CHAPITRE 2 : Applications de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$

M. Derouich

16 avril 2017

2.1 Définition

Définition 1.1

Une fonction à n variables réelles à valeurs dans $\mathbb{R}$ est une application de D (une partie de $\mathbb{R}^n$) ou $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$

$$\begin{array}{rcl} f : D \subseteq \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) & \longmapsto & f(x) = f(x_1, \cdots, x_n) \end{array}$$

(D :Domain de définition de f).

Exemple 1

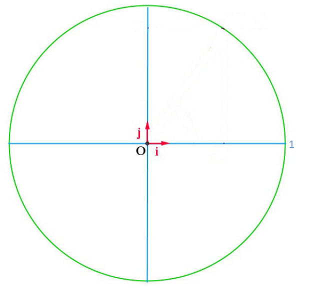
1. $f(x,y) = ax + by$ *(fonction linéaire)* $g(x,y) = ax + by + c$ *(fonction affine)*
   $h(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ *(fonction quadratique)*
2. $f(x,y) = \frac{x+y}{xy}$ *est une fonction avec*
   $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \neq 0; y \neq 0\}$
3. $f(x,y,z) = \frac{xyz}{\sqrt{1-(x^2+y^2+z^2)}}$ *est une fonction de trois variables dont*
   $D_f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$

Remarque 1.1

contrairement à $\mathbb{R}$ (où les domines de définitions sont souvent des intervalles), les domaines de définitions dans $\mathbb{R}^n$ sont souvent compliqués et particulière et son définit par des inéquations ($\neq$ exemple (2)) ou par des inégalités ($>, <, \geq, \leq$ exemple (3)).

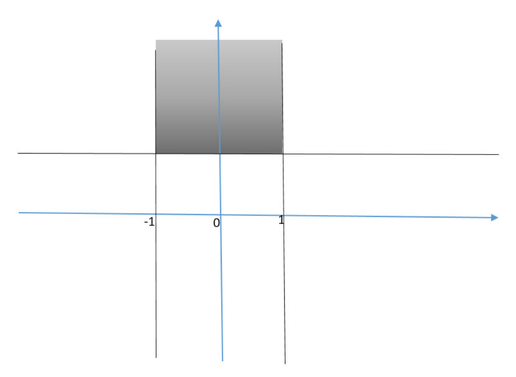
Exemple 2

1. $f(x,y) = \frac{2^{xy}}{\sqrt{1-(x^2+y^2)}}$
   $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 < 1\}$ *l'intérieur du cercle de centre 0 et de rayon 1*



Exemple (suite)

2. $h(x,y) = \sqrt{1-x^2} + \ln(y-1)$
   $\Longrightarrow D_h = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / -1 \leq x \leq 1 \text{ et } y > 1\}$



Définition 1.2

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : U \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction de deux variables. On appelle **graphe** *ou* **surface représentative** *de f l'ensemble de points de $\mathbb{R}^3$*

$$\mathcal{S} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / (x,y) \in U \text{ et } z = f(x,y)\}.$$

2.2.2 Fonctions partielles

Définition 1.3

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, f une fonction de U dans $\mathbb{R}$ et $(a,b) \in U$, les fonctions définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $x \longmapsto f(x,b)$ et $y \longmapsto f(a,y)$ sont appelées **fonctions partielles** *associées à f au point (a,b).*

Définition 1.4

Soient U *un ouvert de* $\mathbb{R}^2$ *et* $f : U \longmapsto \mathbb{R}$ *une fonction de deux variables. L'ensemble*

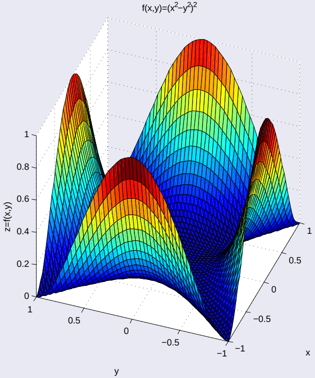
$$L_\lambda = \{(x,y) \in U / f(x,y) = \lambda\}$$

est appelé **ligne de niveau** λ *de la fonction* f .

Exemples 3

1. *Graphe la fonction*

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x;y) \longmapsto (x^2 - y^2)^2$$

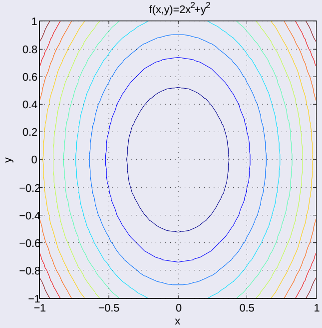


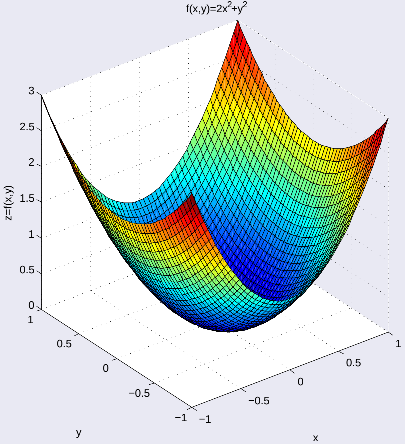
Exemple (suite)

2. *Repréesentation par lignes de niveau et surfacique de la fonction*

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x;y) \longmapsto 2x^2 + y^2$$



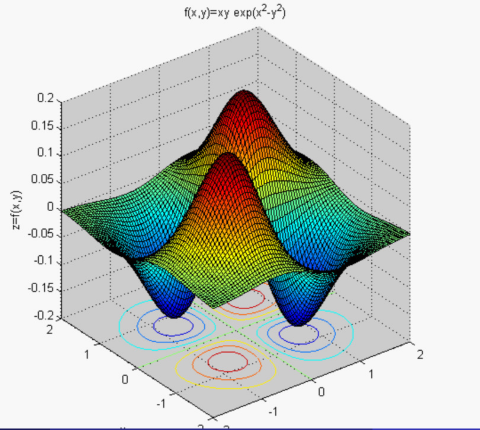


Exemple (suite)

3. *Repréesentation par lignes de niveau et surfacique de la fonction*

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x;y) \longmapsto xye^{-x^2-y^2}$$



Exercice 1.1

Tracer la représentation graphique de la fonction $xye^{-x^2-y^2}$ *avec Matlab ou Maple.*

Définition 1.5

Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *définis au voisinage d'un point* $a \in \mathbb{R}^n$, *sauf peut être en un point* a.
On dit que f *admet pour limite le nombre réel* l *si :*
$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0$ *tel que* $\forall x \in \mathbb{R}^n$ *verifiant* $0 < \|x - a\| < \alpha$ *on ait*
$|f(x) - l| < \varepsilon$
On note $\lim\limits_{x \longrightarrow a} f(x) = l$

Remarque 1.2

1. *La limite, s'il existe, est unique.*
2. *La définition de la limite est indépendante de la norme c.à. d on peut choisir dans cette définition n'importe quelle norme parmi les trois normes usuelles* $(\|.\|_1, \|.\|_2, \|.\|_\infty)$ *et prendre la plus adaptée à l'exercice qu'on résoudre.*

Exemple 4

1. $f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \Longrightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$

   en effet on a $2|xy| \leq (x^2+y^2) \Longrightarrow |f(x,y)| = \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}$

   $\Longrightarrow |f(x,y)| = \frac{1}{2}\|x\|_2$ *on aura donc*

   $|f(x,y)| < \varepsilon$ *dès que* $\|x\|_2 < 2\varepsilon$

   pour cela il suffit de prendre $\alpha = 2\varepsilon$ *pour satisfaire*

   $\forall\varepsilon > 0, \exists\alpha > 0$ *tel que* $0 < \|x-a\| < \alpha$ *on ait* $|f(x) - l| < \varepsilon$

2. $f(x,y) = |x| + |y| \Longrightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$

   en effet on a $f(x,y) = |x| + |y| = \|(x,y)\|_1$

   on aura donc

   $|f(x,y)| < \varepsilon$ *dès que* $\|(x,y)\|_1 < \varepsilon$ *pour cela il suffit de prendre* $\alpha = \varepsilon$

Remarque 1.3

si f *possède une limite* l *quand* $x \longrightarrow a \quad (a \in \mathbb{R}^n)$, *cette limite est indépendant du chemin suivi par le point* x *pour attendre* a.

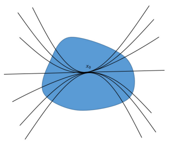
Exemple 5

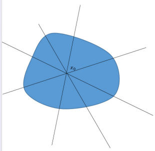
- *Dans* $\mathbb{R}$: *la limite à droite* $=$ *la limite à gauche*
- *Dans* $\mathbb{R}^2$ *ce chemin peut être*
  1. *toute droite passant par le point* $x_0 = (a,b)$: $y = \lambda(x-a)+b$
  2. *tout courbe continue ayant pour extrémité le point* $x_0 = (a,b)$ *et située ou voisinage de* (a,b)

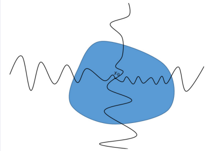
     Dans $\mathbb{R}^2$ *on a* $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = l$

     On a la même limite suivent tout direction passant par $x_0 = (a,b)$, *cela veut dira :*

     - $\lim\limits_{x\to a} f(x,\lambda(x-a)+b) = l$
     - $\lim\limits_{x\to a} f(x,b) = l$ *(droite parallèle à* $(\overrightarrow{OX}); y = b)$
     - $\lim\limits_{y\to b} f(x,b) = l$ *(droite parallèle à* $(\overrightarrow{OY}); x = a)$
     - $\lim\limits_{x\to x_0,\ y=\varphi(x)} f(x,\varphi(x)) = l$







Exemple (suite)

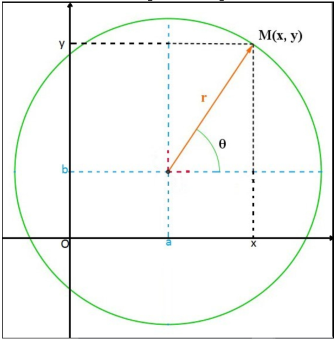
- **N.B :** *En pratique, on utilise la contraposé pour affermer qu'une fonction n'admet pas de limite en un point, pour cela il suffit par exemple de montrer que suivent deux direction différentes f possède deux limite différente au limites infinis.*

Exemple 6

1. $f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$ *la fonction f n'admet pas de limite*
   en effet on a
   $i)$ *pour* $y = 0$, $f(x,y) = 1 \Longrightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x,0) = 1$
   $ii)$ *pour* $x = 0$, $f(x,y) = -1 \Longrightarrow \lim\limits_{y\to 0} f(0,y) = -1$
2. $f(x,y) = \frac{x-y}{x^2+y^2}$ *la fonction f n'admet pas de limite*
   en effet : considérons la droite $y = \lambda x$ $\quad (\lambda \in \mathbb{R}$ fixe)
   $\forall x \neq 0 \quad f(x,\lambda) = \frac{\lambda}{1+\lambda^2} \Longrightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x,y) = \dfrac{\lambda}{1+\lambda^2}$
   cette limite dépend de λ, donc la fonction f n'admet pas de limite au point $(0,0)$.

coordonnées polaires pour le calcul de limites dans $\mathbb{R}^2$

Tout point (x,y) de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(a,b)\}$ peut être représenté par ses coordonnées polaires centrées autour d'un point (a,b) grâce aux relations :
$x = a + r\cos(\theta)$,
$y = b + r\sin(\theta)$ avec $r > 0$ et $\theta \in [0;2\pi[$.



Dans cette écriture, r représente la distance entre (a,b) et (x,y)

On a donc $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x) = \lim\limits_{r\to 0} f(a + r\cos(\theta), b + r\sin(\theta)) \quad \forall\theta$

On peut alors utiliser la condition suffisante suivante :

Proposition 1.1

1. *S'il existe* $l \in \mathbb{R}$ *et une fonction* $\varphi : r \mapsto \varphi(r)$ *telle que au voisinage de* (a, b) *on a* $|f(a + r\cos(\theta), b + r\sin(\theta)) - l| \leq \varphi(r)$ *avec* $\lim\limits_{r\to 0} \varphi(r) = 0$ *alors*
$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = l.$$
2. *S'il existe une fonction* $\psi : r \mapsto \psi(r)$ *telle que au voisinage de* (a, b) $|f(a + r\cos(\theta), b + r\sin(\theta)) - l| \geq \psi(r)$ *avec* $\lim\limits_{r\to 0} \psi(r) = +\infty$ *alors la limite* $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y)$ *n'existe pas.*

Proposition 1.2

Soient $f, g : X \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ définie au voisinage de $a \in \mathbb{R}^n$ sauf peut être en a telles que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = l'$.

1. $\lim\limits_{x \to a} (f + g)(x) = l + l'$
2. $\lim\limits_{x \to a} (f.g)(x) = l.l'$
3. *Si $l' \neq 0$ alors $\lim\limits_{x \to a} \frac{f}{g}(x) = \frac{l}{l'}$*

Preuve :

Démontrons 1 : On a

$$\begin{aligned} \left|f(x) + g(x) - \left(l + l'\right)\right| &= \left|f(x) - l + \left(g(x) - l'\right)\right| \\ &\leq \left|f(x) - l\right| + \left|g(x) - l'\right|. \end{aligned} \tag{1}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\alpha_1 > 0$ et $\alpha_2 > 0$ tel que

$$\|x - a\| < \alpha_1 \implies \left|f(x) - l\right| < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{2}$$

$$\|x - a\| < \alpha_2 \implies \left|g(x) - l'\right| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3}$$

Posons $\alpha = \inf(\alpha_1, \alpha_2)$. De (1), (2) (3) et l'inégalité triangulaire, on déduit

$$\|x-a\| < \alpha \Longrightarrow \left|f(x) + g(x) - \left(l + l'\right)\right| < \varepsilon.$$

Prouvons 2. On peut écrire,

$$\begin{aligned} g(x) f(x) - ll' &= g(x)f(x) - lg(x) + lg(x) - ll' \\ &= g(x)\left(f(x) - l\right) + \left(g(x) - l'\right) l. \end{aligned}$$

D'où,

$$|g(x) f(x) - ll'| \leq |g(x)|\, |f(x) - l| + \left|g(x) - l'\right| |l|. \tag{4}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\alpha_1 > 0$ tel que

$$\|x-a\| < \alpha_1 \Longrightarrow \left|g(x) - l'\right| < \frac{\varepsilon}{2}\delta, \tag{5}$$

avec

$$\delta = \begin{cases} \frac{1}{|l|} & \text{si} \quad l \neq 0, \\ 1 & \text{si} \quad l = 0. \end{cases}.$$

De (5) , on déduit que

$$\|x-a\|<\alpha_1 \Longrightarrow |g(x)|<\frac{\varepsilon}{2}\delta+\left|l'\right|=M. \tag{6}$$

D'autre part, il existe $\alpha_2>0$ tel que

$$\|x-a\|<\alpha_2 \Longrightarrow |f(x)-l|<\frac{\varepsilon}{2M}. \tag{7}$$

Posons $\alpha=\inf(\alpha_1,\alpha_2)$. De (4) , (5) , (6) et (7) , on obtient

$$\|x-a\|<\alpha \Longrightarrow |g(x)f(x)-ll'|<\varepsilon.$$

Exemple 7

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1+x^2+y^2}{y}\sin y &= (1+x^2+y^2)\frac{\sin y}{y} \\ &= 1\end{aligned}$$

car $\lim_{(x,y)\to(0,0)} 1+x^2+y^2=1$ *et* $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin y}{y}=1$

Continuité

Définition 1.6

On dit que $f : X \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *est continue en un point* $a \in X$ *si*
$\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.
On dit que f est continue sur X *si f est continue en tout point* a *de* X .

Exemple 8

$$\begin{cases} f(x,y) = & (x^2+y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \textit{si} \;\; (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0 = & 0 \end{cases}$$

on a $0 \leq |f(x,y)| \leq x^2+y^2 \Longrightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0)$

D'où f *est continue en* $(0,0)$.

Proposition 1.3

Si f *et* g *sont deux fonctions continues en a alors* $f+g$, $f-g$ *et* $f.g$ *sont continues en* $a \in \mathbb{R}^n$ *et si* $g(a) \neq 0$ *alors* $\dfrac{f}{g}$ *est continue en* a.

Proposition 1.4

Soit la fonction

$$\begin{array}{rcl} P_i : \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R},\ 1 \leq i \leq n \\ x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) & \longmapsto & P_i(x) = x_i \end{array}$$

Alors $\forall 1 \leq i \leq n$, P_i *est continue en tout point de* $\mathbb{R}^n$
(P_i *la fonction projection de* $\mathbb{R}^n$ *sur* $\mathbb{R}$*).*

Preuve : soit $a = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^n$
Montrons que $\forall \varepsilon, \exists \alpha > 0$ tel que
$\forall \in \mathbb{R}^n, \|x - a\| < \alpha \Longrightarrow |P_i(x) - P_i(a)| < \varepsilon$
On $|P_i(x) - P_i(a)| = |x_i - a_i| \leq \sum_{j=1}^{n} |x_j - a_j| = \|x - a\|_1$
on aura $|P_i(x) - P_i(a)| < \varepsilon$ dès que $\|x - a\|_1 < \varepsilon$
Donc il suffit de prendre $\alpha = \varepsilon$
Exemple : dans $\mathbb{R}^2$ on a $P_1(x, y) = x$ et $P_2(x, y) = y$

Corollaire 1.1

1-

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) & \longmapsto & f(x) = x_1^{k_1}.x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n} \end{array}$$

est continue sur $\mathbb{R}^n$

2-

$$\begin{array}{rcl} P : \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) & \longmapsto & P(x) = \displaystyle\sum_{(k_1,k_2,\ldots,k_n)\in I} \lambda_{k_1,k_2,\ldots,k_n} x_1^{k_1}.x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n} \end{array}$$

est continue sur $\mathbb{R}^n$
où I *est un sous-ensemble fini de* $\mathbb{N}^n$ *et* $\lambda_{m_1,m_2,\ldots,m_n} \in \mathbb{R}$
P *: est dite* **fonction polynôme** *à* n *variables.*

3-

$$\begin{array}{rcl} g : \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) & \longmapsto & g(x) = c \quad c \in \mathbb{R} \end{array}$$

est continue sur $\mathbb{R}^n$

Preuve

1. f est le produit de fonctions continues sur $\mathbb{R}^n \Longrightarrow f$ est continue
2. P est somme et produit de fonctions continues sur $\mathbb{R}^n \Longrightarrow P$ est continue
3. g est une fonction polynôme

Exemples 9

1. *P est continue avec $P(x,y,z) = x^2yz^4 + x^2 + x^3y^5z + xyz$, est un polynôme à 3 variables de degré 9.*
2. $P : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$
   $(x,y) \longmapsto P(x,y) = \sum\limits_{p,q} \lambda_{p,q} x^p.y^q$
   est continue en tout point de $\mathbb{R}^2$
3. *$F(x,y) = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$, où P et Q sont deux polynômes à deux variables, est continues en tout point $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ pour lequel $Q(x,y) \neq 0$*
   Par exemple : $f(x,y) = \frac{x^3y^5}{x^2+y^2}$ est continues en tout point de $\mathbb{R}^2 \backslash \{0,0\}$

Proposition 1.5

Toute fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}^n$

Proposition 1.6

Soient : $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction continue en un point et* $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$.
Pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ *, la fonction* φ_i *est continue en* $a_i \in \mathbb{R}$ *où :*

$$\begin{array}{rcl} \varphi_i : \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x_i & \longmapsto & \varphi_i(x) = f(a_1, a_2, \ldots a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_n). \end{array}$$

Démonstration : f est continue en a
$\Longrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 \;\; \forall x \in \mathbb{R}^n \;\; 0 < \|x - a\| < \alpha \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$
En particulier por $x = (a_1, a_2, \ldots a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_n)$
on a $\|x - a\|_1 = |x_i - a_i| < \alpha$ et $|f(x) - f(a)) = |\varphi_i(x) - \varphi_i(a)|$
Donc $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 \;\; \forall x \in \mathbb{R}^n \;\; 0 < \|x - a\| < \alpha \Longrightarrow |\varphi_i(x) - \varphi_i(a)| < \varepsilon$
$\Longrightarrow \lim\limits_{x \to a} \varphi_i(x) = \varphi_i(a)$
φ_i est continue au point a.

Remarque 1.4

La réciproque de cette proposition est fausse (i.e., la continuité des fonctions d'une variable $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ *n'entraîne pas la continuité de* f*). Comme le montre l'exemple suivant :*

Exemple 10

Soit f *la fonction numérique définie sur* $\mathbb{R}^2$ *par :*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & si \quad (x,y) \neq \ 0, \\ \\ 0 & si \quad (x,y) = \ 0. \end{cases} .$$

On a déjà montré que f *n'admet pas de limite en* $(0,0)$ *donc* f *n'est pas continue en ce point, par contre les fonctions* φ_1 *et* φ_2 *sont continues. En effet les fonctions* φ_1 *et* φ_2 *définies sur* $\mathbb{R}$ *par :*

$\varphi_1(x) = f(x,0)$ *et* $\varphi_2(y) = f(0,y), \Longrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^n,\ \varphi_1(x) = \varphi_2(x) = 0$
$\Longrightarrow \varphi_1$ *et* φ_2 *sont continues pour* $x = 0$ *et* $y = 0$ *.*

Remarque 1.5

Cette proposition est connue par sa contraposée : si l'une des fonctions partielles φ_i n'est pas continue en a. alors f n'est pas continue en a.

Exemple 11

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x+y}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq 0, \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = 0. \end{cases}$$

$$on\ a \quad \varphi_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

$\Longrightarrow \varphi_1$ *n'est pas continue en* 0
$\Longrightarrow f$ *n'est pas continue en* 0

Remarque 1.6

Pour affirmer que f n'est pas continue en un point, il suffit de montrer que f n'est pas continue suivent une direction

Exemple 12

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2} & si \quad (x,y) \neq 0, \\ 0 & si \quad (x,y) = 0. \end{cases}$$

Considérons la droite de l'équation $y = x$

$$f(x,x) = \begin{cases} 2 & si \quad (x,y) \neq 0, \\ 0 & si \quad (x,y) = 0. \end{cases}$$

et que $\lim_{x \to 0} f(x,x) = 2 \neq f(0,0)$ Par conséquent f n'est pas continue suivent cette direction d'où f n'est continue en ce point

Définition 2.1

Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction définie au voisinage d'un point* $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *de* $\mathbb{R}^n$*, et soit* $x\,(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.
On appelle dérivée partielle de f *par rapport à la variable* x_i *au point* a *, la dérivée, s'elle existe de la fonction partielle* φ_i *associée à* f *en* a *au point* a *;*
Cette dérivée partielle est notée $\frac{\delta f}{\delta x_i}(a)$ *ou bien* $f'_{x_i}(a)$

$$\frac{\delta f}{\delta x_i}(a) = \lim_{y \longrightarrow a_i} \frac{f\,(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, y, a_{i+1}, \ldots, a_n) - f\,(a_1, a_2, \ldots, a_n)}{y - a_i}.$$

Définition (suite)

Autrement dit soit

$$\begin{array}{rcl} \varphi_i : \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & \varphi_i(y) = f(a_1, a_2, \ldots a_{i-1}, y, a_{i+1}, \ldots, a_n). \end{array}$$

Si $\varphi_i(a_i)$ est dérivable au point a_i, on aura alors :

$$\varphi_i'(a) = \lim_{y \longrightarrow a_i} \frac{\varphi_i(y) - \varphi_i(a_i)}{y - a_i}.$$

c.à.d.

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{y \longrightarrow a_i} \frac{f(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, y, a_{i+1}, \ldots, a_n) - f(a_1, a_2, \ldots, a_n)}{y - a_i}.$$

On note que : $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \in \mathbb{R}$

Définition (suite)

<u>*En posant*</u> $t = y - a_i \Longleftrightarrow y = t + a_i$ *on obtient*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) &= \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{f\left(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, a_i + t, a_{i+1}, \ldots, a_n\right) - f\left(a_1, a_2, \ldots, a_n\right)}{t} \\
&= \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{f\left(a + te_i\right) - f(a)}{t}
\end{aligned}$$

Où $e_i = (0, \cdots, 0, \underset{\blacktriangle i^{eme} position}{1}, 0, \cdots, 0)$, *et*

$a + te_i = \left(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, a_i + t, a_{i+1}, \ldots, a_n\right)$

Remarque 2.1

1. *Le calcule d'une dérivée partielle d'ordre un se ramène à celui d'une fonction d'une variable.*
2. *Dans* $\mathbb{R}^2$ *: soit* f *une fonction de deux variables défini au voisinage du point* (a,b)*, on note*

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) &= \lim_{x\longrightarrow a}\frac{f(x,b)-f(a,b)}{x-a} \quad \textit{(s'il existe)}\\ &= \lim_{t\longrightarrow 0}\frac{f(a+t,b)-f(a,b)}{t} \quad \textit{(s'il existe)}\end{aligned}$$

Exemple 13

1.
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{x^2+y^2}\sin(2x^3+3y^3) & \textit{si} \quad (x,y) \neq \quad (0,0), \\ 0 & \textit{si} \quad (x,y) = \quad (0,0). \end{cases}$$

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim_{x \longrightarrow 0} \left(\frac{1}{x^3}\sin(2x^2) \right) = 2 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$$

$$\lim_{y \longrightarrow 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = \lim_{y \longrightarrow 0} \left(\frac{1}{y^3}\sin(3y^3) \right) = 3 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$$

2. $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$
$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim_{x \longrightarrow 0} \left(\frac{|x|}{x} \right)$ *n'existe pas de même* $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ *n'existe pas*

Remarque 2.2

En particulier pour calculer $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, *on fixe toutes les variables* $x_j, j \neq i$, *qui seront considérer comme des constantes et on dérive par rapport à la variable* x_i.

Exemples 14

1. $f(x,y) = xy \Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y$ *et* $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x$
2. $f(x,y) = y\cos(xy)$
   $\Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -y^2\sin(xy)$ *et* $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \cos(xy) - yx\sin(xy)$
3. $f(x,y,z) = 2x + 3yz + 4y^2z$ *donc*
   - $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 2$
   - $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 3z + 8yz$
   - $\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 3y + 4y^2$

Remarque 2.3

Pour une fonction d'une seule variable l'existence de la dérivée en un point entraine la continuité en ce point.
Pour une fonction de plusieurs variables ($n \geq 2$) l'existence de dérivées partielles en un point **n'entraine pas la continuité en ce point**, *comme le montre l'exemple suivent.*

Exemple 15

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ *mais f n'est pas continue en* $(0,0)$

Différentiabilité :

Définition 2.2

soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction définie au voisinage d'un point* a

- *On dit que* f *est différentiable en* a *s'il existe une application linéaire* $L_a : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *telle que :*

$$f(a+h) = f(a) + L_a(h) + \|h\|\varepsilon(h)$$

Au $\varepsilon : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $\lim_{h \longrightarrow 0_{\mathbb{R}^n}} \varepsilon(h) = 0$ *et* $h \in \mathbb{R}^n$ *telle que* $(a+h)$ *est au voisinage de* a *(*h *est petit)*
L'application linéaire L_a*, s'il existe, est unique elle s'appelle différentielle de* f *au point* a *et on le note* df_a

$$f(a+h) = f(a) + L_a(h) + \|h\|\varepsilon(h)$$

$$\Longleftrightarrow \lim_{h \longrightarrow 0_{\mathbb{R}^n}} \frac{f(a+h) - f(a) - L_a(h)}{\|h\|} = 0$$

Définition (suite)

- *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ on dit que f est différentiable sur U, si elle est différentiable en tout point de U*

Exemple 16

1. *Soit $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une application linéaire, alors T est différentiable en tout point de $\mathbb{R}^n$ et que sa différentielle est l'application elle-même* $dT = T$
2. $f(x,y) = \alpha x + \beta y \Longrightarrow df = f \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$

Proposition 2.1

Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie au voisinage de* $a \quad (a \in \mathbb{R}^n)$

- ✓ *Si* f *admet des dérivées partielles en* a *par rapport a chaque variable* x_i
- ✓ *si* $\lim\limits_{h \longrightarrow 0_{\mathbb{R}^n}} \dfrac{f(a+h)-f(a)-\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)h_i}{\|h\|} = 0$

  Alors f *est différentiable en* a *et que* $df_a(h) = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)h_i$

Exemple 17

Soit la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^2$ *par :*

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \textit{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \textit{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Exemple (suite)

On a $\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = x\cos\frac{1}{x^2} \Longrightarrow \lim\limits_{x\longrightarrow 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} \Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$

$$\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = y\cos\frac{1}{y^2} \Longrightarrow \lim_{y\longrightarrow 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} \Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

D'où $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$

vérifier que $\lim\limits_{h\longrightarrow(0,0)}\frac{f(h_1,h_2)}{\|h\|} = 0 \qquad h = (h_1,h_2)$

On a $0 \leq f(h_1,h_2) \leq h_1^2 + h_2^2 \Longrightarrow 0 \leq \frac{f(h_1,h_2)}{\|h\|_2} \leq \sqrt{h_1^2+h_2^2}$

$\Longrightarrow \frac{f(h_1,h_2)}{\|h\|_2} = 0 \Longrightarrow f$ *est différentiable et que* $df_{(0,0)} = 0$

Proposition 2.2

Si f *est différentiable en* a*, alors* f *admet des dérivées partielles au point* a *par rapport à chaque variable* x_i *et on a :*

$$\forall h \in \mathbb{R}^n \quad df_a(h) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)h_i$$

Remarque 2.4

Si l'une des dérivées partielles n'existe pas au point a, alors f n'est pas différentiable au point a

Démonstration : Si f est différentiable en a
$\Longleftrightarrow f(a+h) = f(a) + df_a(h) + \|h\|\varepsilon(h)$ Pour tout $h \in \mathbb{R}^n$ (h petit)
soit $h = (0, \cdots, 0, \underset{\blacktriangle i^{eme} position}{t}, 0, \cdots, 0) = te_i$, (on a $h \longrightarrow 0 \Longleftrightarrow t \longrightarrow 0$)

$$\begin{aligned}
f(a+te_i) - f(a) &= df_a(te_i) + |t|\varepsilon(te_i) \\
&= tdf_a(e_i) + |t|\varepsilon(te_i) \\
\frac{f(a+te_i) - f(a)}{t} &= df_a(e_i) + \frac{|t|}{t}\varepsilon(te_i) \\
\lim_{t\to 0}\frac{f(a+te_i) - f(a)}{t} &= \lim_{t\to 0}(df_a(e_i) + \frac{|t|}{t}\varepsilon(te_i)) \\
\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) &= df_a(e_i) \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

d'où l'existence des dérivées partielles par rapport à chaque x_i au point a

$$
\begin{aligned}
\Longrightarrow df_a(h) &= df_a\left(\sum_{i=1}^{n} h_i e_i\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n} h_i df_a(e_i)\\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \times h_i
\end{aligned}
$$

Remarque 2.5

Considérons la fonction projection

$$
\begin{aligned}
P_i : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}\\
x = (x_1, \cdots, x_n) &\longmapsto P_i(x) = x_i
\end{aligned}
$$

on a $\forall 1 \leq i \leq n,\ \ P_i$ *est linéaire donc* P_i *est différentiable en tout point* $a \in \mathbb{R}^n$, *et*

$$
\forall 1 \leq i \leq n, \quad dP_i = P_i
$$

$$
\begin{aligned}
\Longrightarrow df_a(h) &= df_a\left(\sum_{i=1}^{n} h_i e_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} h_i df_a(e_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \times h_i
\end{aligned}
$$

Remarque 2.5

Considérons la fonction projection

$$
\begin{array}{rcl}
P_i : \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\
x = (x_1, \cdots, x_n) & \longmapsto & P_i(x) = x_i
\end{array}
$$

on a $\forall 1 \leq i \leq n, \;\; P_i$ *est linéaire donc* P_i *est différentiable en tout point* $a \in \mathbb{R}^n$, *et*

$$\forall 1 \leq i \leq n, \quad dP_i = P_i$$

Remarque (suite)

donc $\forall \;\; h = (h_1, \cdots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ *on a :* $dP_i(h) = P_i(h) = h_i$
On note $dP_i = dx_i$ *avec*

$$dx_i : \left.\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ h = (h_1, \cdots, h_n) & \longmapsto & dx_i\,(h) = h_i \end{array}\right\} \text{forme linéaire}$$

Ce qui permet d'écrire

$$\begin{aligned} df_a(h) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \times h_i \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) dx_i \right) h \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow df_a = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) dx_i$$

Exemple 18

$f(x,y) = 3x - 5y$ *linéaire*
$df = f \Longrightarrow df(h_1,h_2) = f(h_1,h_2) = 3h_1 - 5h_2$ *or on a :*
$dx(h_1,h_2) = h_1$ *et* $dy(h_1,h_2) = h_2$ *donc*

$$\begin{aligned} df(h_1,h_2) &= 3dx(h_1,h_2) - 5dy(h_1,h_2) \\ &= (3dx - 5dy)(h_1,h_2) \end{aligned}$$

$\Longrightarrow df = 3dx - 5dy$

Proposition 2.3

Si f est différentiable en a alors f est continue en a. (Si f n'est pas continue $\Longrightarrow f$ n'est pas différentiable).

Démonstration :

f est différentiable en $a \Longleftrightarrow f(a+h) - f(a) = df_a(h) + \|h\|\varepsilon(h)$
comme $df(0) = 0$ et df et continue sur $\mathbb{R}^n \Longrightarrow \lim_{h \longrightarrow (0,0)} df(h) = 0$

donc $\lim_{h \longrightarrow (0,0)} f(a+h) = f(a) \Longrightarrow f$ est continue en a.

Exemple 18

$f(x,y) = 3x - 5y$ *linéaire*
$df = f \Longrightarrow df(h_1,h_2) = f(h_1,h_2) = 3h_1 - 5h_2$ *or on a :*
$dx(h_1,h_2) = h_1$ *et* $dy(h_1,h_2) = h_2$ *donc*

$$\begin{aligned} df(h_1,h_2) &= 3dx(h_1,h_2) - 5dy(h_1,h_2) \\ &= (3dx - 5dy)(h_1,h_2) \end{aligned}$$

$\Longrightarrow df = 3dx - 5dy$

Proposition 2.3

Si f est différentiable en a alors f est continue en a. (Si f n'est pas continue $\Longrightarrow f$ n'est pas différentiable).

Démonstration :

f est différentiable en $a \Longleftrightarrow f(a+h) - f(a) = df_a(h) + \|h\|\varepsilon(h)$
comme $df(0) = 0$ et df et continue sur $\mathbb{R}^n \Longrightarrow \lim\limits_{h \longrightarrow (0,0)} df(h) = 0$
donc $\lim\limits_{h \longrightarrow (0,0)} f(a+h) = f(a) \Longrightarrow f$ est continue en a.

Remarque 2.6

La réciproque de cette proposition est fausse.
Comme le montre l'exemple suivant : $f(,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$
f *est continue en* $(0,0)$ *mais* f *n'est pas différentiable en* $(0,0)$
car $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ *et* $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ *n'existent pas*

Remarque 2.7

L'existence des dérivées partielles de f *en un point par rapport à chaque variable n'entraine pas la différentiabilité de* f *en ce point.*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$ *mais n'est différentiable car* f *n'est pas continue en* $(0,0)$.

Proposition 2.4

Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie au voisinage d'un point* $a \in \mathbb{R}^n$
Si f *admet des dérivées partielles* $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ *au voisinage de* a $\left(\frac{\partial f}{\partial x_i} : V(a) \longrightarrow \mathbb{R}\right)$
et sont continues au point a. *Alors* f *est différentiable en* a

Exemple 19

$f(x,y) = 2x^3y^5$
On a pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$: $\frac{\partial f}{\partial x} = 6x^2y^5$ *et* $\frac{\partial f}{\partial y} = 10x^3y^4$ *sont définis sur* $\mathbb{R}^2$
donc $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 6$ *et* $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 10 \Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}$ *et* $\frac{\partial f}{\partial y}$ *sont continue en* $(1,1)$
donc f *est différentiable en* $(1,1)$ *et on a* $df_{(1,1)} = 6dx + 10dy$

Remarque 2.8

La réciproque de cette proposition est fausse.

Définition 2.3

On dit que f est de classe C^1 sur U si toutes ses dérivées partielles sont définies et continues sur U.

Proposition 2.5

U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et f et g sont des applications de classe C^1 sur U à valeurs dans $\mathbb{R}$

1. *$f+g$, λf ($\lambda \in \mathbb{R}$) et $f.g$ sont de classe C^1 sur U*
2. *Si g ne s'annule pas sur U, f/g est de classe C^1 sur U.*

Corollaire 2.1

1. *Une fonction polynôme de n variables est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$.*
2. *Une fonction rationnelle de n variables est de classe C^1 sur son domaine de définition*

Exercice 2.1 (Voir TD)

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \textit{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \textit{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

On montre que :

- f *est différentiable en* $(0,0)$
- f *admet des dérivées partielles en tout point de* $\mathbb{R}$
- *mais elles ne sont pas continues en* $(0,0)$

Définition 2.4

Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction définie au voisinage d'un point* $a \in \mathbb{R}^n$ *et soit* $u \in \mathbb{R}^n$ *tel que (*u *vecteur unitaire de* $\mathbb{R}^n$ *)*
On dit que f *est dérivable en* a *suivant la direction* u *si :*

$$\lim_{t \longrightarrow 0} \frac{f(a+tu-f(a))}{t} = 0 \text{ existe}$$

On note cette limite par $\frac{\partial f}{\partial u}(a)$ *ou* $D_u f(a)$.
Et s'appelle la dérivée de f *en* a *suivent la direction* u.

Remarque 2.9

1. *Soit* v *un vecteur non unitaire de* $\mathbb{R}^n$ *en posant* $u = \frac{v}{\|v\|}$ *(*u *unitaire)* *si* $\frac{\partial f}{\partial u}(a)$ *existe alors* $\frac{\partial f}{\partial v}(a)$ *existe* $\frac{\partial f}{\partial v}(a) = \frac{\partial f}{\partial u}(a).\|v\|$

Remarque (suite)

2. *Soit la base canonique* $(e_1, \cdots, e_n)$ *de* $\mathbb{R}^n$
Prenons le cas particulier $u = e_i \quad (\|e_i\| = 1)$

$$\frac{\partial f}{\partial e_i}(a) = \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{f(a + te_i - f(a))}{t} = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$$

La dérivée partielle de f *par rapport à* x_i *est exactement la dérivée de* f *en* a *suivent* (e_i)

3. *Une fonction peut être dérivable suivent certaines détricotions sont l'être pour d'autre, comme le montre l'exemple suivant :*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \textit{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \textit{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

$\frac{\partial f}{\partial e_1}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 \quad$ *(suivent* e_1*)*
$\frac{\partial f}{\partial e_2}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0 \quad$ *(suivent* e_2*)*

Remarque (suite)

Soit $(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ *tel que* $\|u\| = 1$ *avec* $u_1 \neq 0$ *et* $u_2 \neq 0$

$$\begin{aligned}
\lim_{t \longrightarrow 0} \frac{f(a + t(u_1, u_2) - f(a))}{t} &= \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{1}{t} f(tu_1, tu_2) \\
&= \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{1}{t} \frac{u_1 u_2}{u_1^2 + u_2^2} \\
&= \infty
\end{aligned}$$

Donc f n'est pas dérivable suivent u

Proposition 2.6

Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction définie au voisinage de* $a \in \mathbb{R}^n$ *si* f *est différentiable en* a *alors* f *est dérivable en* a *suivant toutes directions et on a :*

$$\frac{\partial f}{\partial u}(a) = df_a(u).$$

Démonstration :

f est différentiable en $a \Longleftrightarrow f(a+h) - f(a) = df_a(h) + \|h\|\varepsilon(h)$
avec $\lim\limits_{h \longrightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$
Posons $h = tu \Longrightarrow \frac{f(a+tu)-f(a)}{t} = df_a(u) + \frac{|t|}{t}\|u\|\varepsilon(th)$
Par passage à la limite, on obtient $\frac{\partial f}{\partial u}(a) = df_a(u)$.

Remarque 2.10

soit $u = (u_1, \cdots, u_2)$ *alors :*

$$\frac{\partial f}{\partial u}(a) = df_a(u) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a).u_i$$

Pour une fonction différentiable les dérivées directionnelles se calculent à partir des dérivées partielles

Notation :

On note ∇f_a (**le gradient** de f en a)
Le vecteur de $\mathbb{R}^n$ qui a pour composante $(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)$ c.à.d

$$\nabla f_a = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

On obtient $\frac{\partial f}{\partial u}(a) = < \nabla f_a, u >$
$< x, y > = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ est le produit scalaire de x et y

Remarque 2.11

La réciproque de la proposition (2.6) est fausse.
En effet :

Exercice 2.2 (Voir TD)

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

f est dérivable en $(0,0)$ suivent toutes directions, mais f n'est pas différentiable en $(0,0)$