UNIVERSITE MOHAMMED PREMIER
ECOLE NATIONALE DES SCIENCES APPLIQUEES
OUJDA-MAROC

Filière : STPI-CP2 | Année universitaire : 2015 - 2016

Module : Analyse 3 | Enseignant : M. Derouich

Fiche TD $N°$: 3

Exercice 1. : Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|y|}{x^2} \exp\left(-\dfrac{|y|}{x^2}\right) & \text{si} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et φ_λ la restriction de f à l'ensemble $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y = \lambda x\right\}$. Déterminer la limite de φ_λ au point $(0,0)$.
2. Soit ψ la restriction de f à l'ensemble $B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y = x^2\right\}$. Calculer la limite de ψ au point $(0,0)$.
3. Conclure.

Exercice 2. : Etudier la limite à l'origine des fonctions suivantes :

a) $f(x,y) = \dfrac{1-\cos(xy)}{x^2y^2}$; b) $g(x,y) = \dfrac{3x-y^2}{x^2+y^2}$; c) $h(x,y) = \dfrac{xy+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

d) $s(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$; e) $t(x,y) = \dfrac{x^2-y^2-1}{x} tgx$.

Exercice 3. : Etudier la continuité au point $(0,0)$ des fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définies pour chaque couple (x,y) de $\mathbb{R}^2$ par :

a) $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x+y)^2}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases},$$

b) $$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

c) $$h(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Exercice 4. : Peut-on prolonger par continuité au point $(0,0)$ les fonctions suivantes ?

1. $f(x,y) = \dfrac{1-\cos\sqrt{xy}}{y}$ si $(x,y) \in A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2/xy > 0\right\}$.
2. $g(x,y) = \left(x^2+y^2\right)^x$ si $(x,y) \neq (0,0)$.
3. $h(x,y) = \dfrac{\sqrt{4-x^2-y^2}-2}{\sqrt{x^2+y^2}}$ si $(x,y) \neq (0,0)$.

Exercice 5. : Soit A un compact de $\mathbb{R}^n$ muni d'une distance d et $f : A \longrightarrow A$ telle que

$$\forall (x,y) \in A^2,\ x \neq y : d(f(x), f(y)) < d(x,y).$$

1. Montrer que la fonction $x \mapsto d(x, f(x))$ est continue sur A et atteint sa borne inférieure en un pint $x_0 \in A$.
2. En déduire que $f(x_0) = x_0$ (théorème du pont fixe).

Exercice 6. : Soient f et g deux applications continues de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$. Montrer que

1. $A = \{x \in \mathbb{R}^n / \ f(x) = g(x)\}$ est fermé.
2. $B = \{x \in \mathbb{R}^n / \ 1 < f(x) < 2\}$ est ouvert.
3. $C = \{x \in \mathbb{R}^n / \ f(x) \leq g(x)\}$ est fermé.
4. $D = \{x \in \mathbb{R}^n / \ f(x) \neq g(x)\}$ est ouvert.

Exercice 7. : Que peut-on dire des ensembles suivants ?

1. $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2/xy = 1\}$.
2. $B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2/0 < x^2+y^2 < 1\right\}$.
3. $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3/x^2+xy+y^2 < e^{z+x}\}$.

Exercice 8. : Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}^n$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on pose $d(x,A) = \inf\limits_{y\in A} d(x,y)$.

1. Montrer que $d(x,A) = 0 \Leftrightarrow x \in \overline{A}$.
2. Montrer que pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$, on a $|d(x,A) - d(y,A)| \leq d(x,y)$. En déduire que la fonction $x \longrightarrow d(x,A)$ est continue.
3. On suppose que A est compact et $x \notin A$. Montrer que $d(x,A) > 0$ et qu'il existe $a \in A$ tel que $d(x,A) = d(x,a)$.
4. Soit B une partie non vide de $\mathbb{R}^n$.
   Montrer que $F = \{x \in \mathbb{R}^n / \ d(x,A) = d(x,B)\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^n$.