

CHAPITRE 3 :

Différentielle d'une application de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^p

M. Derouich

16 avril 2017

3.1 Application de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^p

3.1.1 définitions

Définition 1.1

Une fonction vectorielle de plusieurs variables f est une fonction de la forme

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^p \\ x = (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & f(x) = (f_1(x), \dots, f_p(x)) \end{array}$$

avec f_1, f_2, \dots, f_p sont des fonctions numériques c.à.d :

$$\begin{array}{ccc} f_i : \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \quad 1 \leq i \leq p \\ x & \longmapsto & f_i(x) \end{array}$$

3.1.2 Limite et Continuité

Proposition 1.1

Soit $A \subset \mathbb{R}^n$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}^p$, $x_0 \in A$ et $l = (l_1, l_2, \dots, l_p) \in \mathbb{R}^p$.
Pour que f ait la limite l au point x_0 , il faut et il suffit, que pour tout $\forall 1 \leq i \leq p$, la fonction numérique f_i ait pour limite l_i au point x_0 .

Preuve. On choisit sur \mathbb{R}^p la distance sup définie par :

$$d_p(x, y) = \sup_{1 \leq i \leq p} |x_i - y_i|.$$

Sur \mathbb{R}^n , on choisit une distance d_n équivalente à la distance euclidienne.
Démontrons que la condition est nécessaire. Supposons que

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$. On a donc,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, (x \in A \text{ et } d_n(x, x_0) < \eta)$$

$$\implies d_p(f(x), l) = \sup_{1 \leq i \leq p} |f_i(x) - l_i| < \varepsilon.$$

3.1.2 Limite et Continuité

Proposition 1.1

Soit $A \subset \mathbb{R}^n$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}^p$, $x_0 \in A$ et $l = (l_1, l_2, \dots, l_p) \in \mathbb{R}^p$.
Pour que f ait la limite l au point x_0 , il faut et il suffit, que pour tout $\forall 1 \leq i \leq p$, la fonction numérique f_i ait pour limite l_i au point x_0 .

Preuve. On choisit sur \mathbb{R}^p la distance sup définie par :

$$d_p(x, y) = \sup_{1 \leq i \leq p} |x_i - y_i|.$$

Sur \mathbb{R}^n , on choisit une distance d_n équivalente à la distance euclidienne.
Démontrons que la condition est nécessaire. Supposons que

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$. On a donc,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, (x \in A \text{ et } d_n(x, x_0) < \eta)$$

$$\implies d_p(f(x), l) = \sup_{1 \leq i \leq p} |f_i(x) - l_i| < \varepsilon.$$

D'où,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, (x \in A \text{ et } d_n(x, x_0) < \eta) \implies |f_i(x) - l_i| < \varepsilon,$$

$$\forall i \in \{1, \dots, p\}.$$

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, p\}, \lim_{x \rightarrow x_0} f_i(x) = l_i.$$

Montrons que la condition est suffisante.

Supposons que pour tout $i \in \{1, 2, \dots, p\}$, $\lim_{x \rightarrow x_0} f_i(x) = l_i$.

Pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, nous avons,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta_{\varepsilon, i, x_0} > 0, (x \in A \text{ et } d_n(x, x_0) < \eta_{\varepsilon, i, x_0}) \implies |f_i(x) - l_i| < \varepsilon.$$

Posons $\eta = \inf_{1 \leq i \leq p} \eta_{\varepsilon, i, x_0}$. On a,

$$(x \in A \text{ et } d_n(x, x_0) < \eta) \implies \sup_{1 \leq i \leq p} |f_i(x) - l_i| = d_p(f(x), l) < \varepsilon.$$

Proposition 1.2

Soient $A \subset \mathbb{R}^n$, $x_0 \in A$ et $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^p$. f est continue au point x_0 (resp. sur A) si et seulement si $\forall 1 \leq i \leq p$, la fonction numérique f_i est continue au point x_0 (resp. sur A).

3.1.3 Caractéristique des fonctions continues

Proposition 1.3

Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$. Les trois propositions suivantes sont équivalentes.

- (i) f est continue sur \mathbb{R}^n .
- (ii) Pour tout ouvert O de \mathbb{R}^p , $f^{-1}(O)$ est ouvert dans \mathbb{R}^n .
- (iii) Pour tout fermé F de \mathbb{R}^p , $f^{-1}(F)$ est fermé dans \mathbb{R}^n .

Exemple 1

- ① L'ensemble $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 > 10\}$
est ouvert dans \mathbb{R}^2 car la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto f(x, y) = x^2 + y^2, \end{aligned}$$

est continue sur \mathbb{R}^2 et $B = f^{-1}(]10, +\infty[)$ est ouvert car c'est l'image réciproque de l'ouvert $]10, +\infty[$ par la fonction continue f .

Exemple (suite)

- ② $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = 2x - y\}$ est fermé car c'est l'image réciproque du fermé $\{0\}$ par la fonction continue $g(x, y) = x^2 + y^2 - 2x + y$; $D = g^{-1}(\{0\})$.

Remarque 1.1

L'image d'un ouvert (resp. fermé) de \mathbb{R}^n par une application continue n'est pas nécessairement un ouvert (resp. fermé) de \mathbb{R}^p .

Par exemple,

L'image de l'ouvert $] -1, 1[$ par l'application $x \mapsto x^2$ est l'intervalle $[0, 1[$ qui n'est pas ouvert.

L'image du fermé \mathbb{R} par l'application $x \mapsto \arctg x$ est l'ouvert $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ qui n'est pas un fermé de \mathbb{R} .

3.1.4 Propriétés des fonctions continues sur un compact

Proposition 1.4

Soit $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ et $B \subset A$. Si f est continue sur A et B est une partie compacte de \mathbb{R}^n , alors $f(B)$ est un compact de \mathbb{R}^p .

Preuve. Soit $(O_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts de \mathbb{R}^p qui recouvre $f(B)$ c-à-d $f(B) \subset \bigcup_{i \in I} O_i$. Comme f est continue, d'après la proposition 1.3, $\forall i \in I$, $f^{-1}(O_i)$ est ouvert dans \mathbb{R}^n . Or, la famille $[f^{-1}(O_i)]_{i \in I}$ est un recouvrement ouvert de B . Comme B est compact, il existe une partie finie $J \subset I$ tel que

$$B \subset \bigcup_{j \in J} [f^{-1}(O_j)].$$

Donc,

$$f(B) \subset \bigcup_{j \in J} O_j.$$

Par suite, $f(B)$ est compact.

Corollaire 1.1 (théorème du maximum)

Toute fonction numérique continue sur un compact A de \mathbb{R}^n est bornée et atteint ses bornes (c.à.d, $\exists (x_1, x_2) \in A^2$ tel que

$$\sup_{x \in A} f(x) = f(x_1) \text{ et } \inf_{x \in A} f(x) = f(x_2).)$$

Preuve. Puisque A est compact et f est continue sur A , d'après la proposition 1.4, $f(A)$ est compact dans \mathbb{R} . Donc, $f(A)$ est fermé et borné dans \mathbb{R} . Par conséquent, $\sup_{x \in A} f(x) \in f(A)$ et $\inf_{x \in A} f(x) \in f(A)$. D'où la proposition.

Définition 1.2 (Application uniformément continue)

Soit $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$.

On dit que f est **uniformément continue** sur A si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (x, y) \in A^2; d_n(x, y) < \eta \implies d_p[f(x), f(y)] < \varepsilon.$$

Exemple 2

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ telle que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, d_p [f(x), f(y)] < k d_n(x, y), \quad (1)$$

où k est une constante strictement positive. Alors, f est uniformément continue sur \mathbb{R}^n . Pour montrer l'uniforme continuité, il suffit de prendre $\eta = \frac{\varepsilon}{k}$. Une fonction qui vérifie (1) est dite **Lipschitzienne** de rapport k .

Remarque 1.2

Une fonction uniformément continue est évidemment continue. La réciproque est fautive comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 3

La fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x &\longmapsto f(x) = x^2, \end{aligned}$$

est continue sur \mathbb{R}^+ mais non uniformément continue sur \mathbb{R}^+ . Choisissons sur \mathbb{R}^+ la distance naturelle. On a

$$d[f(x), f(y)] = |f(y) - f(x)| = |y^2 - x^2| = (y + x) |y - x|.$$

Soit $\varepsilon > 0$ et $\eta > 0$. Les réels $x = \frac{\varepsilon}{\eta}$ et $y = x + \frac{\eta}{2}$ vérifient

$$|y - x| = \frac{\eta}{2} < \eta \text{ et } (y + x) |y - x| > 2x |y - x| = \varepsilon.$$

Donc, f n'est pas uniformément continue sur \mathbb{R}^+ .

Proposition 1.5 (Théorème de Heine)

Toute fonction continue sur un compact est uniformément continue.

Preuve. Supposons que $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ est continue.

On a

$\forall \varepsilon > 0, \forall x \in A, \exists \eta_x > 0$ tel que $(y \in A \text{ et } d_n(x, y) < 2\eta_x) \implies d_p[f(x), f(y)] < \varepsilon$.

La famille $[B(x, \eta_x)]_{x \in A}$ constitue un recouvrement ouvert de A . Comme A est compact, on peut extraire un recouvrement fini. Il existe donc x_1, x_2, \dots, x_m tel que

$$A \subset \bigcup_{k=1}^m B(x_k, \eta_{x_k}).$$

Posons $\eta = \inf_{k=1, \dots, m} \eta_{x_k} > 0$.

Soient y et z deux éléments de A tel que $d_n(y, z) < \eta$.

Puisque $y \in A$, il existe $k \in \{1, 2, \dots, m\}$ tel que $y \in B(x_k, \eta_{x_k})$.

D'où, $d_n(x_k, y) < \eta_{x_k}$.

D'autre part,

$$d_n(x_k, z) \leq d_n(x_k, y) + d_n(y, z) \leq \eta_{x_k} + \eta \leq 2\eta_{x_k}.$$

Donc, on a

$$d_p[f(x_k), f(y)] < \frac{\varepsilon}{2} \text{ et } d_p[f(x_k), f(z)] < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Par conséquent,

$$d_p[f(y), f(z)] \leq d_p[f(x_k), f(y)] + d_p[f(x_k), f(z)] < \varepsilon.$$

D'où le résultat.

3.2 Applications différentiables

Définition 2.1

Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ une application de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^p on dira que f est différentiable si et seulement si $\forall 1 \leq i \leq p$, la fonction numérique f_i est différentiable.

Remarque 2.1

$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ est différentiable en $a \in \mathbb{R}^n$ si et seulement s'il existe une application df_a linéaire de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^p telle que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - df_a(h)}{\|h\|_n} = 0, \quad (2)$$

soit au voisinage de 0,

$$f(a + h) = f(a) + df_a(h) + \|h\|_n \varepsilon(a, h), \text{ avec } \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(a, h) = 0,$$

Remarque (suite)

ou encore avec les notations de Landau

$$f(a+h) = f(a) + df_a(h) + o\|h\|_n$$

3.3 Opérations algébriques (somme, produit, quotient)

3.3.1 Différentielle d'une combinaison linéaire et du produit

Proposition 2.1

Soit U un ouvert de \mathbb{R}^n , $x_0 \in U$, f et g deux fonctions de U dans \mathbb{R}^p différentiables en x_0 , λ et μ deux réels. Alors, la fonction $\lambda f + \mu g$ est différentiable en x_0 et sa différentielle en ce point est :

$$d(\lambda f + \mu g)_{x_0} = \lambda df_{x_0} + \mu dg_{x_0}$$

3.3.2 Différentielle du produit

Proposition 2.2

Soit U un ouvert de \mathbb{R}^n , $x_0 \in U$, f et g deux fonctions de U dans \mathbb{R} différentiables en x_0 . Alors, la fonction fg est différentiable en x_0 et sa différentielle en ce point est :

$$d(fg)_{x_0} = g(x_0) df_{x_0} + f(x_0) dg_{x_0}.$$

3.3.3 Différentielle du quotient

Proposition 2.3

Soit U un ouvert non vide de \mathbb{R}^n , $x_0 \in U$, f une fonction de U dans \mathbb{R} différentiable en x_0 et telle que $f(x_0) \neq 0$. Alors, il existe un voisinage V de x_0 tel que f ne soit non nulle sur $U \cap V$. La fonction $\frac{1}{f}$ définie de $U \cap V$ dans \mathbb{R} est différentiable en x_0 et sa différentielle est

$$d\left(\frac{1}{f}\right)_{x_0} = -\frac{1}{[f(x_0)]^2}df_{x_0}.$$

Proposition 2.4

Si f et g sont différentiables en x_0 et si $g(x_0) \neq 0$, alors $\frac{f}{g}$ est différentiable en x_0 et on a

$$d\left(\frac{f}{g}\right)_{x_0} = \frac{f(x_0)dg_{x_0} - g(x_0)df_{x_0}}{[g(x_0)]^2}.$$

Définition 2.2

- ① l'application linéaire df_a admet une unique matrice qui la représente dans la base canonique. Cette matrice est appelée matrice jacobienne donnée par :

$$\mathcal{J}_f(a) = \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a) \right)_{\substack{1 \leq j \leq n \\ i \leq i \leq p}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \cdot & \cdot & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_p}{\partial x_2}(a) & \cdot & \cdot & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

c' est une matrice à p lignes et n colonnes

- ② si $p = n$ alors $\mathcal{J}_f(a)$ est une matrice carrée
On appelle jacobien d'une application f le déterminant de la matrice jacobienne $\mathcal{J}_f(a)$ et on le note $\frac{D(f_1, \dots, f_p)}{D(x_1, \dots, x_p)}(a)$ ou $\frac{\partial(f_1, \dots, f_p)}{\partial(x_1, \dots, x_p)}(a)$.

Définition (suite)

$$\text{et on a } \det(\mathcal{J}_f(\mathbf{a})) = \frac{D(f_1, \dots, f_p)}{D(x_1, \dots, x_p)}(\mathbf{a}) = \frac{\partial(f_1, \dots, f_p)}{\partial(x_1, \dots, x_p)}(\mathbf{a}).$$

- ③ si f est une application linéaire alors sa matrice coïncide avec sa jacobienne (car $df = f$)

Remarque 2.2

- ① Pour tout $u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$, on a

$$(df_a \cdot u)^t = \mathcal{J}_f(a) \cdot u^t = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}.$$

- ② L'application df_a est une bijection de \mathbb{R}^n sur \mathbb{R}^n si et seulement si

$$\frac{D(f_1, \dots, f_p)}{D(x_1, \dots, x_p)}(a) \neq 0.$$

3.3.5 Application composée :

Théorème 2.1

Soit U un ouvert de \mathbb{R}^n , V un ouvert de \mathbb{R}^p , $a \in U$, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$ et $g : V \rightarrow \mathbb{R}^q$.

Si $f(U) \subset V$, f différentiable au point a et g différentiable au point $f(a)$, alors $g \circ f$ est différentiable au point a et on a

$$\mathcal{J}_{g \circ f}(a) = \mathcal{J}_g(f(a)) \times \mathcal{J}_f(a)$$

3.3.6 Application inverse :

supposons que $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ application supposons qu'il existe une application U vérifiant $f \circ g = g \circ f = I_d$ Alors f est inversible dans D et g est l'application inverse.

Théorème 2.2

si f admet dans D (un domaine de \mathbb{R}^n) une application inverse $g = f^{-1}$, alors le jacobien de f^{-1} est l'inverse du jacobien de f c.à.d

$$\mathcal{J}_{f^{-1}}(f(a)) = [\mathcal{J}_f(a)]^{-1}.$$

3.3.7 Dérivées partielles d'une fonction composée

Proposition 2.5

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ une fonction différentiable en $a \in U$,
 $g : V \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^q$ tq $f(U) \subset V$ et différentiable en $f(a) = b$. et

$$h : \begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & \mathbb{R}^q \\ x = (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & h(x) = g \circ f(x) \end{array}$$

alors

- 1 $\forall j = 1 \dots q$ la fonction h_j admet une dérivée partielle par rapport à x_i , $i = 1 \dots n$ au point a .
- 2 et on a la formule suivante :

$$\frac{\partial h_j}{\partial x_i}(a) = \sum_{k=1}^p \frac{\partial g_j}{\partial y_k}(b) \frac{\partial f_k}{\partial x_i}(a) \quad \begin{array}{l} 1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq q \end{array}$$

Preuve :

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ une fonction différentiable en $a \in U$ et $g : V \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^q$ tq $f(U) \subset V$ et différentiable en $f(a) = b$.
Posons $h = g \circ f$. On a

$$J_h(a) = J_{g \circ f}(a) = J_g(f(a)) \times J_f(a),$$

avec

$$J_f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix} = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \right)_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}}$$

$$J_g(f(a)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(b) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial y_p}(b) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial g_q}{\partial y_1}(b) & \cdots & \frac{\partial g_q}{\partial y_p}(b) \end{pmatrix} = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq q \\ 1 \leq j \leq p}} = \left(\frac{\partial g_i}{\partial y_j}(b) \right)_{\substack{1 \leq i \leq q \\ 1 \leq j \leq p}}$$

D'où,

$$J_h(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial h_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial h_q}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial h_q}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix} = (c_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq q \\ 1 \leq j \leq n}} = \left(\frac{\partial h_i}{\partial x_j}(a) \right)_{\substack{1 \leq i \leq q \\ 1 \leq j \leq n}} .$$

$$\text{donc } c_{ij} = \frac{\partial h_i}{\partial x_j}(a) = \sum_{k=1}^p b_{ik} a_{kj} = \sum_{k=1}^p \frac{\partial g_i}{\partial y_k}(b) \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(a) .$$

Exemples 4

① Soit f la fonction de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^3 définie par :

$$\begin{aligned} f(r, \theta, \varphi) &= (x(r, \theta, \varphi), y(r, \theta, \varphi), z(r, \theta, \varphi)) \\ &= (r \cos \theta \cos \varphi, r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \varphi). \end{aligned}$$

$$\text{On a } \frac{\partial x}{\partial r} = \cos \theta \cos \varphi, \quad \frac{\partial x}{\partial \theta} = -r \sin \theta \cos \varphi, \quad \frac{\partial x}{\partial \varphi} = -r \cos \theta \sin \varphi;$$

$$\frac{\partial y}{\partial r} = \sin \theta \cos \varphi, \quad \frac{\partial y}{\partial \theta} = r \cos \theta \cos \varphi, \quad \frac{\partial y}{\partial \varphi} = -r \sin \theta \sin \varphi;$$

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \sin \varphi, \quad \frac{\partial z}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial \varphi} = r \cos \varphi;$$

$$\text{Donc } J_f(r, \theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \cos \varphi & -r \cos \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \cos \varphi & r \cos \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \varphi & 0 & r \cos \varphi \end{pmatrix}$$

Le jacobien de f est

$$\frac{\partial (f_1, f_2, f_3)}{\partial (r, \theta, \varphi)} = \frac{\partial (x, y, z)}{\partial (r, \theta, \varphi)} = r^2 \cos(\varphi)$$

2 Soient les fonction f , g et h définies par :

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (r, \theta) \longmapsto (r \cos \theta, r \sin \theta) ; \quad g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \longmapsto x^2 + y^2$$

$$h = g \circ f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (r, \theta) \longmapsto h(r, \theta) = g[f(r, \theta)] = r^2$$

Exemples (suite)

$$\begin{aligned}\frac{\partial h}{\partial r}(r, \theta) &= \frac{\partial g}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta) \frac{\partial f_1}{\partial r}(r, \theta) + \frac{\partial g}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta) \frac{\partial f_2}{\partial r}(r, \theta) \\ &= \cos \theta \frac{\partial g}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta) + \sin \theta \frac{\partial g}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta) \\ &= 2r \cos^2 \theta + 2r \sin^2 \theta = 2r\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial h}{\partial \theta}(r, \theta) &= \frac{\partial g}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta) \frac{\partial f_1}{\partial \theta}(r, \theta) + \frac{\partial g}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta) \frac{\partial f_2}{\partial \theta}(r, \theta) \\ &= -r \sin \theta \frac{\partial g}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta) + r \cos \theta \frac{\partial g}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta) \\ &= -2r^2 \sin \theta \cos \theta + 2r^2 \sin \theta \cos \theta = 0.\end{aligned}$$

On retrouve facilement le résultat en explicitant $h((r, \theta)) = g \circ f(r, \theta)$

3.4 Fonction implicites

3.4.1 Définition

Soit $f(x, y)$ une fonction à deux variables réelles définis et continue dans un domaine D . Associons lui l'équation $f(x, y) = 0$
Cette équation peut avoir des solutions, qui représentent des points isolés du plan.

Exemple 5

$F(x, y) = x^2 + (y - 1)^2$ admet comme solution réelle la point $(0, 1)$

Remarque 3.1

Il arrive que pour toute valeur de x l'équation considéré comme équation en y , admet une ou plusieurs solution.

Exemple 6

$$f(x, y) = x^2 + (y - 1)^2 - R^2$$

L'équation $f(x, y) = 0$ admet $\forall x / |x| \leq R$ deux solutions

$$y = 1 + \sqrt{R^2 - x^2} \text{ et } y = 1 - \sqrt{R^2 - x^2}$$

Nous nous proposons de chercher des critères pour que la solution soit inique.

Définition 3.1

Nous dirons que l'équation $f(x, y) = 0$ définit une fonction implicite φ , si la fonction φ existe et vérifie $f(x, \varphi(x)) = 0$ pour tout x

Théorème 3.1

Soit f une fonction définis dans un domine D du plan et possédant dans D une dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial y}$ continue.

Supposons qu'il existe un point $(x_0, y_0) \in D$ tel que $f(x_0, y_0) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$.

Alors elle existe une fonction φ continue définie sur un intervalle ouvert I contenant x_0 tel que :

$$\begin{cases} \varphi(x_0) = y_0 \\ f(x, \varphi(x)) = 0 \quad \forall x \in I \end{cases}$$

La fonction φ est unique, si en plus $\frac{\partial f}{\partial x}$ existe et continue dans D alors φ admet une dérivée continue donnée par

$$\varphi'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, \varphi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x))}$$

Exemple 7

- ① soit $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$
existe-t-il une fonction $\varphi : U \rightarrow V$ telle que $f(x, \varphi(x)) = 0 \quad \forall x \in U$?
ou $U \times V$ est un voisinage de $(1, 0) = (x_0, y_0)$
on a $f(x_0, y_0) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y$ continue en tout point de \mathbb{R}^2
mais $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 0) = 0$ donc il n'existe pas φ tel que $F(x, \varphi(x)) = 0$
- ② si on prend maintenant $(x_0, y_0) = (0, 1)$ on a toujours $f(x_0, y_0) = 0$
 $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y$ continue en tout point de \mathbb{R}^2
 $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 1) = 2 \neq 0$

donc il existe $\varphi : U =]-1, 1[\longrightarrow V =]0, +\infty[$
 $x \longmapsto \varphi(x)$

telle que $f(x, \varphi(x)) = 0$ et $\forall x \in]-1, 1[, \varphi(x) = \sqrt{1 - x^2}$

Remarque 3.2

Soit $y = \varphi(x)$ une solution de l'équation implicite $f(x, y) = 0$
La tangente au graphe de φ au point (x_0, y_0) a pour équation

$$y - y_0 = \varphi'(x_0)(x - x_0)$$

Or $\varphi'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, \varphi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x))}$ donc

$$(y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) = 0$$

Exemple 8

Tangente à la circonférence qui a pour équation $x^2 + y^2 = R^2$

$$\implies f(x, y) = x^2 + y^2 - R^2 \implies \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y$$

D'où l'équation de la tangente est :

$$2x_0(x - x_0) + 2y_0(y - y_0) = 0$$

$$\implies x_0 \cdot x - x_0^2 + y_0 \cdot y - y_0^2 = 0 \implies x_0 \cdot x + y_0 \cdot y = R^2$$

Théorème 3.2

soit $f(x,y,z)$ une fonction continue dans un domaine $D \subset \mathbb{R}^3$.

On suppose que $\frac{\partial f}{\partial z}$ existe et continue.

Si il existe un point (x_0, y_0, z_0) tel que $f(x_0, y_0, z_0) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$.

Alors il existe un voisinage V de (x_0, y_0) dans lequel on peut définir une fonction $\varphi(x, y)$ unique vérifiant

- 1 φ continue
- 2 l'équation $f(x, y, \varphi(x, y)) = 0$ est vérifiée en tout point de V
- 3 si on plus $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ existent et sont continues dans D alors : φ admet dans V deux dérivées partielles :

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}} \end{cases}$$

3.5 Dérivée partielle d'ordre supérieur à 1

3.5.1 Définition

Définition 4.1

Soit U un ouvert non vide de \mathbb{R}^n , $f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$ admettant sur U des dérivées partielles par rapport à chacune de ses variables. Pour chaque $i = 1, 2, \dots, n$, on a donc une fonction

$$\begin{aligned} D_{if} &= \frac{\partial f}{\partial x_i} : U && \longrightarrow && \mathbb{R}^p \\ & && x && \longmapsto && \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \end{aligned}$$

La fonction $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ peut avoir une dérivée seconde par rapport à x_j en un point $a \in U$ ou sur U . On note $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$ ou $D_{jif}(a)$ ou $f''_{x_i x_j}(a)$ la dérivée partielle par rapport à x_j au point a de la fonction $\frac{\partial f}{\partial x_i}$.

Définition (suite)

Les fonctions $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ sont appelées dérivées partielles d'ordre 2 de f .

Les fonctions $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}$ seront notées $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$.

Par récurrence, on définit les dérivées partielles d'ordre p de f par :

$$\frac{\partial^p f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_p}}(x) = \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \left(\frac{\partial^{p-1} f}{\partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_p}} \right)$$

qu'on note aussi $D_{i_1 i_2 \dots i_p} f(x)$ ou $f_{x_{i_p} x_{i_{p-1}} \dots x_{i_1}}^{(p)}(x)$.

Exemple 9

$$\text{Soit } f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^3x_2 - 5x_2x_3^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2, x_3) = 6x_1^2x_2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^3 - 5x_2^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3) = -10x_3x_2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} = 6x_1^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = 12x_1x_2$$

Définition 4.2

une fonction f , dont toutes dérivée partielle jusqu'a l'ordre k sont défini et continue dans un ouvert Ω de \mathbb{R}^n est dite de **classe C^k** dans Ω .

la f est dite de **classe C^∞** sur Ω si f admet des dérivées partielles continues de n'importe quel ordre.

Théorème 4.1 (théorème de Schwarz)

Si f est de classe C^2 dans Ω on a :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \quad \forall i, j, \quad i \neq j$$

Autrement dit : le résultat est indépendant de l'ordre de la dérivation .
Plus généralement si f est de classe C^k on a :

$$\forall p \leq k \quad \frac{\partial^p f}{\partial x_1 \dots \partial x_{(i_p)}} = \frac{\partial^p f}{\partial x_{(p_{(i_1)})} \dots \partial x_{(p_{(i_p)})}}$$

3.5.2 Matrice Hessienne

Définition 4.3 (Matrice Hessienne)

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n$ et soit $(e_1; \dots; e_n)$ la base canonique de \mathbb{R}^n . Si f est de classe C^2 sur l'ouvert U la matrice :

$$\text{Hess}f_x := \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x) & \cdot & \cdot & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x) & \cdot & \cdot & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(x) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(x) & \cdot & \cdot & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(x) \end{pmatrix}$$

est appelée matrice hessienne de f en x .

Remarque 4.1

Le théorème de Schwarz montre que les dérivées partielles croisées sont égales, donc la matrice hessienne est symétrique.

Exemple 10

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^2$, une fonction de classe C^2 , la matrice hessienne de f en (x, y) est la matrice symétrique :

$$\text{Hess}f_{(x,y)} := \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \end{pmatrix}$$

3.6 Formule des accroissements finis et formule de Taylor

3.6.1 Formule des accroissements finis

Définition 5.1

Soit x et y deux éléments de \mathbb{R}^n . On appelle segment d'extrémités x et y , l'ensemble

$$[x, y] = \{z \in \mathbb{R}^n / z = tx + (1 - t)y, t \in [0, 1]\}.$$

Théorème 5.1

Soit I un intervalle ouvert \mathbb{R} et f une fonction dérivable de I dans \mathbb{R}^p . On suppose qu'il existe une fonction $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable, telle que

$$\|f'(t)\|_p \leq g'(t), \quad \forall t \in I.$$

Alors,

$$\|f(x) - f(y)\|_p \leq g(x) - g(y), \quad \forall x, y \in I.$$

Preuve.

Soit $\varepsilon > 0$ et considérons l'ensemble

$$I(\varepsilon) = \left\{ t \in I / \|f(t) - f(x)\|_p \leq g(t) - g(x) + \varepsilon(t - x) \right\}.$$

$x \in I(\varepsilon)$ entraîne que $I(\varepsilon) \neq \emptyset$. $I(\varepsilon) \subset I$, donc, $I(\varepsilon)$ est borné. D'où $\sup I(\varepsilon)$ existe. Posons $M = \sup I(\varepsilon)$ et montrons que $M \in I(\varepsilon)$. Soit (t_n) une suite de $I(\varepsilon)$ qui converge vers M . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\|f(t_n) - f(x)\|_p \leq g(t_n) - g(x) + \varepsilon(t_n - x).$$

Comme f et g sont continues, par passage à la limite, nous déduisons que

$$\|f(M) - f(x)\|_p \leq g(M) - g(x) + \varepsilon(M - x).$$

Donc, $M \in I(\varepsilon)$. Montrons maintenant que $M = y$. Supposons que $M < y$. Comme f et g sont dérivables à droite au point M , alors, il existe $h > 0$ tel que pour $M < t < M + h$, on ait à la fois

$$\left\| \frac{f(t) - f(M)}{t - M} - f'_d(M) \right\|_p \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad \left| \frac{g(t) - g(M)}{t - M} - g'_d(M) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}\left\| \frac{f(t) - f(M)}{t - M} \right\|_p &\leq \|f'_d(M)\|_p + \frac{\varepsilon}{2} \leq g'_d(M) + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{g(t) - g(M)}{t - M},\end{aligned}$$

càd

$$\|f(t) - f(M)\|_p \leq \varepsilon(t - M) + g(t) - g(M). \quad (3)$$

Puisque, $M \in I(\varepsilon)$, on a

$$\|f(M) - f(x)\|_p \leq g(M) - g(x) + \varepsilon(M - x). \quad (4)$$

Par conséquent, de (3) et (4), on déduit que pour tout $t \in]M, M + h[$,

$$\begin{aligned}\|f(t) - f(x)\|_p &\leq \|f(t) - f(M)\|_p + \|f(M) - f(x)\|_p \\ &\leq g(t) - g(x) + \varepsilon(t - x)\end{aligned}$$

Donc, $M + \frac{h}{2} \in I$. Ce qui contredit la définition de M .

Proposition 5.1 (Théorème de la moyenne)

Soit U un ouvert non vide de \mathbb{R}^n , $f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$ différentiable sur U et tel que

$$\sup_{u \in U} \|df_u\| \leq k.$$

Alors, quels que soient les points x et y de U tel que le segment $[x, y]$ soit contenu dans U , on a

$$\|f(x) - f(y)\|_p \leq k \|x - y\|_n.$$

Preuve. Soit g la fonction de $I = [0, 1]$ dans \mathbb{R}^n définie par :

$$g(t) = x + t(y - x).$$

On a $g(I) \subset U$. Donc, on peut considérer la fonction $F = f \circ g$ définie de I dans \mathbb{R}^p . Comme f et g sont dérivables sur I , la fonction F est dérivable sur I et on a

$$F'(t) = f'(g(t)) \cdot g'(t) = df_{g(t)} \cdot g'(t) = df_{x+t(y-x)} \cdot (y - x).$$

Donc,

$$\|F'(t)\|_p = \left\| df_{x+t(y-x)} \cdot (y-x) \right\|_p \leq \left\| df_{x+t(y-x)} \right\| \| (y-x) \|_n \leq k \| (y-x) \|_n$$

En posant, $\varphi(t) = kt \| (y-x) \|_n$, on aura

$$\|F'(t)\|_p \leq \varphi'(t),$$

et en utilisant le lemme précédent, on obtient

$$\|F(1) - F(0)\|_p \leq \varphi(1) - \varphi(0),$$

càd,

$$\|f(x) - f(y)\|_p \leq k \|x - y\|_n.$$

Corollaire 5.1

Soit U un ouvert de \mathbb{R}^n et $f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$

- 1 Si f est constante sur U , alors f est différentiable sur U et $df_x = 0 \quad \forall x \in U$.
- 2 Si de plus U est connexe et $df_x = 0 \quad \forall x \in U$. Alors, f est constante sur U .

Preuve. Soit $a \in U$ et posons

$$X = \{x \in U / f(x) = f(a)\}.$$

On a $X = f^{-1}\{f(a)\}$. Comme f est continue sur U , X est une partie fermée non vide de U .

Soit $b \in X$, il existe $r > 0$ tel que $B(b, r) \subset U$.

Si $x \in B(b, r)$, le segment $[b, x] \subset U$.

En vertu du théorème de la moyenne, on a $\|f(b) - f(x)\|_p = 0$.

Donc, $f(b) = f(x) = f(a)$ et par suite, $x \in X$. Par conséquent, $B(b, r) \subset X$.

X est une partie à la fois ouverte et fermée dans U .

Comme $X \neq \emptyset$, alors $X = U$.

Proposition 5.2 (théorème des accroissements finis)

Soit U un ouvert de \mathbb{R}^n et $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable sur U , x et $x + h$ deux points de U tels que le segment $[x, x + h] \subset U$. Alors, il existe $\theta \in]0, 1[$ tel que

$$f(x + h) - f(x) = \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x + \theta h).$$

Preuve. Considérons l'application g de $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ dans \mathbb{R}^n définie par : $g(t) = x + th$. On a $g(I) \subset U$.

On peut donc considérer la fonction $F = f \circ g$ définie de I dans \mathbb{R} .

Cette dernière fonction est continue sur I et dérivable sur $]0, 1[$.

Donc, il existe $\theta \in]0, 1[$ tel que

$$F(1) - F(0) = F'(\theta).$$

$$\begin{aligned} \text{càd, } f(x+h) - f(x) &= (f \circ g)'(\theta) = \frac{d}{dt} (f \circ g)(\theta) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x + \theta h) \cdot \frac{dg_i}{dt} \\ &= \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x + \theta h). \end{aligned}$$

3.6.2 Formule de Taylor

Formule Taylor à l'ordre 1 dans \mathbb{R}^n :

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0 + \theta h)$$

Formule Taylor à l'ordre m dans \mathbb{R}^n :

Théorème 5.2

Soit V un voisinage du point x_0 dans \mathbb{R}^n , et $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ une application telle que f de classe C^m . On a alors, au voisinage de $h = 0$

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) - f(x_0) &= \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) + \frac{1}{2!} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial y_i \partial x_j}(x_0) + \dots \\ &+ \frac{1}{m!} \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \sum_{i_3=1}^n \dots \sum_{i_m=1}^n h_{i_1} h_{i_2} \dots h_{i_m} \frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_m}}(x_0) + o(\|h\|^m) \end{aligned}$$

Théorème 1

Si $m = 2$, on a donc

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) + o\left(\sum_{i=1}^n h_i^2\right) \quad (5)$$

3.6.3 Développement limite

Soit $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, V un voisinage de a , $B(a, r)$, $r > 0$ une boule ouverte incluse dans V et $f : V \rightarrow \mathbb{R}^n$

- ① Développement limite à l'ordre 1 : Si f de classe C^1 dans V on peut écrire son Développement limite à l'ordre 1

$\forall x \in B(a, r); x \neq a$ on a :

$$f(x) = f(a) + \sum_{i=1}^n (x_i - a_i) \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + \|x - a\| \varepsilon(x)$$

où $\varepsilon(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow a$

- ② Développement limite à l'ordre 2 : Si f de classe C^2 dans V on peut écrire son Développement limite à l'ordre 2

$\forall x \in B(a, r); x \neq a$ on a :

$$f(x) = f(a) + \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + \frac{1}{2!} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_i - a_i)(x_j - a_j) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) + \|x - a\|^2 \varepsilon(x)$$

où $\varepsilon(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow a$

3.6.4 Extremum d'une fonction

Définition 5.2

Soit U un ouvert de \mathbb{R}^n , $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in U$.

On dit que f admet un **maximum strict** (resp. un **minimum strict**) au point a s'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$x \in U \text{ et } \|x - a\| < \alpha \implies f(x) < f(a) \quad (\text{resp. } f(x) > f(a)).$$

On dit que f admet un **extremum strict** au point a si f admet en ce point un maximum strict ou un minimum strict.

Proposition 5.3

Soit U un ouvert de \mathbb{R}^n , $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in U$.

On suppose que f admet des dérivées partielles par rapport à toutes les variables au point a et que f admet un extremum strict au point a .

Alors, pour tout $i = 1, 2, \dots, n$, $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$.

Preuve :

Considérons pour tout $i = 1, 2, \dots, n$, la fonction F_i définie de \mathbb{R} dans \mathbb{R} par :

$$F_i(x_i) = f(a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n).$$

F_i admet un extremum strict au point a_i .

Donc, $F'_i(a_i) = 0$ c`ad $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$.

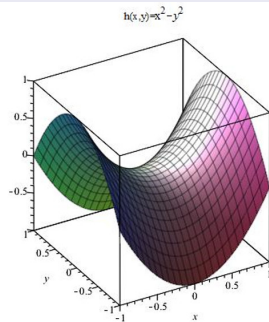
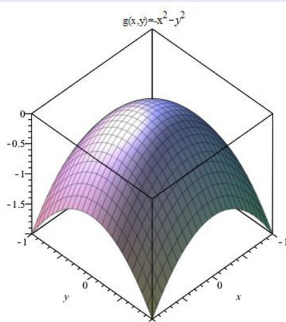
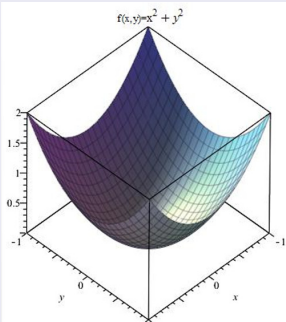
Proposition 5.4

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 et $(a, b) \in U$ un point critique de f . On note $\Delta(a, b)$ le déterminant de $\text{Hess}f_{(a,b)}$. Alors

- 1 Si $\Delta(a, b) > 0$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) > 0$ alors (a, b) est un **minimum local strict**.
- 2 Si $\Delta(a, b) > 0$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) < 0$ alors (a, b) est un **maximum local strict**.
- 3 Si $\Delta(a, b) < 0$ alors (a, b) est un **point selle ou point col**.
- 4 si $\Delta(a, b) = 0$, on ne peut pas conclure à partir des dérivées secondes.

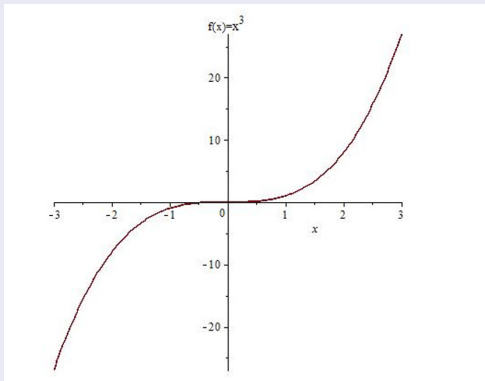
Exemple 11

- 1 $f(x,y) = x^2 + y^2$ le point $(0,0)$ est un minimum.
- 2 $g(x,y) = -x^2 - y^2$ le point $(0,0)$ est un maximum.
- 3 $h(x,y) = x^2 - y^2$ le point $(0,0)$ est un point selle



Remarque 5.1

On peut avoir $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$ pour tout $i = 1, 2, \dots, n$, sans que f admette un extremum strict au point a . Ainsi par exemple, la fonction f définie de \mathbb{R} dans \mathbb{R} par : $f(x) = x^3$ vérifie $f'(0) = 0$. Cependant, f n'admet pas d'extremum strict au point 0.

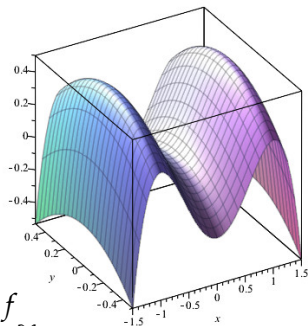


Exercice 5.1

On pose $f(x, y) = x^2 - y^2 - \frac{x^4}{2}$;

- 1 Tracer la représentation graphique avec Matlab ou Maple de la fonction f pour $x \in [-1.5, 1.5]$ et $y \in [-0.5, 0.5]$.
- 2 Déterminer les points critiques de f .
- 3 Étudier les extrema locaux de f .

- ❶ la représentation graphique de la fonction f



- ❷ les points critiques de f

on a $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2x^3$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = -2y$

Un point (x, y) est critique si et seulement s'il est solution du système

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x - 2x^3 = 0 \\ -2y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x(x^2 - 1) = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Les solutions de ce système sont $(0,0)$, $(1,0)$ et $(-1,0)$.
Donc on a trois points critiques $(0,0)$, $(1,0)$ et $(-1,0)$

② la nature de chaque point critique

On a $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2 - 6x^2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 0$ et
 $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 0$

Donc La matrice hessienne de f en un point (x,y) est

$$\text{Hess}f_{(x,y)} := \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 6x^2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\implies \Delta(x,y) = \det(\text{Hess}f_{(x,y)}) = -4 + 12x^2$$

- ✓ pour le point critique $(0,0)$
on a $\Delta(0,0) = -4 < 0$
 $\implies (0,0)$ est un point selle.
- ✓ pour le point critique $(1,0)$
on a $\Delta(1,0) = 8$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,0) = -4 < 0$
 $\implies (1,0)$ est un maximum local.
- ✓ pour le point critique $(-1,0)$
on a $\Delta(-1,0) = 8$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1,0) = -4 < 0$
 $\implies (-1,0)$ est un maximum local.