UNIVERSITE MOHAMMED PREMIER
ECOLE NATIONALE DES SCIENCES APPLIQUEES
OUJDA-MAROC

Filière : STPI-CP2 — Année universitaire : 2015-2016
Module : Analyse 3 — Enseignant : M. Derouich

Fiche TD N° : 1

Exercice 1. : Les fonctions suivantes sont-elles des distances sur $\mathbb{R}$?

$$d_1(x,y) = (x-y)^2 ;\ d_2(x,y) = \sqrt{|y-x|};\ d_3(x,y) = \left|y^3 - x^3\right| ;$$
$$d_4(x,y) = \left|y^2 - x^2\right| ;\ d_5(x,y) = |y-2x| .$$

Exercice 2. : Soit Φ une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^+$, strictement croissante, vérifiant $\Phi(0) = 0$ et qui est sous-additive ie., $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^+)^2$,

$$\Phi(x+y) \leq \Phi(x) + \Phi(y) .$$

1) Montrer que si d est une distance sur un ensemble E, $d_* = \Phi o d$ en est aussi une.

2) Montrer que si d est une distance sur E,

$$d_1 = \frac{d}{1+d};\quad d_2 = \ln(1+d) ,$$

sont des distances sur E.

Exercice 3. : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction strictement croissante. On définit d de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^+$ par :

$$d(x,y) = |f(y) - f(x)| ,$$

1) Montrer que d est une distance sur $\mathbb{R}$.

2) On prend $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$; la distance d correspondante est-elle équivalente à la distance d_1 définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $d_1(x,y) = |y-x|$?

Exercice 4. : Soit d la distance usuelle sur $\mathbb{R}$ définie par : $d(x,y) = |y-x|$ et d_1 l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $d_1(x,y) = |\arctan(y) - \arctan(x)|$.

1) Montrer que d_1 est une distance sur $\mathbb{R}$. $\mathbb{R}$ est-il borné pour la distance d_1?

2) Décrire et représenter la boule ouverte $B(0,1)$ relativement à d_1.

3) Les distances d et d_1 sont-elles équivalentes ?

Exercice 5. : Soit a et b deux réels strictement positifs. On pose

$$\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \mathbf{N}(x,y)=\sqrt{a^2x^2+b^2y^2}.$$

On rappelle que la norme $\mathbf{N}_2$ est définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $\mathbf{N}_2(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$.

1) Prouver que $\mathbf{N}$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$. Que peut-on dire des normes $\mathbf{N}$ et $\mathbf{N}_2$?

2) Déterminer et dessiner la boule fermée de centre 0 et de rayon 1 pour les deux normes $\mathbf{N}$ et $\mathbf{N}_2$.

3) Déterminer p et q tel que

$$\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ p\,\mathbf{N}_2(x,y)\le\mathbf{N}(x,y)\le q\,\mathbf{N}_2(x,y).$$

Exercice 6. : Soit $\mathbb{R}^n$ muni d'une norme $\|\,.\,\|$.

1) Montrer que pour tous x, y éléments de $\mathbb{R}^n$, on a

$$|\|x\|-\|y\||\le\|x-y\|\,.$$

2) Si $x\neq 0$ et $y\neq 0$, montrer que

$$\|x\|\left\|\frac{x}{\|x\|}-\frac{y}{\|y\|}\right\|\le 2\,\|x-y\|\,,$$
$$\|x-y\|\ge\frac{1}{2}\sup\left[\|x\|\,,\|y\|\right]\cdot\left\|\frac{x}{\|x\|}-\frac{y}{\|y\|}\right\|.$$