UNIVERSITE MOHAMMED PREMIER
ECOLE NATIONALE DES SCIENCES APPLIQUEES
OUJDA-MAROC

Filière : STPI-CP2 — Année universitaire : 2015 - 2016
Module : Analyse 4 — Enseignant : M. Derouich

Fiche TD $N°$: 5

Exercice 1. :

Calculer les intégrales suivantes :

1) $\int\int_{\Delta} xye^{-x^2+y}dxdy; \quad \Delta = [0,1] \times [1,2]$.

2) $\int\int\int_{\Delta} xyzdxdydz; \quad \Delta = \{(x,y,z)\ /\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ x+y+z \leq 1\}$.

3) $\int\int_{\Delta} (x+2y)^2\, dxdy$ — Δ est le compact délimité par le triangle de sommets $A(0,0)$, $B(1,1)$ et $C(2,-1)$.

Exercice 2. :

Calculer $\int\int_K (x-y)\, dxdy$ où K est le compact plan délimité par les droites d'é quations $x = 0,\ y = x+2,\ y = -x$.

Exercice 3. :

Déterminer l'aire du compact plan délimité par les courbes d'équation,

$$y = x, \quad y^2 = x.$$

Exercice 4. :

Calculer les intégrales suivantes :

1) $\int\int_{\Delta} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}dxdy; \quad \Delta = \left\{(x,y)\ /\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1,\ a > 0,\ b > 0\right\}$.

2) $\int\int_{\Delta} \frac{dxdy}{\sqrt[4]{x}\sqrt{y}}; \quad \Delta = \left\{(x,y)\ /\ 0 < x \leq 1,\ 1 \leq y \leq \frac{1}{x}\right\}$.
Poser $x = u$, $y = \frac{v}{u}$.

3) $\int\int_{\Delta} \frac{x-y}{x^2+y^2}dxdy; \quad \Delta = \{(x,y)\ /\ y \geq 0,\ x^2+y^2-x \geq 0,\ x^2+y^2-2x \leq 0\}$.

4) $\int\int_{\Delta} (x+y)^2\, e^{x^2-y^2}dxdy; \quad \Delta = \{(x,y)\ /\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ x+y \leq 1\}$.

Exercice 5. :

Calculer l'aire du compact Δ délimité par les droites d'équation $y = ax$ et $y = \frac{1}{a}x$, et par les hyperboles d'équation $y = \frac{b}{x}$ et $y = \frac{1}{bx}$.

Exercice 6. :

Calculer le volume du solide S défini par :

$$S = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \ x^2 + y^2 \leq 1; \ x^2 + y^2 \leq z \leq 4 - 3\left(x^2 + y^2\right) \right\}.$$

Exercice 7. :

Calculer les intégrales suivantes :

1) $\int\int\int_\Delta xyzdxdydz$; $\qquad \Delta = \left\{ (x,y,z) \ / \ x \geq 0, \ y \geq 0, \ 0 \leq z \leq 1, \ x^2 + y^2 \leq z^2 \right\}.$

2) $\int\int\int_\Delta \dfrac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$; $\quad \Delta = \left\{ \begin{array}{l} (x,y,z) \ / \ x \geq 0, y \geq 0, 0 \leq z \leq 1, \\ R_1^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq R_2^2, \ 0 \leq R_1 < R_2 \end{array} \right\}.$

Exercice 8. :

On se propose de calculer l'intégrale généralisée $I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$.

1) Montrer que I est convergente.

2) Soit $r > 0$. On note C_r le carré de centre 0 et de côté $2r$ et D_r le disque de centre 0 et de rayon r.

a) Montrer que,

$$\int\int_{D_r} e^{-x^2-y^2} dxdy \leq \int\int_{C_r} e^{-x^2-y^2} dxdy \leq \int\int_{D_{r\sqrt{2}}} e^{-x^2-y^2} dxdy.$$

b) Calculer

$$\int\int_{D_r} e^{-x^2-y^2} dxdy.$$

3) Déduire des questions précédentes la valeur des intégrales I et

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$