UNIVERSITE MOHAMMED PREMIER
ECOLE NATIONALE DES SCIENCES APPLIQUEES
OUJDA-MAROC

Filière : GC3 & GI3 — Année universitaire : 2016-2017

Elément de module : Analyse des données — Enseignant : M. Derouich

Fiche TD $N°$: 3

Exercice 1. :

Soit V le tableau suivant : $V = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer le trace de V
2. Déterminer les différentes valeurs propres de V
3. Trouver un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda = 0$
4. Déterminer des vecteurs propres orthonormés de V associés aux valeurs propres de V différentes de 0

Exercice 2. :

Soit X le tableau suivant : $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

On considère les six vecteurs $x_1, x_2, \cdots, x_6$ de $\mathbb{R}^3$(muni de la métrique euclidien usuelle) dont les composantes sont données par les lignes de X . On pose $m_i = 1/6$ pours $i = 1; 2; \cdots, 6$

1. Montrer que le nuage N de six vecteurs est centré à l'origine de $\mathbb{R}^3$. Calculer $V = 1/6 \sum_{i=1}^{6} x_i x_i'$
2. Calculer I_G, moment d'inertie de N par rapport à l'origine
3. Déterminer les différentes valeurs propres de V
4. Déduire la dimension de l'espace qui contient le nuage des individus
5. Trouver un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda = 0$
6. Déterminer des vecteurs propres orthonormés de V associés aux valeurs propres de V différentes de 0, et représenter N dans le sous-espace de $\mathbb{R}^3$ engendré par ces vecteurs.

Exercice 3. :

On considère Le tableau Y de notes sur 20 obtenues par 9 élèves en mathématiques, physique , français, et anglais.(n=9 individus , p=4 variables) :

	mathématiques	physique	français	anglais
Jean	6.0	6.0	5.0	5.5
Aline	8.0	8.0	8.0	8.0
Annie	6.0	7.0	11.0	9.5
Monique	14.5	14.5	15.5	15.0
Didier	14.0	14.0	12.0	12.5
André	11.0	10.0	5.5	7.0
Pierre	5.5	7.0	14.0	11.5
Brigitte	13.0	12.5	8.5	9.5
Evelyne	9.0	9.5	12.5	12.0

1. montrer que le centre de gravité est donné par le vecteur : $G = \begin{pmatrix} 9.67 \\ 9.83 \\ 10.22 \\ 10.06 \end{pmatrix}$.

2. On désire soumettre le tableau Y à un ACP. Pour cela on est conduit à rechercher les vecteur propre de la matrice $V = 1/9X'X$ des variances-covariances des cinq variables, qui est

$$V = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 11.389 & 9.917 & 2.657 & 4.824 \\ 9.917 & 8.944 & 4.120 & 5.481 \\ 2.657 & 4.120 & 12.062 & 9.293 \\ 4.824 & 5.481 & 9.293 & 7.914 \\ \hline \end{array}$$

a- Indiquer la transformation qui permet de passer de la matrice Y à la matrice X. Calculer la première ligne de X

b- Calculer I_G, moment d'inertie de N par rapport à l'origine

c- Les deux plus grandes valeurs propres de la matrice V des variances-covariances sont $\lambda_1 = 28.253, \lambda_2 = 12.075$. Quels sont les taux d'inertie expliquée par chacun des deux axes factoriels correspondant ? En limitant la représentation à l'espace des 2 premiers facteurs. Quel est le taux d'inertie totale expliquée par cette représentation ? que peut-on en conclure ?

d- Les deux vecteurs propres normés de V sont donnés dans le tableau ci-dessous :

	1	2
Maths	0.515	-0.567
Physique	0.507	-0.372
Français	0.492	0.650
Anglais	0.485	0.323

Calculer les coordonnées de " Jean " sur les deux axes factoriels.

3. Calculer les coefficients de corrélation linéaire entre le premier facteur et les 5 variables
4. Les corrélations entre les variables et les autres facteurs sont données ci-dessous

	1	2	3	4
math	0.81	-0.584	0.01	-0.02
phys	0.90	-0.432	-0.03	0.02
fran	0.75	0.651	-0.02	-0.01
ang	0.92	0.399	0.04	0.02

Donner brièvement un interprétation possible pour les 2 facteurs.

5. En utilisant les résultats obtenus à la première et à la troisième question, calculer le carré du cosinus de l'angle α entre $\overrightarrow{Gu_1}$ et un axe Δ_1 de vecteur directeur unitaire a_1 (l'indice ponctuel de la représentation de " Jean " sur le premier axe factoriel). Puis sur le plan des deux premiers facteurs. Conclure.

Correction fiche TD N° : 3

Exercice 1. :

On a :

$$V = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Donc le trace de V est : $tra(V) = \frac{1}{4} \times 4 = 1$
2. Les différentes valeurs propres de V on a :

$$\begin{aligned}
\det(V - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 1/4-\lambda & -1/4 & 0 & 0 \\ -1/4 & 1/4-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4-\lambda & -1/4 \\ 0 & 0 & -1/4 & 1/4-\lambda \end{vmatrix}. \\
&= \begin{vmatrix} -\lambda & -\lambda & 0 & 0 \\ -1/4 & 1/4-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4-\lambda & -1/4 \\ 0 & 0 & -\lambda & -\lambda \end{vmatrix}. \\
&= \lambda^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1/4 & 1/4-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4-\lambda & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}. \\
&= \lambda^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1/4 & 1/2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2-\lambda & -1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \\
&= \lambda^2 (\frac{1}{2} - \lambda)^2
\end{aligned}$$

Donc $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_1 = 1/2$

3. Le vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda = 0$

Soit $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \ker(V) \Longleftrightarrow \begin{cases} x - y = & 0 \\ -x + y = & 0 \\ z - t = & 0 \\ -z + t = & 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = & y \\ z = & t \end{cases}$

$$\Longrightarrow u = x\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix} \text{ donc } u_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} \text{ et } u_2 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}$$

En normalisant les vecteurs u_1 et u_2 on obtient finalement

$$u_1 = \begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\\0\\0\end{pmatrix} \quad u_2 = \begin{pmatrix}0\\0\\1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

4. Déterminer des vecteurs propres orthonormés de V associés à $\lambda_2 = 1/2$

Soit $v = \begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} \in \ker(V - \frac{1}{2}I) \Longleftrightarrow \begin{cases} x - y = & 2x \\ -x + y = & 2y \\ z - t = & 2z \\ -z + t = & 2t \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y = & -x \\ t = & -z \end{cases}$

$\Longrightarrow v = x\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix}$ donc $v_1 = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$ et $v_2 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix}$ En normalisant les vecteurs v_1 et v_2 on obtient finalement

$$v_1 = \begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\-1/\sqrt{2}\\0\\0\end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix}0\\0\\1/\sqrt{2}\\-1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

Exercice 2. :

Soit X le tableau suivant : $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

On considère les six vecteurs $x_1, x_2, \cdots, x_6$ de $\mathbb{R}^3$(muni de la métrique euclidien usuelle) dont les composantes sont données par les lignes de X . On pose $m_i = 1/6$ pours $i = 1; 2; \cdots, 6$

1. On a $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

   donc $x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $x_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $x_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

   $x_5 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $x_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

   $$\Longrightarrow \overline{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}} = \overline{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}} = \overline{\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} = 0 \text{ donc : } G = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   et $V = 1/6 \sum_{i=1}^{6} x_i x_i' = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

2. Le moment d'inertie de N par rapport à l'origine $I_G = tr(V) = 2$,

3. Les différentes valeurs propres de V on a :

$$\begin{aligned}
\det(V - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 2/3 - \lambda & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 - \lambda & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 - \lambda \end{vmatrix}. \\
&= \begin{vmatrix} -\lambda & -1/3 & -1/3 \\ -\lambda & 2/3 - \lambda & -1/3 \\ -\lambda & -1/3 & 2/3 - \lambda \end{vmatrix}. \\
&= -\lambda \begin{vmatrix} 1 & -1/3 & -1/3 \\ 1 & 2/3 - \lambda & -1/3 \\ 1 & -1/3 & 2/3 - \lambda \end{vmatrix}. \\
&= -\lambda \begin{vmatrix} 1 & -1/3 & -1/3 \\ 0 & 1 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix}. \\
&= -\lambda (1 - \lambda)^2
\end{aligned}$$

Donc $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_1 = 1$

4. Comme V admet deux valeurs propres distinctes donc le nuage des individus est contenu dans le plan

5. Le vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda = 0$
Soit $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker(V) \Longleftrightarrow \begin{cases} 4x - 2y - 2z = & 0 \\ -2x + 4y - 2z = & 0 \\ -2x - 2y + 4z = & 0 \end{cases}$
$\Longleftrightarrow \begin{cases} 6x - 6y = & 0 \\ 4z = & 2x + 2y \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y = & x \\ z = & x \end{cases}$
$\Longrightarrow u = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

6. Les vecteurs propres orthonormés de V associés au valeur propre $\lambda_2 = 1$:
Soit $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker(V - I) \Longleftrightarrow \begin{cases} 4x - 2y - 2z = & 6x \\ -2x + 4y - 2z = & 6y \\ -2x - 2y + 4z = & 6z \end{cases}$
$\Longleftrightarrow \begin{cases} x + y + z = & 0 \\ x + y + z = & 0 \\ x + y + z = & 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \{ z = \; -x - y$
$\Longrightarrow v = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ donc $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$
Soit $W \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé à
$lambda_2 = 1$ orthogonal à v_1
Donc W verifie :
$$\begin{cases} 4\alpha - 2\beta - 2\gamma = & 6\alpha \\ -2\alpha + 4\beta - 2\gamma = & 6\beta \\ -2\alpha - 2\beta + 4\gamma = & 6\delta \\ et(10-1) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = & 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = & 0 \\ \alpha - \gamma = & 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2\alpha + \beta = & 0 \\ \gamma = & \alpha \end{cases}$$
D'où : $W \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

En normalisant les vecteurs v_1 et W on obtient finalement

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad W = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

La représentation graphique dans le plan engendré par v_1 et W : On a la coordonnée de x_i sur Δ_{v_1} est : $x_i^t.v_1$ donc

$$x_1^t.v_1 = (1 \;\; 0 \;\; -1) \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = 1/\sqrt{2} + 1/\sqrt{2} = \sqrt{2}$$

$$x_1^t.W = (1 \;\; 0 \;\; -1) \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{pmatrix} = 1/\sqrt{6} - 1/\sqrt{6} = 0$$

D'où

	Δ_{v_1}	Δ_{v_2}
x_1	$\sqrt{2}$	0
x_2	$\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{6}/2$
x_3	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{6}/2$
x_4	$-\sqrt{2}/2$	$\sqrt{6}/2$
x_5	$-\sqrt{2}$	0
x_6	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{6}/2$

Exercice 3. :
On considère Le tableau Y de notes sur 20 obtenues par 9 élèves en mathématiques, physique , français, et anglais.(n=9 individus , p=4 variables) :

1. On a

	mathématiques	physique	français	anglais
Jean	6.0	6.0	5.0	5.5
Aline	8.0	8.0	8.0	8.0
Annie	6.0	7.0	11.0	9.5
Monique	14.5	14.5	15.5	15.0
Didier	14.0	14.0	12.0	12.5
André	11.0	10.0	5.5	7.0
Pierre	5.5	7.0	14.0	11.5
Brigitte	13.0	12.5	8.5	9.5
Evelyne	9.0	9.5	12.5	12.0
Moyenne	9.67	9.83	10.22	10.06

Donc le centre de gravité est donné par le vecteur : $G = \begin{pmatrix} 9.67 \\ 9.83 \\ 10.22 \\ 10.06 \end{pmatrix}$.

2. On soumettre le tableau Y à un ACP.

$$V = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 11.389 & 9.917 & 2.657 & 4.824 \\ 9.917 & 8.944 & 4.120 & 5.481 \\ 2.657 & 4.120 & 12.062 & 9.293 \\ 4.824 & 5.481 & 9.293 & 7.914 \\ \hline \end{array}$$

a- Indiquer la transformation qui permet de passer de la matrice Y à la matrice X. On a :

$$Y = \begin{pmatrix} 6.0 & 6.0 & 5.0 & 5.5 \\ 8.0 & 8.0 & 8.0 & 8.0 \\ 6.0 & 7.0 & 11.0 & 9.5 \\ 14.5 & 14.5 & 15.5 & 15.0 \\ 14.0 & 14.0 & 12.0 & 12.5 \\ 11.0 & 10.0 & 5.5 & 7.0 \\ 5.5 & 7.0 & 14.0 & 11.5 \\ 13.0 & 12.5 & 8.5 & 9.5 \\ 9.0 & 9.5 & 12.5 & 12.0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow X = \begin{pmatrix} 6.0-9.67 & 6.0-9.83 & 5.0-10.22 & 5.5-10.06 \\ 8.0-9.67 & 8.0-9.83 & 8.0-10.22 & 8.0-10.06 \\ 6.0-9.67 & 7.0-9.83 & 11.0-10.22 & 9.5-10.06 \\ 14.5-9.67 & 14.5-9.83 & 15.5-10.22 & 15.0-10.06 \\ 14.0-9.67 & 14.0-9.83 & 12.0-10.22 & 12.5-10.06 \\ 11.0-9.67 & 10.0-9.83 & 5.5-10.22 & 7.0-10.06 \\ 5.5-9.67 & 7.0-9.83 & 14.0-10.22 & 11.5-10.06 \\ 13.0-9.67 & 12.5-9.83 & 8.5-10.22 & 9.5-10.06 \\ 9.0-9.67 & 9.5-9.83 & 12.5-10.22 & 12.0-10.06 \end{pmatrix}$$

la première ligne de X est : $X_1(-3.67 \quad -3.83 \quad -5.22 \quad -4.56)$

b- On a

$$V = \begin{pmatrix} 11.389 & 9.917 & 2.657 & 4.824 \\ 9.917 & 8.944 & 4.120 & 5.481 \\ 2.657 & 4.120 & 12.062 & 9.293 \\ 4.824 & 5.481 & 9.293 & 7.914 \end{pmatrix}$$

donc $I_G = tr(V) = 40.30$.

c- Les deux plus grandes valeurs propres de la matrice V des variances-covariances sont $\lambda_1 = 28.253, \lambda_2 = 12.03$.

Donc : $I_{\Delta_1} = \dfrac{\lambda_1}{I_G} = \dfrac{28.253}{40.30} = 0.7$ et $I_{\Delta_2} = \dfrac{\lambda_2}{I_G} = \dfrac{12.03}{40.30} = 0.3$

$I_{\Delta_1} + I_{\Delta_2} = 0.7 + 0.3 = 1 = 100\%$ donc le nuage et pratiquement dan un espace de dimension 2

d- Les deux vecteurs propres normés de V sont donnés dans le tableau ci-dessous :

	1	2
Maths	0.515	-0.567
Physique	0.507	-0.372
Français	0.492	0.650
Anglais	0.492	0.323

On note $a_1 = \begin{pmatrix} 0.515 \\ 0.507 \\ 0.492 \\ 0.485 \end{pmatrix}$ et $a_2 = \begin{pmatrix} -0.567 \\ -0.372 \\ 0.650 \\ 0.323 \end{pmatrix}$

Les coordonnées de " Jean " sur axe Δ_1 sont données par :

$$X_1.a_1 = (-3.67 \quad -3.83 \quad -5.22 \quad -4.56). \begin{pmatrix} 0.515 \\ 0.507 \\ 0.492 \\ 0.485 \end{pmatrix} = -8.61$$

De même les coordonnées de " Jean " sur axe Δ_2 sont données par :

$$X_1.a_2 = (-3.67 \quad -3.83 \quad -5.22 \quad -4.56).\begin{pmatrix} -0.567 \\ -0.372 \\ 0.650 \\ 0.323 \end{pmatrix} = -1.41$$

3. Les coefficients de corrélation linéaire entre le premier facteur et les 4 variables :

$$\rho(1,1) = \sqrt{\lambda_1} \times \frac{a_{11}}{\sqrt{V_1}} = \sqrt{28.253} \times \frac{0.515}{3.37} = 0.811$$

$$\rho(1,2) = \sqrt{\lambda_1} \times \frac{a_{12}}{\sqrt{V_2}} = \sqrt{28.253} \times \frac{0.507}{2.99} = 0.9$$

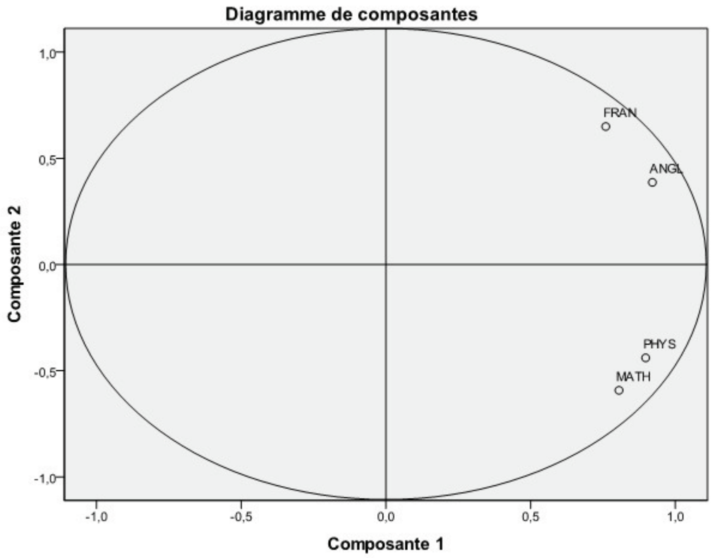
$$\rho(1,3) = \sqrt{\lambda_1} \times \frac{a_{13}}{\sqrt{V_2}} = \sqrt{28.253} \times \frac{0.492}{3.47} = 0.75 \quad \cdots$$

4. Les corrélations entre les variables et les autres facteurs sont données ci-dessous

	1	2	3	4
math	0.81	-0.584	0.01	-0.02
phys	0.90	-0.432	-0.03	0.02
fran	0.75	0.651	-0.02	-0.01
ang	0.92	0.399	0.04	0.02

Interprétation

Ainsi, on voit que le premier facteur est corrélé positivement, et assez fortement, avec chacune des 4 variables initiales : plus un élève obtient de bonnes notes dans chacune des 4 disciplines, plus il a un score élevé sur l'axe 1 ; réciproquement, plus ses notes sont mauvaises, plus son score est négatif ; l'axe 1 représente donc, en quelques sortes, le résultat global (dans l'ensemble des 4 disciplines considérées) des élèves. En ce qui concerne l'axe 2, il oppose, d'une part, le français et l'anglais (corrélations positives), d'autre part, les mathématiques et la physique (corrélations négatives). Il s'agit donc d'un axe d'opposition entre disciplines littéraires et disciplines scientifiques, surtout marqué par l'opposition entre le français et les mathématiques.



5. l'indice ponctuel de la représentation de " Jean " sur le premier axe factoriel :
   On a la première ligne de X est : $X_1(-3.67 \quad -3.83 \quad -5.22 \quad -4.56)$

   Le vecteur directeur unitaire a_1 de Δ_1 est : $\begin{pmatrix} 0.515 \\ 0.507 \\ 0.492 \\ 0.485 \end{pmatrix}$

   Donc $\cos^2(\alpha_{U_1,\Delta_1}) = \dfrac{(X_1.a_1)^2}{\|X_1\|^2} = \dfrac{(-8.61)^2}{8.46^2} = 0.97 \quad (U_1 : \text{" Jean "})$

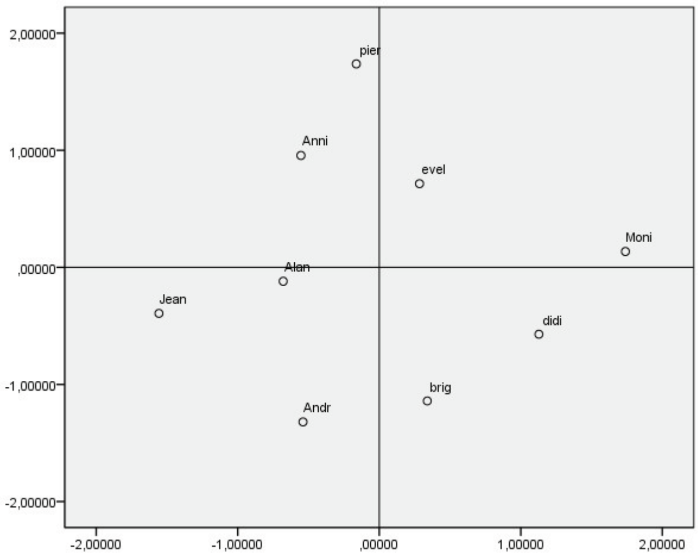
   De même l'indice ponctuel de la représentation de " Jean " sur le eeuxième axe factoriel :
   On a la première ligne de X est : $X_1(-3.67 \quad -3.83 \quad -5.22 \quad -4.56)$

   Le vecteur directeur unitaire a_2 de Δ_2 est : $\begin{pmatrix} -0.567 \\ -0.372 \\ 0.650 \\ 0.323 \end{pmatrix}$

   Donc $\cos^2(\alpha_{U_1,\Delta_2}) = \dfrac{(X_1.a_2)^2}{\|X_1\|^2} = \dfrac{(-1.41)^2}{8.46^2} = 0.026$ L'indice ponctuel de la représentation de " Jean " sur le plan des deux premiers facteurs :

   $$\cos^2(\alpha_{U_1,\Delta_1 \oplus \Delta_2}) = \cos^2(\alpha_{U_1,\Delta_1}) + \cos^2(\alpha_{U_1,\Delta_2}) = 0.999$$

   On a $\cos^2(\alpha_{U_1,\Delta_1 \oplus \Delta_2}) \simeq 1$ donc " Jean " est bien représenté dans le plan des deux premiers axes.



2,00000
1,00000
,00000
-1,00000
-2,00000
pier
Anni
evel
Moni
Alan
Jean
didi
brig
Andr
-2,00000
-1,00000
,00000
1,00000
2,00000