



Exercice 1. :

Soit V le tableau suivant :
$$V = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le trace de V
2. Déterminer les différentes valeurs propres de V
3. Trouver un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda = 0$
4. Déterminer des vecteurs propres orthonormés de V associés aux valeurs propres de V différentes de 0

Exercice 2. :

Soit X le tableau suivant :
$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On considère les six vecteurs x_1, x_2, \dots, x_6 de \mathbb{R}^3 (muni de la métrique euclidienne usuelle) dont les composantes sont données par les lignes de X . On pose $m_i = 1/6$ pour $i = 1; 2; \dots, 6$

1. Montrer que le nuage N de six vecteurs est centré à l'origine de \mathbb{R}^3 . Calculer
$$V = 1/6 \sum_{i=1}^6 x_i x_i'$$
2. Calculer I_G , moment d'inertie de N par rapport à l'origine
3. Déterminer les différentes valeurs propres de V
4. Déduire la dimension de l'espace qui contient le nuage des individus
5. Trouver un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda = 0$
6. Déterminer des vecteurs propres orthonormés de V associés aux valeurs propres de V différentes de 0, et représenter N dans le sous-espace de \mathbb{R}^3 engendré par ces vecteurs.

Exercice 3. :

On considère Le tableau Y de notes sur 20 obtenues par 9 élèves en mathématiques, physique , français, et anglais.(n=9 individus , p=4 variables) :

	mathématiques	physique	français	anglais
Jean	6.0	6.0	5.0	5.5
Aline	8.0	8.0	8.0	8.0
Annie	6.0	7.0	11.0	9.5
Monique	14.5	14.5	15.5	15.0
Didier	14.0	14.0	12.0	12.5
André	11.0	10.0	5.5	7.0
Pierre	5.5	7.0	14.0	11.5
Brigitte	13.0	12.5	8.5	9.5
Evelyne	9.0	9.5	12.5	12.0

- montrer que le centre de gravité est donné par le vecteur : $G = \begin{pmatrix} 9.67 \\ 9.83 \\ 10.22 \\ 10.06 \end{pmatrix}$.
- On désire soumettre le tableau Y à un ACP. Pour cela on est conduit à rechercher les vecteur propre de la matrice $V = 1/9X'X$ des variances-covariances des cinq variables, qui est

$$V = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 11.389 & 9.917 & 2.657 & 4.824 \\ \hline 9.917 & 8.944 & 4.120 & 5.481 \\ \hline 2.657 & 4.120 & 12.062 & 9.293 \\ \hline 4.824 & 5.481 & 9.293 & 7.914 \\ \hline \end{array}$$

- Indiquer la transformation qui permet de passer de la matrice Y à la matrice X. Calculer la première ligne de X
- Calculer I_G , moment d'inertie de N par rapport à l'origine
- Les deux plus grandes valeurs propres de la matrice V des variances-covariances sont $\lambda_1 = 28.253, \lambda_2 = 12.075$. Quels sont les taux d'inertie expliquée par chacun des deux axes factoriels correspondant ? En limitant la représentation à l'espace des 2 premiers facteurs. Quel est le taux d'inertie totale expliquée par cette représentation ? que peut-on en conclure ?

- d- Les deux vecteurs propres normés de V sont donnés dans le tableau ci-dessous :

	1	2
Maths	0.515	-0.567
Physique	0.507	-0.372
Français	0.492	0.650
Anglais	0.485	0.323

Calculer les coordonnées de " Jean " sur les deux axes factoriels.

- Calculer les coefficients de corrélation linéaire entre le premier facteur et les 5 variables
- Les corrélations entre les variables et les autres facteurs sont données ci-dessous

	1	2	3	4
math	0.81	-0.584	0.01	-0.02
phys	0.90	-0.432	-0.03	0.02
fran	0.75	0.651	-0.02	-0.01
ang	0.92	0.399	0.04	0.02

Donner brièvement un interprétation possible pour les 2 facteurs.

- En utilisant les résultats obtenus à la première et à la troisième question, calculer le carré du cosinus de l'angle α entre $\overrightarrow{Gu_1}$ et un axe Δ_1 de vecteur directeur unitaire a_1 (l'indice ponctuel de la représentation de " Jean " sur le premier axe factoriel). Puis sur le plan des deux premiers facteurs. Conclure.