Analyse IV

M. Derouich

9 février 2020

Plan

Plan

Plan

Plan

1. Topologie de $\mathbb{R}^n$
2. Applications de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$
3. Différentielle d'une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$
4. **Intégrales doubles et triples**

Topologie de $\mathbb{R}^n$

M. Derouich

9 février 2020

Définition 1.1

On note par

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^n &= \underbrace{\mathbb{R}\times\cdots\times\mathbb{R}}_{n \text{ fois}},\\ &= \{x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)/x_i\in\mathbb{R};\ 1\leq i\leq n\}\end{aligned}$$

Les éléments de $\mathbb{R}^n$ *sont des n-uplets* $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ *avec*

$$x_i\in\mathbb{R};\quad 1\leq i\leq n$$

Soit $x\in\mathbb{R}^n$ *et* $y\in\mathbb{R}^n$ *avec* $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ *et* $y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$
On pose

$$\begin{cases} x+y &= (x_1+y_1,x_2+x_2,\cdots,x_n+y_n)\\ \lambda x &= (\lambda x_1,\lambda x_2,\cdots,\lambda x_n)\quad \lambda\in\mathbb{R}\end{cases}$$

Définition (suite)

On définit sur $\mathbb{R}^n$ *une structure d'espace vectoriel réel de dimension* n*, dont* $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ *est la base canonique de* $\mathbb{R}^n$ *avec*

$$e_i = \underbrace{(0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0)}_{i^{\,eme}\text{position}}$$

Remarque 1.1

- *Lorsque* $n = 2$ *on écrit souvent* (x, y) *au lieu de* (x_1, x_2)
- *Lorsque* $n = 3$ *on écrit souvent* (x, y, z) *au lieu de* (x_1, x_2, x_3)

Définition 1.2

on appelle norme sur $\mathbb{R}^n$ toute application (notée $\|.\|$) de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^+$ ($x \mapsto \|x\|$) vérifiant les propriétés suivantes

1. ($\mathcal{N}_1$) $\forall x \in \mathbb{R}^n; \|x\| \geq 0_{\mathbb{R}}$ *et* $\|x\| = 0_{\mathbb{R}} \Longleftrightarrow x = 0_{\mathbb{R}^n}$
2. ($\mathcal{N}_2$) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^n; \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
3. ($\mathcal{N}_3$) $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2; \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Proposition 1.1

$\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall y \in \mathbb{R}^n; | \ \|x\| - \|y\| \ | \leq \|x - y\|$

En effet on a $x = (x - y) + y$ donc d'après 3.

$$\|x\| = \|(x - y) + y\| \leq \|x - y\| + \|y\| \Longrightarrow \|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$$

De même on $y = (y - x) + x$ donc
$\|y\| \leq \|x - y\| + \|x\| \Longrightarrow \|y\| - \|x\| \leq \|x - y\|$
Par conséquence $| \ \|x\| - \|y\| \ | \leq \|x - y\|$

Exemple des normes sur $\mathbb{R}^n$

Soit $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$i) \ \ \|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \quad \text{(dite norme 1 sur } \mathbb{R}^n\text{)}$$

$$ii) \ \ \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \quad \text{(dite norme euclidienne sur } \mathbb{R}^n\text{)}$$

$$iii) \ \ \|x\|_\infty = \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i| \quad \text{(dite norme infini sur } \mathbb{R}^n\text{)}$$

Définition 1.3

On dit que deux normes $\|.\|_a$ *et* $\|.\|_b$ *sont équivalentes sur* $\mathbb{R}^n$ *si et seulement si* $\exists\alpha > 0; \exists\beta > 0$ *tel que :*

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \alpha\|x\|_a \leq \|x\|_b \leq \beta\|x\|_a$$

Théorème 1.1

Dans $\mathbb{R}^n$*, toutes les normes sont équivalentes.*

Exercice 1.1

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ *:* $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty$

Définition 1.4

On appelle **distance** (*ou* **métrique**) *sur* $\mathbb{R}^n$*, une application* d *définie de* $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}^+$*, vérifiant les trois conditions suivantes :*

1. $(\mathcal{D}_1)$ $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n,\ d(x,y) = d(y,x)$ *(symétrie),*
2. $(\mathcal{D}_2)$ $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n,\ d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$ *(séparation),*
3. $(\mathcal{D}_3)$ $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n,\ d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ *(inégalité triangulaire).*

Exemple 1 (Distances sur $\mathbb{R}^n$)

Les applications d_1, d_2 et d_∞ définies sur $\mathbb{R}^n$ par :

$$\begin{aligned} d_1(x,y) &= \sum_{k=1}^{n} |y_k - x_k|, \\ d_2(x,y) &= \left[\sum_{k=1}^{n} (y_k - x_k)^2\right]^{\frac{1}{2}}, \quad \textit{distance euclidienne}, \\ d_\infty(x,y) &= \sup_{k=1,\dots,n} |y_k - x_k|, \quad \textit{distance sup.} \end{aligned}$$

sont des distances sur $\mathbb{R}^n$

Définition 1.5

Soient d_1 et d_2 deux distances sur $\mathbb{R}^n$. On dit que d_1 et d_2 sont deux **distances équivalentes** *s'ils existent deux nombres réels strictement positifs α et β tels que :*

$$\alpha d_1(x,y) \leq d_2(x,y) \leq \beta d_1(x,y) \quad \forall (x,y) \in E^2.$$

Notation : $d_1 \backsim d_2$.

Définition 1.6

Soit $\|.\|$ une norme dans $\mathbb{R}^n$, la distance associe à cette norme est l'application

$$\begin{array}{rcl} d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ (x,y) & \longrightarrow & d(x,y) = \|x-y\| \end{array}$$

Remarque 1.2

On peut trouver des distances non associées à des normes.
Par exemple, les distances

$$\begin{array}{rcl} d_1(x,y) & = & \left|x^3 - y^3\right|, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2, \\ d_2(x,y) & = & \left\{ \begin{array}{l} 0 \ \text{ si } \ x = y, \\ 1 \ \text{ si } \ x \neq y \end{array} \right. \quad \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \quad \text{(distance discrète)}, \end{array}$$

ne sont pas associées à des normes.

Définition 1.7

Soit $a \in \mathbb{R}^n$, $r \in \mathbb{R}^+ (r > 0)$ *et* $\|.\|$ *une norme sur* $\mathbb{R}^n$.

- *On appelle boule ouverte de centre* a *et de rayon* r *l'ensemble :*

$$\begin{aligned} B(a,r) &= \{x \in \mathbb{R}^n / d(x,a) < r\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n / \|x-a\| < r\} \end{aligned}$$

- *On appelle boule fermée de centre* a *et de rayon* r *l'ensemble :*

$$\begin{aligned} \bar{B}(a,r) &= \{x \in \mathbb{R}^n / d(x,a) \leq r\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n / \|x-a\| \leq r\}) \end{aligned}$$

- *On appelle sphère de centre* a *et de rayon* r *l'ensemble :*

$$\begin{aligned} S(a,r) &= \{x \in \mathbb{R}^n / d(x,a) = r\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n / \|x-a\| = r\} \end{aligned}$$

Exemple 2

1. *Dans* $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} B(a,r) &= \{x \in \mathbb{R} / |x-a| < r\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} / a-r < x < a+r\}) \end{aligned}$$

$\Longrightarrow B(a,r) =]a-r, a+r[$
De même $\bar{B}(a,r) = [a-r, a+r]$

2. *Dans* $\mathbb{R}^2$

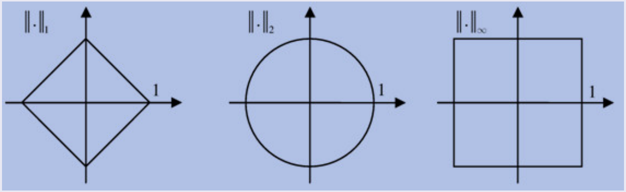
$$\begin{aligned} \bar{B}_1(0,1) &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \|(x,y)\|_1 \leq 1\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / |x| + |y| \leq 1\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{B}_2(0,1) &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / ||x||_2 \leq 1\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \sqrt{x^2+y^2} \leq 1\} \end{aligned}$$

Exemple (suite)

$$\begin{aligned}\bar{B}_\infty(0,1) &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \|(x,y)\|_\infty \leq 1\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \sup(|x|,|y|) \leq 1\}\end{aligned}$$

Ces trois boules fermées de $\mathbb{R}^2$ de centre 0 et de rayon 1 (Boules unités) respectivement pour les trois normes : $\|.\|_1, \|.\|_2$ *et* $\|.\|_\infty$



Remarque 1.3

- *Dans* $\mathbb{R}$*, toutes ces boules coïncident*
- *la forme des boules dans* $\mathbb{R}^n (n \geq 2)$ *dépend de la norme choisie*

Définition 1.8 (voisinage)

Soit $a \in \mathbb{R}^n$ et V une partie de $\mathbb{R}^n$, on dit V est un voisinage de a s'il existe $r > 0$ tel que $B(a,r) \subset V$

Exemple 3

1. *Dans* $\mathbb{R}$, $]0,2]$ *est un voisinage de 1 (* $B(1,1) =]0;2[\subset]0;2]$)
2. *Dans* $\mathbb{R}^2$,

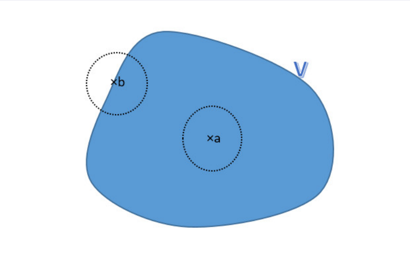


FIGURE – V *est un voisinage de* a *mais* V *n' est pas un voisinage de* b

Définition 1.9

Une partie U de $\mathbb{R}^n$ est dite ouverte si et seulement si U est voisinage de chacun de ses points, Autrement dit :$\forall a \in U, \exists r > 0$ tel que $B(a,r) \subset U$. On dit encore que U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Exemple 4

1. *Dans $\mathbb{R}$, tout intervalle de la forme $]a,b[$ est ouvert de $\mathbb{R}$.*
2. *Toute boule ouverte $B(a,r)$ de $\mathbb{R}^n$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.*
   En effet : Soit $B(a,r)$ une boule ouverte de $\mathbb{R}^n$,
   Montrons que $\forall x \in B(a,r), \exists r_1 > 0$ tel que $B(x,r_1) \subset B(a,r)$
   Pour cela il suffit de prendre $0 < r_1 < r - \|x-a\|$
   $\forall y \in B(x,r_1)$ on a $\|y-x\| < r_1$
   $\Longrightarrow \|y-x\| < r_1 < r - d(x,a) = r - \|x-a\|$ et on a

$$\begin{aligned} \|y-a\| &\leq \|y-x\| + \|x-a\| \\ &\leq r - \|x-a\| + \|x-a\| = r \end{aligned}$$

   $\Longrightarrow y \in B(a,r) \Longrightarrow B(x,r_1) \subset B(a,r)$.

3. La boule fermée de $\mathbb{R}^2$ n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}^2$

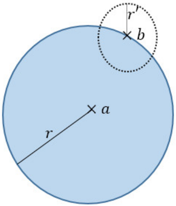


FIGURE – $B(b,r') \not\subset \ B'(a,r)$

Définition 1.10 (fermé)

Soit F une partie de $\mathbb{R}^n$, on dit que F est fermée si $C_{\mathbb{R}^n}^F$ est une partie ouverte. Avec $C_{\mathbb{R}^n}^F = \{x \in \mathbb{R}^n$ et $x \notin F\}$ dit le complémentaire de F. On dit encore que F est un fermé de $\mathbb{R}^n$.

Théorème 1.2 (Caractérisation séquentielle des parties fermées)

Soit F une partie de E. On a équivalence entre :
$(i)F$ est fermée ;
$(ii)\forall(x_n) \subset F, x_n \longrightarrow a \Longrightarrow a \in F$ [F contient les limites de ses suites convergentes].

Exemple 5

1. *Dans* $\mathbb{R}$, *les intervalles fermés* $[a,b], [a,+\infty[,]-\infty,a]$ *sont des parties fermées de* $\mathbb{R}$.
2. *Les boules fermées sont des parties fermées.*
3. *Dans* $\mathbb{R}$, *les intervalles de la forme* $[b,c[,]b,c]$ *ne sont ni fermées ni ouverts*

Proposition 1.2

(i) *Toute réunion d'ensembles ouverts est un ensemble ouvert.*
(ii) *Toute intersection* <u>*finie*</u> *d'ensembles ouverts est un ensemble ouvert.*

Preuve.

(i) Soit $(O_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts (I fini ou infini). Posons

$$O = \bigcup_{i\in I} O_i.$$

Soit $x \in O$. Il existe donc $i_0 \in I$ tel que $x \in O_{i_0}$. Comme O_{i_0} est ouvert, il va exister $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset O_{i_0} \subset O$. Par suite, O est ouvert.
D'où (i) .
(ii) Supposons I fini et posons$O = \bigcap_{i\in I} O_i$.
Soit $x \in O$. Donc, pour tout $i \in I$, $x \in O_i$. Comme O_i est ouvert, pour chaque $i \in I$, il existe $r_i > 0$ tel que $B(x, r_i) \subset O_i$.
Posons $r_x = \inf\limits_{i\in I} r_i$.
Puisque I est fini, alors $r_x > 0$ et pour tout i, $B(x, r_x) \subset O_i$. Donc,

$$B(x, r_x) \subset \bigcap_{i\in I} O_i.$$

Par conséquent, $O = \bigcap_{i\in I} O_i$ est ouvert. D'où (ii) .

Exemple 6

Soit la famille infinie $O_n = \left]-1, \frac{1}{n}\right[\ (n \in \mathbb{N}^*)$ *d'intervalles ouverts dans* $\mathbb{R}$ *(boules ouvertes dans* $\mathbb{R}$*).*
La réunion $O = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} O_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \left]-1, \frac{1}{n}\right[= \left]-1, 1\right[,$ *est un ouvert.*
L'intersection $O = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} O_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left]-1, \frac{1}{n}\right[= \left]-1, 0\right],$ *n'est pas un ouvert.*

Par passage aux complémentaires dans la proposition 1.2, nous déduisons facilement le résultat suivant

Proposition 1.3

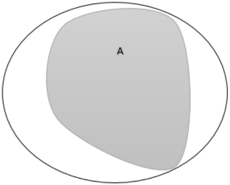
(i) *Toute intersection de fermés est un fermé.*
(ii) *Toute réunion finie de fermés est un fermé.*

Preuve. (cf : fiche TD N^0 1).

Définition 1.11 (Partie bornée)

Une partie A de $\mathbb{R}^n$ est bornée si et seulement si :

$$\exists a \in \mathbb{R}^n, \exists r > 0 / A \subset B(a,r)$$



Définition 2.1

On appelle suite d'éléments de $\mathbb{R}^p$, $p \geq 1$, *une application*

$$\begin{array}{rcl} u : \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R}^p \\ n & \mapsto & u_n = \left(u_n^{(1)}, u_n^{(2)}, \ldots, u_n^{(p)}\right), \end{array}$$

où $u_n^{(i)} \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \cdots, p$. *Une telle suite sera notée* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ou simplement* (u_n) . u_n *est le* $n^{ième}$ *terme de la suite ou le terme de rang* n.

Définition 2.2

On appelle sous-suite (ou suite extraite) de (u_n) *une suite de la forme* $\left(u_{\varphi(n)}\right)$ *où* $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ *est une application strictement croissante.*

Exemple 7

Les suites (u_{2n}) *et* (u_{2n+1}) *sont deux suites extraites de la suite* (u_n) .
Par la suite, $\mathbb{R}^p$, $p \geq 1$, *sera muni d'une norme notée* $\| \ \|$.

Définition 2.3

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite d'éléments de* $\mathbb{R}^p$. *On dit que la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge** *(ou* **tend***) vers une limite* $l = (l_1, l_2, \cdots, l_p) \in \mathbb{R}^p$ *si*

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \, n \geq n_\varepsilon \Longrightarrow \|u_n - l\| < \varepsilon.$$

Notation : $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} u_n = l$ *ou* $u_n \longrightarrow l$ *quand* $n \longrightarrow +\infty$.

Remarque 2.1

Si $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} u_n = l$*, alors pour tout* $r > 0$*,*

$$B(l,r) = \{x \in \mathbb{R}^p / d(x,l) < r\} = \{x \in \mathbb{R}^p / \|x - l\| < r\},$$

contient tous les termes de la suite sauf un nombre fini.
Ceci est équivalent à dire que tout voisinage V *de* l *contient tous les termes de la suite sauf un nombre fini.*

Remarque 2.2

La convergence d'une suite dans $\mathbb{R}^p$ *ne dépend pas de la norme choisie (car dans* $\mathbb{R}^p$*, toutes les normes sont équivalentes).*

Exemple 8

Soit (u_n) *la suite de* $\mathbb{R}^2$ *définie par :*

$$u_n = \left(\frac{n}{n+1}, e^{-n}\right), n \in \mathbb{N}.$$

Montrons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* $l = (1,0)$. *Pour la norme* $\| \ \|_\infty$, *nous avons,*

$$\|u_n - l\|_\infty = \sup\left(\frac{1}{n+1}, e^{-n}\right).$$

Comme $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty.} \frac{1}{n+1} = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty.} e^{-n} = 0$, *alors, pour tout* $\varepsilon > 0$,

$$\exists n_1 \in \mathbb{N},\ n \geq n_1 \Longrightarrow \frac{1}{n+1} < \varepsilon,$$
$$\exists n_2 \in \mathbb{N},\ n \geq n_2 \Longrightarrow e^{-n} < \varepsilon.$$

Exemple (suite)

Posons $n_\varepsilon = \sup(n_1, n_2)$. *Pour tout* $n \geq n_\varepsilon$, *on a*

$$\frac{1}{n+1} < \varepsilon \text{ et } e^{-n} < \varepsilon.$$

D'où,

$$\|u_n - l\|_\infty = \sup\left(\frac{1}{n+1}, e^{-n}\right) < \varepsilon.$$

Donc, $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} u_n = (1, 0)$.

Unicité de la limite

Proposition 2.1

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}^p$. Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors la limite est unique.

Preuve. Supposons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers deux limites distinctes l et l'. Donc,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N},\ n \geq n_\varepsilon \Longrightarrow \|u_n - l\| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ et } \|u_n - l'\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

En vertu de l'inégalité triangulaire, on obtient

$$\forall \varepsilon > 0,\ \ \|l - l'\| \leq \|u_n - l\| + \|u_n - l'\| < \varepsilon.$$

Ce qui est absurde.
Par conséquent, $l = l'$. D'où l'unicité.

Proposition 2.2

Soit $(u_n) = \left(u_n^{(1)}, u_n^{(2)}, \ldots, u_n^{(p)}\right)$ *une suite de* $\mathbb{R}^p$*. Alors la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* $l = (l_1, l_2, \ldots, l_p) \in \mathbb{R}^p$ *si et seulement si pour tout* $k = 1, \ldots, p$*, la suite* $\left(u_n^{(k)}\right)$ *converge vers* $l_k \in \mathbb{R}$*.*

Preuve. Comme $\| \ \| \backsim \| \ \|_\infty$ (norme sup), alors il existe $\beta > 0$ tel que$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^p, \quad \|x - y\|_\infty \leq \beta \|x - y\|.$ Nous avons

$$\begin{aligned}
\lim_{n \longrightarrow +\infty} u_n = l \quad & \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0,\, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N},\, n \geq n_\varepsilon \Longrightarrow \|u_n - l\| < \tfrac{\varepsilon}{\beta} \\
& \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0,\, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N},\, n \geq n_\varepsilon \Longrightarrow \|u_n - l\|_\infty < \varepsilon \\
& \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0,\, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N},\, n \geq n_\varepsilon \Longrightarrow \sup_{k=1,\ldots,p} \left|u_n^{(k)} - l_k\right| < \varepsilon \\
& \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0,\, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N},\, n \geq n_\varepsilon \Longrightarrow \left|u_n^{(k)} - l_k\right| < \varepsilon \\
& \qquad\qquad \forall k = 1, \ldots, p \\
& \Leftrightarrow \quad \lim_{n \longrightarrow +\infty} u_n^{(k)} = l_k,\ k = 1, \ldots, p.
\end{aligned}$$

D'où la proposition.

Exemple 9

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite de* $\mathbb{R}^3$ *définie pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$ *par* $u_n = \left(\sin\left(\frac{1}{n}\right), \frac{1}{n+1}, e^{-\frac{1}{n}}\right)$. *La suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* $l = (0,0,1)$ *car* $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right) = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ *et* $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} e^{-\frac{1}{n}} = 1$.

1.4.3 Suites de Cauchy

Définition 2.4

On dit que la suite (u_n) *est de* **Cauchy** *si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N},\ n \geq n_\varepsilon \text{ et } m \geq n_\varepsilon \Longrightarrow \|u_n - u_m\| < \varepsilon.$$

Remarque 2.3

1. *La définition exprime le fait qu'aussi petit que soit* ε*, les termes de la suite* (u_n) *ont à partir d'un certain rang* n_ε *des distances mutuelles plus petites que* ε.
2. *La notion de suite de Cauchy reste invariante si la norme est remplacée par une une autre norme (car dans* $\mathbb{R}^p$*, toutes les normes sont équivalentes).*

Proposition 2.3

Toute suite convergente est de Cauchy.

Preuve. Soit (u_n) une suite qui converge vers l. On a

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \, n \geq n_\varepsilon \Longrightarrow \|u_n - l\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

En vertu de l'inégalité triangulaire, on déduit

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \, n \geq n_\varepsilon \text{ et } m \geq n_\varepsilon \Longrightarrow \|u_n - u_m\| < \varepsilon.$$

Proposition 2.4

Toute suite de Cauchy est bornée. En particulier, toute suite convergente est bornée.

Proposition 2.5

Soit $(u_n) = \left(u_n^{(1)}, u_n^{(2)}, \ldots, u_n^{(p)}\right)$ *une suite de* $\mathbb{R}^p$. *Pour que* (u_n) *soit une suite de Cauchy dans* $\mathbb{R}^p$, *il faut et il suffit, que pour tout* $k = 1, 2, \ldots, p$, *la suite* $\left(u_n^{(k)}\right)$ *soit de Cauchy dans* $\mathbb{R}$.

Définition 3.1

Une partie A de $\mathbb{R}^p$ est dite **compacte** *si A est une partie fermée est bornée.*

Exemple 10

1. *L'intervalle $[a,b]$ est un ensemble compact de $\mathbb{R}$.*
2. *La boule fermée $B'(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^p / \ \|x-a\| \leq r\}$ est un compact de $\mathbb{R}^p$.*
3. $B(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^p / \ \|x-a\| < r\}$ *et* $B^\star(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^p / 0 < \|x-a\| < r\}$ *ne sont pas des parties compactes de $\mathbb{R}^p$ car elles ne sont pas fermées,*
4. $$D(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^p / \ \|x-a\| \geq r\} \quad \text{et}$$
$$E(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^p / \ \|x-a\| > r\}$$
ne sont pas des ensembles compacts de $\mathbb{R}^p$ car ils ne sont pas bornés.

Définition 3.2

Soit A une partie de $\mathbb{R}^p$ et $\mathcal{R} = (R_i)_{i\in I}$ une famille de parties de $\mathbb{R}^p$. On dit que la famille $\mathcal{R}$ **recouvre** *A (ou constitue* **un recouvrement** *de A) si*

$$A \subset \bigcup_{i\in I} R_i.$$

- *Le recouvrement est dit fini si I est un ensemble fini.*
- *Le recouvrement est dit ouvert si les $R_i, i \in I$, sont des parties ouvertes de $\mathbb{R}^p$.*

Exemple 11

1. *La famille $\mathcal{R} = (]-n,n[)_{n\in\mathbb{N}}$ est un recouvrement ouvert de $\mathbb{R}$ car*
$$\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}]-n,n[\,.$$
2. *La famille $\mathcal{R} = \left(\left[0,\frac{1}{n}\right]\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est un recouvrement de $[0,1]$ car*
$$[0,1] \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \left[0,\frac{1}{n}\right].$$

Proposition 3.1

Soit A une partie de $\mathbb{R}^p$. Les propositions suivantes sont équivalentes.
(i) A est compacte.
(ii) A possède la propriété de **Bolzano-Weierstrass :** *Toute suite d'éléments de A admet une sous-suite qui converge vers un élément appartenant à A.*
(iii) A possède la propriété de **Borel-Lebesgue :** *de tout recouvrement ouvert de A, on peut extraire un recouvrement fini.*

Exemples 12

1. *$\varnothing$ est compact.*
2. *$\forall a \in \mathbb{R}^p$, $\{a\}$ est compact, et tout ensemble fini $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ est compact.*
3. *$\mathbb{R}$ n'est pas compact.*

Exemples 13

1. $\mathbb{Z}$ *n'est pas borné donc n'est pas compact*
2. $E = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ *C'est un compact car c'est un fermé et borné.*
3. *La boule fermée de centre* a *et de rayon* $r > 0$ *dans* $\mathbb{R}^p$ *est un fermé et borné.*

Remarque 3.1

Si A *est un compact de* $\mathbb{R}^p$ *et* B *un compact de* $\mathbb{R}^q$*, alors*

$$A \times B = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^{p+q} / x \in A \text{ et } y \in B \right\},$$

est un compact de $\mathbb{R}^{p+q}$.

Exemple 14

$[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \ldots \times [a_p, b_p]$ *est compact (ee produit fini de compacts est compact).*

Définition 4.1 (connexe)

Une partie A de $\mathbb{R}^n$ est dite **connexe** *si on ne peut pas le mettre sous la forme $A = O_1 \cup O_2$ où O_1 et O_2 sont deux ouverts disjoints non vides.*

Proposition 4.1

1. *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*
   - a) *A est connexe*
   - b) *A ne peut pas s'écrire comme réunion disjointe de deux fermés non vides.*
   - c) *si $B \subset A$ est à la fois ouvert et fermé alors $B = \phi$; ou $B = A$.*
2. *l'union de deux connexes d'intersection non vide est connexe.*
3. *les connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles (ouverts ou fermés ou semi-ouvert avec bornes finies ou infinies).*

Définition 4.2 (connexe par arcs)

Une partie A de $\mathbb{R}^n$ est **connexe par arcs** *si pour tous points a, b de A il existe une application continue f de $[0,1]$ dans A telle que $f(0) = a$ et $f(1) = b$.*

Remarque 4.1

L'application f est dite **chemin** *(continu) ou arc dans A d'extrémités a et b.*

Proposition 4.2

Tout connexe par arcs est connexe.

Définition 4.3 (convexe)

On dit que $A \subset \mathbb{R}^n$ est convexe si :

$$\forall t \in [0,1], (a,b) \in A^2, ta + (1-t)b \in A.$$

Proposition 4.3

Un convexe est connexe par arcs.