UNIVERSITE MOHAMMED PREMIER
ECOLE NATIONALE DES SCIENCES APPLIQUEES
OUJDA-MAROC

Filière : STPI-CP2 — Année universitaire : 2015 - 2016
Module : Analyse 3 — Enseignant : M. Derouich

Fiche TD $N°$: 2

Exercice 1. : Montrer que

1) Toute intersection d'ensembles fermés de E est fermée dans E.

2) Toute réunion finie d'ensembles fermés de E est fermée dans E.

Exercice 2. : Soit $a \in E$.

Montrer que la sphère $S(a, r)$, de centre a et de rayon r, de E est un ensemble fermé dans E.

Exercice 3. :

1. Soit $a \in E$, montrer que $\{a\}$ est fermé dans E.
2. Montrer que tout sous-ensemble fini de E est fermé dans E.

Montrer que tout sous-ensemble fini de E est fermé dans E.

Exercice 4. : Soit A une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$. Montrer que $\sup A$ et $\inf A$ sont des éléments de $\overline{A}$.

Exercice 5. : Soit A une partie de E. Montrer que

1) A est fermée $\Longleftrightarrow A = \overline{A}$.

2) A est ouverte $\Longleftrightarrow A = \overset{0}{A}$.

3) Soit $\mathbb{R}$ muni de la métrique habituelle. On pose

$$A = (\mathbb{Q} \cap]-1, 0[) \cup]0, 1[\cup]1, 2[\cup \{3\}.$$

Déterminer $\overset{0}{A}$, $\overline{A}$, $\overset{0}{\overline{A}}$, $\overline{\overset{0}{A}}$ et vérifier qu'ils sont tous distincts.

Exercice 6. : Soit A une partie non vide de E. Pour $x \in E$, on pose

$$d(x, A) = \inf_{y \in A} [d(x, y)]\,, \text{ (distance du point } x \text{à } A).$$

Prouver que

1) $d(x, A) = 0 \Leftrightarrow x \in \overline{A}$.

2) $\forall\,(x, y) \in E^2$, $|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$.

Exercice 7. : Soient A et B deux parties non vides de E. Montrer que

1) $\overset{0}{\widehat{A \cap B}} = \overset{0}{A} \cap \overset{0}{B}$.

2) $\overset{0}{A} \cup \overset{0}{B} \subset \overset{0}{\widehat{A \cup B}}$.

3) $\overset{0}{\complement_A} = \complement_{\overline{A}}$.

4) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

5) $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.

6) Montrer par des exemples simples qu'en général, on a pas

$$\overset{0}{\widehat{A \cup B}} = \overset{0}{A} \cup \overset{0}{B}; \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

Exercice 8. : Les ensembles suivants sont-ils compacts ? Justifier votre réponse.

a) $\mathbb{Z}$; b) $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$; c) $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \ldots \times [a_p, b_p]$.

d) Une union finie de réels.

e) Une union infinie de réels distincts.

f) La boule fermée de centre a et de rayon $r > 0$ dans $\mathbb{R}^p$.

Exercice 9. : Soit (a_n) une suite d'éléments de $\mathbb{R}^p$ de limite $a \in \mathbb{R}^p$. Le sous-ensemble $A = \{a_n; n \in \mathbb{N}\} \cup \{a\}$ est-il compact dans $\mathbb{R}^p$?