left(1-\sqrt{2}\right) k_2 e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}t} + 1 - \frac{1}{3}\sin t - \frac{1}{3}\cos t \end{cases}$$

où k_1 et k_2 sont des constantes réelles.

<u>Correction de l'exercice 10 :</u>

1) Posons

$$Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix} \Longrightarrow Y'(t) = \begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \\ y_3'(t) \end{pmatrix}.$$

L'équation différentielle proposée est équivalente au système

$$Y'(t) = AY(t)$$

où A est la matrice carrée

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de A est

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = -(\lambda - 1)^3 .$$

La solution du système est donc donnée sous la forme

$$Y(t) = \left(U_0 + U_1 t + U_2 t^2\right) e^t$$

où U_0, U_1 et U_2 sont des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ que nous allons préciser. Nous avons

$$\begin{array}{rcl} Y'(t) & = & \left[(U_0 + U_1) + (U_0 + 2U_1)\, t + U_2 t^2\right] \\ & = & \left(AU_0 + AU_1 t + AU_2 t^2\right) e^t. \end{array}$$

D'où,

$$\left\{ \begin{array}{l} AU_2 = U_2 \\ AU_1 = U_1 + 2U_2 \\ AU_0 = U_0 + U_1. \end{array} \right.$$

La résolution de ce sysème donne

$$\left\{ \begin{array}{l} U_2 = (k_2, k_2, k_2)\,,\ k_2 \in \mathbb{R} \\ U_1 = (k_1, k_1 + 2k_2, k_1 + 4k_2)\,,\ k_1 \in \mathbb{R} \\ U_0 = (k_0, k_0 + k_1, k_0 + 2k_1 + 2k_2)\,,\ k_0 \in \mathbb{R}. \end{array} \right.$$

Les solutions du système (S') sont donc

$$Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix} = Y(t) = \begin{pmatrix} (k_0 + k_1 t + k_2 t^2)\, e^t \\ (k_0 + k_1 + (k_1 + 2k_2)\, t + k_2 t^2)\, e^t \\ (k_0 + 2k_1 + 2k_2 + (k_1 + 4k_2)\, t + k_2 t^2)\, e^t, \end{pmatrix}$$

où k_0, k_1 et k_2 sont des réels. La solution de l'équation différentielle est alors

$$y(t) = \left(k_0 + k_1 t + k_2 t^2\right) e^t, \quad (k_0, k_1, k_2) \in \mathbb{R}^3.$$

2) Les solutions de l'équation différentielle proposée est donnée par :

$$y(t) = k_1 e^{-3t} + \left(\frac{t^3}{24} + k_2 t^2 + k_3 t + k_4\right) e^t, \quad (k_1, k_2, k_3, k_4) \in \mathbb{R}^4.$$

Chapitre 3

INTEGRALES GENERALISEES (OU IMPROPRES)

Exercice 1 : Les intégrales généralisées suivantes sont-elles convergentes ?

$$a)\ \int_a^1 \frac{dt}{t\ln t},\ 0<a<1;\ b)\ \int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt;\ c)\ \int_0^{+\infty} \frac{x+1}{x^2+1}dx;\ d)\ \int_1^{+\infty} e^{-\sqrt{t}}dt;$$

$$e)\ \int_0^1 \cos^2(\frac{1}{t})dt;\ f)\ \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{\sin t}};\ g)\ \int_1^{+\infty} \frac{\arctan(t)}{t\ln(1+t^2)}dt;\ h)\ \int_1^{+\infty} \cos(x^2)dx;.$$

Exercice 2 : Discuter, suivant les valeurs de α et $\beta \in \mathbb{R}$, la convergence des intégrales généralisées suivantes

$$a)\ \int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha (\ln x)^\beta},\ a>1;\ \ b)\ \int_0^a \frac{dx}{x^\alpha (\ln x)^\beta},\ a<1;\ \ c)\ \int_0^{+\infty} \frac{t\ln t}{(1+t^2)^\alpha}dt.$$

Exercice 3 : Les intégrales impropres suivantes sont-elles convergentes ?

$$a)\ \int_0^1 \frac{\tan t}{t}dt;\ \ b)\ \int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\left(e^{-\frac{1}{t}} - \cos\frac{1}{t}\right)dt;$$

$$c)\ \int_0^1 \frac{dt}{1-\sqrt{t}};\ \ d)\ \int_0^{+\infty} \left[1+t\ln\left(\frac{t}{t+1}\right)\right]dt.$$

Exercice 4 : Donner la nature des intégrales généralisées suivantes

$$a)\ \int_4^{+\infty} \frac{\sin(t)\,dt}{\sqrt{t}+\sin t};\ \ b)\ \int_1^{+\infty} \ln\left(1+\frac{\sin t}{t^\alpha}\right)dt,\ \alpha>0.$$

<u>Exercice 5 :</u> 1) Montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx$ est convergente.

2) Montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{\cos^2 x}{\sqrt{x}} dx$ est divergente.

3) On pose

$$f(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{x}}, \quad g(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{x}} + \frac{\cos^2 x}{x}.$$

Vérifier que, quand $x \longrightarrow +\infty$, $f \backsim g$ et que cependant, les deux intégrales généralisées $\int_1^{+\infty} f(x)\, dx$ et $\int_1^{+\infty} g(x) dx$ ne sont pas de même nature. Expliquer.

Corrigé

Correction de l'exercice 1 :

a) Pour tout $x > 1$, nous avons

$$\int_a^x \frac{dt}{t\ln t} = \int_a^x \frac{d\ln t}{\ln t} = [\ln(|\ln t|)]_a^x = \ln(|\ln x|) - \ln(|\ln a|),$$

qui tend vers $+\infty$ quand $x \longrightarrow 1^-$. ainsi, l'intégrale est divergente.

b) Comme on connait pas de primitive de e^{-t^2}, on doit donc utiliser le critère de comparaison. Le seul problème est au voisinage de $+\infty$. Nous avons

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty} t^2e^{-t^2} = 0.$$

Donc,

$$e^{-t^2} = o\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

Comme $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ est convergente, $\int_1^{+\infty} e^{-t^2}dt$ est aussi convergente. Donc, $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$ est convergente.

c)

$$\int_0^{+\infty} \frac{x+1}{x^2+1}dx \geq \int_0^{+\infty} \frac{x}{x^2+1}dx.$$

$\int_0^{+\infty} \frac{x}{x^2+1}dx$ est divergente. Donc, $\int_0^{+\infty} \frac{x+1}{x^2+1}dx$ est divergente.

d) Le seul problème est au voisinage de $+\infty$. Pour tout $\alpha > 0$, on a

$$t^\alpha e^{-\sqrt{t}} = e^{-\sqrt{t}+\alpha\ln t} \longrightarrow 0, \text{ quand } t \longrightarrow +\infty.$$

En prenant par exemple $\alpha = 2$, on déduit que

$$e^{-\sqrt{t}} = o\left(\frac{1}{t^2}\right) \text{ au voisinage de } +\infty.$$

Par comparaison à une intégrale de Riemann, on déduit que $\int_1^{+\infty} e^{-\sqrt{t}}dt$ est convergente.

e) La fonction $t \longrightarrow \cos^2(1/t)$ est continue sur $]0,1]$. De plus, on a

$$|\cos^2(1/t)| \leq 1.$$

Comme $\int_0^1 dt$ est finie, on en déduit que $\int_0^1 \cos^2(1/t)$ est aussi convergente.

f) Le problème est au voisinage de 0. On a $\dfrac{1}{\sqrt{\sin x}}$ est positive sur $]0,1]$ et

$$\frac{1}{\sqrt{\sin x}} \underset{0}{\backsim} \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

$\int_0^1 \dfrac{dx}{\sqrt{x}}$ est convergente (intégrale de Riemann). Donc, $\int_0^1 \dfrac{dx}{\sqrt{\sin x}}$ est convergente.

g) Le seul problème se situe au voisinage de $+\infty$. Puisque $\arctan x \longrightarrow \dfrac{\pi}{2}$ et $\ln(1+x^2) = \ln\left[x^2(1+\dfrac{1}{x^2})\right] = 2\ln x + \ln(1+\dfrac{1}{x^2}) \underset{+\infty}{\backsim} 2\ln x$, alors

$$\frac{\arctan x}{x\ln(1+x^2)} \underset{+\infty}{\backsim} \frac{\pi}{x\ln x}.$$

$\int_e^{+\infty} \dfrac{\pi}{x\ln x}dx$ est divergente car $\displaystyle\lim_{X\longrightarrow+\infty} \int_e^X \frac{dx}{x\ln x}dx = \lim_{X\longrightarrow+\infty} \int_e^X \frac{d(\ln x)}{\ln x} =$ $\ln|\ln X| = +\infty$. Par conséquent, $\int_1^{+\infty} \dfrac{\arctan x}{x\ln(1+x^2)}dx$ est divergente (car les fonctions considérées sont positives).

h) Le changement de variable $x^2 = t$ ramène l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \cos(x^2)\,dx$ à l'intégrale généralisée $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{\sqrt{t}}dt$. D'après le critère d'Abel, $\int_1^{+\infty} \dfrac{\cos(t)}{\sqrt{t}}dt$ est convergente. Donc, $\int_1^{+\infty} \cos(x^2)\,dx$ est convergente.

<u>Correction de l'exercice 2 :</u> a)

- Si $\alpha > 1$, soit $\gamma \in]1,\alpha[$. Alors, on a

$$\frac{t^\gamma}{t^\alpha(\ln t)^\beta} = \frac{1}{t^{\alpha-\gamma}(\ln t)^\beta} \longrightarrow 0 \text{ quand } t \longrightarrow +\infty.$$

Donc,

$$\frac{1}{t^\alpha(\ln t)^\beta} = o(\frac{1}{t^\gamma}).$$

Puisque $\int_a^{+\infty} \dfrac{dt}{t^\gamma}$ converge, alors $\int_a^{+\infty} \dfrac{dt}{t^\alpha(\ln t)^\beta}$ est aussi convergente.

- Si $\alpha < 1$, soit $\gamma \in]\alpha, 1[$. Alors, on a

$$\frac{t^\gamma}{t^\alpha(\ln t)^\beta} = \frac{t^{\gamma-\alpha}}{(\ln t)^\beta} \longrightarrow 0 \text{ quand } t \longrightarrow +\infty.$$

Donc,

$$\frac{1}{t^\gamma} = o\left(\frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta}\right).$$

Puisque $\int_a^{+\infty} \frac{dt}{t^\gamma}$ diverge, alors $\int_a^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha (\ln t)^\beta}$ est aussi divergente.

• Si $\alpha = 1$, alors la fonction est de la forme $f'f^{-\beta}$. Cette fonction admet une primitive. D'où, pour tout $X > a$, on a

$$\int_a^X \frac{dt}{t(\ln t)^\beta} = \begin{cases} \left[\frac{1}{-\beta+1}(\ln t)^{-\beta+1}\right]_a^X = \frac{1}{-\beta+1}\left[(\ln X)^{-\beta+1} - (\ln a)^{-\beta+1}\right] \text{ si } \beta \neq 1, \\ [\ln|\ln t|]_a^X = \ln|\ln x| - \ln|\ln a|. \end{cases}$$

On déduit donc que $\int_a^{+\infty} \frac{dt}{t(\ln t)^\beta}$ est convergente ssi $\beta > 1$.

En conclusion : $\int_a^{+\infty} \frac{dt}{t(\ln t)^\beta}$ converge ssi $\alpha > 1$ ou $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.

b) Se déduit de a) par le changement de variable $t = \frac{1}{x}$.

c) La fonction $t \longmapsto t\ln t$ se prolonge par continuité à l'origine. Donc, le seul problème se pose au voisinage de $+\infty$. Nous avons

$$\frac{t\ln t}{(1+t^2)^\alpha} \underset{+\infty}{\backsim} \frac{\ln t}{t^{2\alpha-1}}.$$

• Si $\alpha > 1 \Longrightarrow 2\alpha - 1 > 1$. Soit $\gamma \in]1, 2\alpha-1[$. Donc,

$$t^\gamma \frac{\ln t}{t^{2\alpha-1}} = t^{\gamma-(2\alpha-1)} \longrightarrow 0 \text{ quand } t \longrightarrow +\infty.$$

D'où,

$$\frac{\ln t}{t^{2\alpha-1}} = o\left(\frac{1}{t^\gamma}\right).$$

Comme $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\gamma}$ converge alors $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^{2\alpha-1}}dt$ coverge et par suite $\int_1^{+\infty} \frac{t\ln t}{(1+t^2)^\alpha}dt$ est convergente.

• Si $\alpha \leq 1 \Longrightarrow 2\alpha - 1 \leq 1$ et donc $\frac{\ln t}{t^{2\alpha-1}} \geq \frac{1}{t}$ quand t est assez grand. Comme $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t}$ diverge alors $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^{2\alpha-1}}dt$ est aussi divergente.

Correction de l'exercice 3 :

a) La fonction $t \longmapsto \dfrac{\tan t}{t}$ se prolonge par continuité à l'origine. Donc, $\int_0^1 \dfrac{\tan t}{t} dt$ est convergente.

b) La fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{t}[e^{-\frac{1}{t}} - \cos\left(\dfrac{1}{t}\right)]$ est continue sur $[1, +\infty[$. Le problème de convergence de l'intégrale se pose au voisinage de $+\infty$. Pour étudier ce problème, on va faire un développement asymptotique de la fonction au voisinage de $+\infty$. Noua avons, au voisinage de $+\infty$,

$$\begin{aligned} e^{-\frac{1}{t}} - \cos\left(\frac{1}{t}\right) &= 1 - \frac{1}{t} + \frac{1}{2t^2} - \left[1 - \frac{1}{2t^2}\right] + o\left(\frac{1}{t^2}\right) \\ &= -\frac{1}{t} + \frac{1}{t^2} + o\left(\frac{1}{t^2}\right) \end{aligned}$$

c) La fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{1-\sqrt{t}}$ est continue et positive sur $[0, 1[$. Le problème de convergence de l'intégrale se pose au voisinage de 1. Pour étudier ce problème, on fait un développement limité au voisinage de 1. Posons $x = t-1$. Lorsque t tend vers 1, x tend vers 0. On a

$$\begin{aligned} 1 - \sqrt{t} &= 1 - \sqrt{x+1} = 1 - [1 + \frac{x}{2} + o(x)] \\ &= -\frac{x}{2} + o(x) \underset{0}{\backsim} -\frac{x}{2} = \frac{1}{2(1-t)}. \end{aligned}$$

D'où,

$$\frac{1}{1-\sqrt{t}} \underset{1}{\backsim} \frac{1}{2(1-t)}.$$

La fonction $\dfrac{1}{1-t}$ n'est pas intégrable sur $[0, 1[$ (c'est une intégrale de Riemann divergente), on en déduit que $\int_0^1 \dfrac{1}{1-\sqrt{t}} dt$ est divergente.

d) La fonction $t \longmapsto 1+t\ln\left(\dfrac{t}{t+1}\right)$ est continue sur $[0, +\infty[$. Le problème de convergence de l'intégrale se pose au voisinage de $+\infty$. Pour étudier ce problème, on fait un développement asymptotique de la fonction au voisinage de $+\infty$. Nous avons, au voisinage de $+\infty$,

$$\begin{aligned}
\ln\left(\frac{t}{t+1}\right) &= \ln\left(\frac{1}{1+\dfrac{1}{t}}\right) \\
&= -\ln\left(1+\frac{1}{t}\right) \\
&= -\frac{1}{t}-\frac{1}{2t^2}+o\left(\frac{1}{t^2}\right).
\end{aligned}$$

Donc, au voisinage de $+\infty$,

$$1+t\ln\left(\frac{t}{t+1}\right) = -\frac{1}{2t}+o\left(\frac{1}{t}\right).$$

Ainsi, $\int_0^{+\infty}\left[1+t\ln\left(\frac{t}{t+1}\right)\right]dt$ est divergente.

<u>Correction de l'exercice 4 :</u>,

a) Nous avons

$$\begin{aligned}
\frac{\sin(t)}{\sqrt{t}+\sin t} &= \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}\left(\frac{1}{1+\dfrac{\sin(t)}{\sqrt{t}}}\right) = \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}\left[1-\frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}+\frac{\sin^2(t)}{t}+o\left(\frac{\sin^2(t)}{t}\right)\right] \\
&= \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}-\frac{\sin^2(t)}{t}+O\left(\frac{\sin^3(t)}{t\sqrt{t}}\right).
\end{aligned}$$

Puisque les deux intégrales $\int_4^{+\infty}\frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}dt$ et $\int_4^{+\infty}O\left(\frac{\sin^3(t)}{t\sqrt{t}}\right)dt$ sont convergentes, alors $\int_4^{+\infty}\frac{\sin(t)\,dt}{\sqrt{t}+\sin t}$ est de même nature que $\int_4^{+\infty}\frac{\sin^2(t)}{t}dt$. Or,

$$\frac{\sin^2(t)}{t}=\frac{1}{2t}-\frac{\cos 2t}{2t}.$$

$\int_4^{+\infty}\frac{\cos 2t}{t}dt$ est convergente (par parties ou règle d'Abel), $\int_4^{+\infty}\frac{dt}{t}$ est divergente. Donc, $\int_4^{+\infty}\frac{\sin^2(t)}{t}dt$ est divergente. Par conséquent, $\int_4^{+\infty}\frac{\sin(t)\,dt}{\sqrt{t}+\sin t}$ est divergente.

Remarquons que

$$\frac{\sin(t)}{\sqrt{t}+\sin t} \underset{+\infty}{\backsim} \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}},$$

et que cependant, les deux intégrales $\int_4^{+\infty} \frac{\sin(t)\,dt}{\sqrt{t}+\sin t}$ et $\int_4^{+\infty} \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}dt$ n'ont pas le même comportement.

b) Puisque $\alpha > 0$, $\frac{\sin(t)}{t^\alpha} \longrightarrow 0$ quand $t \longrightarrow +\infty$. Ledéveloppement asymptotique de la fonction au voisinage de $+\infty$ donne

$$\ln\left(1+\frac{\sin t}{t^\alpha}\right) = \frac{\sin t}{t^\alpha} - \frac{1}{2}\frac{\sin^2 t}{t^{2\alpha}} + o\left(\frac{\sin^2 t}{t^{2\alpha}}\right).$$

A l'aide d'une intégration par parties ou par application du citère d'Abel, on montre que $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha}dt$ est convergente. Donc, $\int_1^{+\infty} \ln\left(1+\frac{\sin t}{t^\alpha}\right)dt$ est de mêm nature que $\int_1^{+\infty} g(t)dt$ avec $g(t) = \frac{1}{2}\frac{\sin^2 t}{t^{2\alpha}} + o\left(\frac{\sin^2 t}{t^{2\alpha}}\right)$. On a

$$g(t) \underset{+\infty}{\backsim} \frac{1}{2}\frac{\sin^2 t}{t^{2\alpha}}.$$

Comme les deux fonctions sont positives, $\int_1^{+\infty} g(t)dt$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^{2\alpha}}dt$ sont de même nature. Il en résulte donc que $\int_1^{+\infty} \ln\left(1+\frac{\sin t}{t^\alpha}\right)dt$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^{2\alpha}}dt$ sont de même nature. En écrivant

$$\frac{\sin^2 t}{t^{2\alpha}} = \frac{1}{2t^{2\alpha}} - \frac{\cos 2t}{2t^\alpha},$$

on déduit que $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^{2\alpha}}dt$ converge ssi $\alpha > \frac{1}{2}$. D'où, $\int_1^{+\infty} \ln\left(1+\frac{\sin t}{t^\alpha}\right)dt$ converge ssi $\alpha > \frac{1}{2}$.

<u>Correction de l'exercice 5 :</u>

1) $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{\sqrt{t}}dt$ est convergente (critère d'Abel).

2) En écrivant

$$\frac{\cos^2 t}{\sqrt{t}} = \frac{1}{\sqrt{t}} + \frac{\cos 2t}{\sqrt{t}},$$

on déduit que $\int_1^{+\infty} \dfrac{\cos t}{\sqrt{t}} dt$ est divergente.

3) On a

$$f(t) = \frac{\cos t}{\sqrt{t}} \underset{+\infty}{\backsim} g(t) = \frac{\cos t}{\sqrt{t}} + \frac{\cos^2 t}{\sqrt{t}}$$

et que cependant les deux intégrales généralisées $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ et $\int_1^{+\infty} g(t)dt$ ne sont pas de même nature car les deux fonctions ne gardent pas un signe constant au voisinage de $+\infty$.

Chapitre 4

INTEGRALES DOUBLES ET TRIPLES

__Exercice 1 :__
Calculer les intégrales suivantes :

1) $\int\int_\Delta xye^{-x^2+y}dxdy; \quad \Delta = [0,1] \times [1,2]$.

2) $\int\int\int_\Delta xyzdxdydz; \quad \Delta = \{(x,y,z) \,/\, x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ x+y+z \leq 1\}$.

3) $\int\int_\Delta (x+2y)^2\, dxdy$ $\quad \Delta$ est le compact délimité par le triangle de sommets $A(0,0)$, $B(1,1)$ et $C(2,-1)$.

Exercice 4.0.1 *:*
Calculer $\int\int_K (x-y)\, dxdy$ où K est le compact plan délimité par les droites d'é quations $\quad x = 0,\ y = x+2,\ y = -x.$

Exercice 4.0.2 *:*
Déterminer l'aire du compact plan délimité par les courbes d'équation,

$$y = x, \quad y^2 = x.$$

__Exercice 2 :__
Calculer les intégrales suivantes :

1) $\int\int_\Delta \sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}}dxdy;\quad \Delta=\left\{(x,y)\,/\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\leq 1,\ a>0,\ b>0\right\}.$

2) $\int\int_\Delta \dfrac{dxdy}{\sqrt[4]{x}\sqrt{y}};\quad \Delta=\left\{(x,y)\,/\ 0<x\leq 1,\ 1\leq y\leq \dfrac{1}{x}\right\}.$
Poser $x=u,\ y=\dfrac{v}{u}.$

3) $\int\int_\Delta \dfrac{x-y}{x^2+y^2}dxdy;\quad \Delta=\{(x,y)\,/\ y\geq 0,\ x^2+y^2-x\geq 0,\ x^2+y^2-2x\leq 0\}.$

4) $\int\int_\Delta (x+y)^2 e^{x^2-y^2}dxdy;\quad \Delta=\{(x,y)\,/\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ x+y\leq 1\}.$

Exercice 4.0.3 *:*
Calculer l'aire du compact Δ délimité par les droites d'équation $y=ax$ et $y=\dfrac{1}{a}x$, et par les hyperboles d'équation $y=\dfrac{b}{x}$ et $y=\dfrac{1}{bx}$.

Exercice 4.0.4 *:*
Calculer le volume du solide S défini par :

$$S=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/\ x^2+y^2\leq 1;\ x^2+y^2\leq z\leq 4-3\left(x^2+y^2\right)\right\}.$$

<u>Exercice 3 :</u>
Calculer les intégrales suivantes :
1) $\int\int\int_\Delta xyzdxdydz;\quad \Delta=\{(x,y,z)\,/\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ 0\leq z\leq 1,\ x^2+y^2\leq z^2\}.$

2) $\int\int\int_\Delta \dfrac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}};\quad \Delta=\left\{\begin{array}{l}(x,y,z)\,/\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ 0\leq z\leq 1,\\ R_1^2\leq x^2+y^2+z^2\leq R_2^2,\ \ 0\leq R_1<R_2\end{array}\right\}.$

Exercice 4.0.5 *:*
On se propose de calculer l'intégrale généralisée $I=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx$.
1) Montrer que I est convergente.

2) Soit $r>0$. On note C_r le carré de centre 0 et de côté $2r$ et D_r le disque de centre 0 et de rayon r.

a) Montrer que,

$$\int\int_{D_r} e^{-x^2-y^2}dxdy\leq \int\int_{C_r} e^{-x^2-y^2}dxdy\leq \int\int_{D_{r\sqrt{2}}} e^{-x^2-y^2}dxdy.$$

b) Calculer

$$\int\int_{D_r} e^{-x^2-y^2}dxdy.$$

3) Déduire des questions précédentes la valeur des intégrales I et

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\dfrac{x^2}{2}}\, dx.$$

Corrigé

Exercice 1 : *Calculer les intégrales suivantes :*

1) $\int\int_{\Delta} xye^{-x^2+y}dxdy;$ $\qquad \Delta = [0,1] \times [1,2]$.

2) $\int\int\int_{\Delta} xyzdxdydz;$ $\qquad \Delta = \{(x,y,z) \,/\, x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ x+y+z \leq 1\}$.

3) $\int\int_{\Delta} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}dxdy;$ $\qquad \Delta = \left\{(x,y) \,/\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1,\ a > 0,\ b > 0\right\}$.

4) $\int\int_{\Delta} \frac{dxdy}{\sqrt[4]{x}\sqrt{y}};$ $\qquad \Delta = \left\{(x,y) \,/\, 0 < x \leq 1,\ 1 \leq y \leq \frac{1}{x}\right\}$.

Poser $x = u,\ y = \frac{v}{u}$.

5) $\int\int_{\Delta} \frac{x-y}{x^2+y^2}dxdy;$ $\qquad \Delta = \{(x,y) \,/\, y \geq 0,\ x^2+y^2-x \geq 0,\ x^2+y^2-2x \leq 0\}$.

6) $\int\int_{\Delta} (x+y)^2 e^{x^2-y^2}dxdy;$ $\qquad \Delta = \{(x,y) \,/\, x \geq 0,\ y \geq 0,\ x+y \leq 1\}$.

7) $\int\int_{\Delta} (x+2y)^2 dxdy$ $\qquad$ Δ *est le compact délimité par le triangle de sommets* $A(0,0),\ B(1,1)$ *et* $C(2,-1)$.

8) $\int\int\int_{\Delta} xyzdxdydz;$ $\qquad \Delta = \{(x,y,z) \,/\, x \geq 0,\ y \geq 0,\ 0 \leq z \leq 1,\ x^2+y^2 \leq z^2\}$.

9) $\int\int\int_{\Delta} \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}};$ $\qquad \Delta = \left\{ \begin{array}{l} (x,y,z) \,/\, x \geq 0,\, y \geq 0,\, 0 \leq z \leq 1, \\ R_1^2 \leq x^2+y^2+z^2 \leq R_2^2,\ \ 0 \leq R_1 < R_2 \end{array} \right\}$.

Corrigé

1) $\int\int_{\Delta} xye^{-x^2+y}dxdy = \left(\int_0^1 xe^{-x^2}dx\right)\left(\int_1^2 ye^{y}dy\right) = \frac{e(e-1)}{2}$.

2) $\int\int\int_{\Delta} xyzdxdydz$. *On met* Δ *sous forme hiérarchique*

$\Delta = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / 0 \leq z \leq 1; 0 \leq y \leq 1-z; 0 \leq x \leq 1-y-z\right\}$.

D'où,

$$\int_0^1 z\left[\int_0^{1-z} y\left(\int_0^{1-y-z} xdx\right)dy\right]dz = \frac{1}{720}.$$

3) *Faisons le changement de variable en coordonnées elliptique*

$$\left\{ \begin{array}{l} x = ar\cos\theta \\ y = br\sin\theta,\ \theta \in [0,2\pi],\ r \in [0,1]. \end{array} \right.$$

Ce changement de variable transforme Δ au compact plan K défini par :

$$K = \left\{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2/\theta \in [0,2\pi], r \in [0,1]\right\}.$$

Le jacobien de cette transfoemation est abr. D'où,

$$\begin{aligned}
\int\int_\Delta \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}dxdy &= ab\int\int_K r\sqrt{1-r^2}drd\theta \\
&= ab\int_{r=0}^{r=1} r\sqrt{1-r^2}dr\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} d\theta \\
&= \frac{2\pi ab}{3}\left[\left(1-r^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_{r=0}^{r=1} = \frac{2\pi ab}{3}.
\end{aligned}$$

4) Posons

$$\left\{\begin{array}{l} x = u \\ y = \dfrac{v}{u}, \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} u = x \\ v = xy. \end{array}\right.$$

Ce changement de variable transforme le domaine Δ au domaine plan D défini par :

$$K = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2/0 < u \leq 1;\ u < v \leq 1\right\}.$$

La matrice jacobienne est donnée par :

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{v}{u^2} & \dfrac{1}{u} \end{pmatrix},$$

Le lacobien est donv $\dfrac{1}{u}$. D'où,

$$\begin{aligned}
\int\int_\Delta \frac{dxdy}{\sqrt[4]{x}\sqrt{y}} &= \int\int_D \frac{dudv}{u^{\frac{3}{4}}v^{\frac{1}{2}}} = \left(\int_{u=0}^{u=1}\frac{du}{u^{\frac{3}{4}}}\right)\left(\int_{v=u}^{v=1}\frac{dv}{v^{\frac{1}{2}}}\right) \\
&= \int_{u=0}^{u=1} u^{-\frac{-3}{4}}\left[2v^{\frac{1}{2}}\right]_{v=u}^{v=1} du = \int_{u=0}^{u=1} u^{-\frac{-3}{4}}\left(2-2u^{\frac{1}{2}}\right)du \\
&= 2\int_{u=0}^{u=1}\left(u^{-\frac{-3}{4}} - u^{\frac{-1}{4}}\right)du = 2\left[4u^{\frac{1}{4}} - \frac{4}{3}u^{\frac{3}{4}}\right]_0^1 = \frac{16}{3}.
\end{aligned}$$

5) Faisons le changement en coordonnées polaires

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta. \end{cases}$$

Cherchons les bornes de r et θ. Les inéquations

$$x^2+y^2-x \geq 0,\ \ x^2+y^2-2x \leq 0,$$

sont équivalentes à

$$r-\cos\theta \geq 0 \ \text{et}\ r-2\cos\theta \leq 0.$$

Donc, le compact Δ est transformé au compact plan

$$K = \left\{(r,\theta)\in\mathbb{R}^2/\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right],\ r\in[\cos\theta, 2\cos\theta]\right\}.$$

La matrice jacobienne en r et θ est donc donnée par :

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}.$$

La valeur absolue du jacobien est r. Donc

$$\begin{aligned}
\int\!\!\int_\Delta \frac{x-y}{x^2+y^2}dxdy &= \int\!\!\int_K (\cos\theta-\sin\theta)\,drd\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[(\cos\theta-\sin\theta)\left(\int_{r=\cos\theta}^{r=2\cos\theta} dr\right)\right]d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos^2\theta-\sin\theta\cos\theta\right)d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}-\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)d\theta \\
&= \frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

6) Posons

$$\begin{cases} u = x+y \\ v = x-y, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{u+v}{2} \\ y = \dfrac{u-v}{2}. \end{cases}$$

Le changement de variable transforme le compact Δ *au compact plan* K *défini par :*

$$K = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 / u \in [0,1]\,,\ v \in [-u,u]\right\}.$$

La matrice jacobienne en u et v est donc donnée par :

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

La valeur absolue du jacobien est $\dfrac{1}{2}$. *Donc*

$$\begin{aligned} \int\int_{\Delta} (x+y)^2 e^{x^2-y^2} dxdy &= \frac{1}{2}\int\int_K u^2 e^{uv} dudv \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 u^2 \left(\int_{v=-u}^{v=u} e^{uv} dv\right) du \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 u\left(e^{u^2} - e^{-u^2}\right) = \frac{1}{4}\left[e^{u^2} + e^{-u^2}\right]_0^1 \\ &= \frac{e-1}{2}. \end{aligned}$$

7)

- *La droite AB a pour équation* $y = x$,
- *La droite BC a pour équation* $y = -2x+3$,
- *La droite AC a pour équation* $y = -\dfrac{x}{2}$.

Nous partageons notre domaine Δ *en deux domaines* Δ_1 *et* Δ_2. *Doù,*

$$I = \int_{x=0}^{x=1}\left(\int_{y=\frac{-x}{2}}^{y=x} (x+2y)^2 dy\right) dx + \int_{x=0}^{x=1}\left(\int_{y=\frac{-x}{2}}^{y=2x+3} (x+2y)^2 dy\right) dx$$

$$= \frac{9}{2}\left[\int_{x=0}^{x=1} x^3 dx - \int_{x=1}^{x=2} (x-2)^3 dx\right] = \frac{9}{4}.$$

8) Faisons le changement de variable en coordonnées cylindriques

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z. \end{cases}$$

Le changement de variable transforme le compact Δ au compact K défini par :

$$K = \left\{(r,\theta,z) \in \mathbb{R}^3 / r \in [0,z]\,,\ \theta \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right],\ z \in [0,1]\right\}.$$

La matrice jacobienne en r, θ et z est donc donnée par :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La valeur absolue du jacobien est r. Donc

$$\begin{aligned} \int\int\int_{\Delta} xyzdxdydz &= \int\int\int_{K} r^3\cos\theta\sin\theta dr d\theta \\ &= \frac{1}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\theta\right)\left[\int_0^1\left(\int_0^z r^3 dr\right)dz\right] \\ &= \frac{1}{16}\left([-\cos 2\theta]_0^{\frac{\pi}{2}}\right)\left[\frac{z^5}{5}\right]_0^1 = \frac{1}{40}. \end{aligned}$$

9) Faisons le changement de variable en coordonnées sphériques

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\phi \\ y = r\sin\theta\sin\phi \\ z = r\cos\theta. \end{cases}$$

Le changement de variable en coordonnées sphériques transforme le compact Δ en compact K de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$K = \left\{(r,\theta,\phi) \in \mathbb{R}^3 / r \in [R_1,R_2]\,,\ \theta \in [0,\pi]\,,\ \phi \in [0,2\pi]\right\}.$$

L'application φ définie par :

$$(x,y,z) = \varphi\left(r,\theta,\phi\right),$$

est un difféomorphisme de $\overset{o}{K}$ sur $\overset{o}{\Delta}$. Donc,

$$\begin{aligned} \int\int\int_{\Delta} \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} &= \int\int\int_{K} r\sin\theta dr d\theta d\phi \\ &= \left(\int_{R_1}^{R_2} r dr\right)\left(\int_0^{\pi} \sin\theta d\theta\right)\left(\int_0^{2\pi} d\phi\right) \\ &= 2\pi\left(R_2^2 - R_1^2\right). \end{aligned}$$

Exercice 2 : *Calculer* $\int\int_K (x-y)\,dxdy$ *où* K *est le compact plan délimité par les droites d'équations*

$$x=0,\ y=x+2,\ y=-x.$$

Corrigé *Une description hiérarchique du compact* K *est*

$$K=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/x\in[-1,0]\,,y\in[-x,x+2]\right\}.$$

D'où,

$$\begin{aligned}\int\int_K (x-y)dxdy &= \int_{-1}^{0}\left[\int_{-x}^{x+2}(x-y)\,dy\right]dx\\ &= \int_{-1}^{0}\left[xy-\frac{y^2}{2}\right]_{-x}^{x+2}dx\\ &= 2\int_{-1}^{0}\left(x^2-1\right)dx=-\frac{4}{3}.\end{aligned}$$

Exercice 3 : *Déterminer l'aire du compact plan délimité par les courbes d'équation,*

$$y=x,\quad y^2=x.$$

Corrigé *Une description hiérarchique du compact* K *est*

$$K=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/x\in[0,1]\,,y\in\left[x,\sqrt{x}\right]\right\}.$$

D'où,

$$\begin{aligned}Aire(K) &= \int\int_K dxdy=\int_0^1\left(\int_x^{\sqrt{x}}dy\right)dx\\ &= \int_0^1\left(\sqrt{x}-x\right)dx=\frac{1}{6}.\end{aligned}$$

Exercice 4 : *Calculer l'aire du compact* Δ *délimité par les droites d'équation* $y=ax$ *et* $y=\dfrac{1}{a}x$*, et par les hyperboles d'équation* $y=\dfrac{b}{x}$ *et* $y=\dfrac{1}{bx}$*.*

Corrigé *Nous avons*

$$(x,y)\in\Delta \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{b}\leq xy\leq b \;et\; \frac{1}{a}\leq \frac{y}{x}\leq a.$$

Posons

$$u=xy \quad et\; v=\frac{y}{x}.$$

D'où,

$$(x,y)\in\Delta \;\Leftrightarrow\; (u,v)\in\left[\frac{1}{b},b\right]\times\left[\frac{1}{a},a\right].$$

On a

$$x=\sqrt{\frac{u}{v}} \;et\; y=\sqrt{uv}.$$

la matrice jacobienne en u et v est donc donnée par :

$$\begin{pmatrix} \dfrac{1}{2\sqrt{uv}} & -\dfrac{\sqrt{u}}{2v\sqrt{v}} \\ \dfrac{\sqrt{v}}{2\sqrt{u}} & \dfrac{\sqrt{u}}{2\sqrt{v}} \end{pmatrix}.$$

La valeur absolue du jacobien est $\dfrac{1}{2v}$. *Donc l'aire de* Δ *est*

$$Aire\;(\Delta)=\int_{u=\frac{1}{b}}^{b}\int_{v=\frac{1}{a}}^{a}\frac{dudv}{2v}=\left(b-\frac{1}{b}\right)\ln(a).$$

Exercice 5 : *Calculer le volume du solide S défini par :*

$$S=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/\; x^2+y^2\leq 1;\; x^2+y^2\leq z\leq 4-3\left(x^2+y^2\right)\right\}.$$

Corrigé *Le volume V du solide S est défini par :*

$$\begin{aligned} V &= \int\int\int_S dxdydz=\int_{-1}^{1}\left(\left[\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\left(\int_{(x^2+y^2)}^{4-3\left(x^2+y^2\right)}dz\right)\right]dy\right)dx \\ &= 4\int_{-1}^{1}\left(\left[\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\left(1-\left(x^2+y^2\right)\right)\right]dy\right)dx=4\int\int_{x^2+y^2\leq 1}\left(1-\left(x^2+y^2\right)\right)dxdy. \end{aligned}$$

Le passage en coordonnées polaires donne

$$V=4\int_0^{2\pi}\int_0^1\left(1-r^2\right)rdrd\theta=4\left(\int_0^{2\pi}d\theta\right)\int_0^1 r\left(1-r^2\right)dr=2\pi.$$

Exercice 6 : *On se propose de calculer l'intégrale généralisée* $I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$.

1) Montrer que I *est convergente.*

2) Soit $r > 0$. *On note* C_r *le carré de centre 0 et de côté* $2r$ *et* D_r *le disque de centre* 0 *et de rayon* r.

a) Montrer que,

$$\int\int_{D_r} e^{-x^2-y^2} dxdy \leq \int\int_{C_r} e^{-x^2-y^2} dxdy \leq \int\int_{D_{r\sqrt{2}}} e^{-x^2-y^2} dxdy.$$

b) Calculer

$$\int\int_{D_r} e^{-x^2-y^2} dxdy.$$

3) Déduire des questions précédentes la valeur des intégrales I *et* $J = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\dfrac{x^2}{2}} dx$.

Corrigé

1) La fonction $x \longmapsto e^{-x^2}$ *est continue sur* $\mathbb{R}$. *Donc, localement intégrable sur* $\mathbb{R}$. *Au voisinage de* $\pm\infty$, *nous avons*

$$e^{-x^2} = o(\frac{1}{x^2}).$$

Donc, l'intégrale est convergente.

2)

a) Puisque

$$D_r \subset C_r \subset D_{r\sqrt{2}},$$

et f *est positive sur* $\mathbb{R}$, *alors on a*

$$\int_{D_r} e^{-x^2-y^2} dxdy \leq \int_{C_r} e^{-x^2-y^2} dxdy \leq \int_{D_{r\sqrt{2}}} e^{-x^2-y^2} dxdy.$$

On a,

$$\int_{C_r} e^{-x^2-y^2} dxdy = \int_{x=-r}^{x=r} \int_{y=-r}^{y=r} e^{-x^2-y^2} dxdy = \left(\int_{x=-r}^{x=r} e^{-x^2} dx\right)^2.$$

b) En faisant le changement de variable en coordonnées polaires, $x = R\cos\theta$, $y = R\sin\theta$, $R \in [0, r]$, $\theta \in [0, 2\pi]$, *on obtient*

$$\int_{D_r} e^{-x^2-y^2} dxdy = \int_{R=0}^{R=r} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} e^{-R^2} RdRd\theta = \pi\left(1 - e^{-r^2}\right).$$

3) Des questions a) et b), on obtient,

$$\pi\left(1-e^{-r^2}\right) \leq \left(\int_{x=-r}^{x=r} e^{-x^2}dx\right)^2 \leq \pi\left(1-e^{-2r^2}\right).$$

En faisant tendre r vers $+\infty$, on déduit que

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx\right)^2 = \pi.$$

Le changement de variable $x = \dfrac{y}{\sqrt{2}}$ donne

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\dfrac{y^2}{2}}\, dy\right)^2 = \pi.$$

Donc,

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\dfrac{y^2}{2}}\, dy = \sqrt{\pi}.$$

Corrigé

Exercice 1 :