ECOLE NATIONALE DES SCIENCES APPLIQUEES OUJDA

CHAPITRE 3 : Différentielle d'une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$

16 mars 2020

Définition 1.1

Une fonction vectorielle de plusieurs variables f est une fonction de la forme

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^p \\ x = (x_1, \cdots, x_n) & \longmapsto & f(x) = \big(f_1(x), \cdots, f_p(x)\big) \end{array}$$

avec $f_1, f_2, \cdots, f_p$ sont des fonctions numériques c.à.d :

$$f_i \quad : \quad \begin{array}{c} \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f_i(x) \end{array} \qquad 1 \leq i \leq p$$

Proposition 1.1

Soit $A \subset \mathbb{R}^n$, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^p$, $x_0 \in A$ et $l = (l_1, l_2, \ldots, l_p) \in \mathbb{R}^p$.
Pour que f ait la limite l au point x_0, il faut et il suffit, que pour tout $\forall 1 \leq i \leq p$, la fonction numérique f_i ait pour limite l_i au point x_0.

Preuve. On choisit sur $\mathbb{R}^p$ la distance sup définie par :

$$d_p(x,y) = \sup_{1 \leq i \leq p} |x_i - y_i| .$$

Sur $\mathbb{R}^n$, on choisit une distance d_n équivalente à la distance euclidienne. Démontrons que la condition est nécessaire. Supposons que $\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = l$. On a donc,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, (x \in A \text{ et } d_n(x, x_0) < \eta)$$

$$\Longrightarrow d_p(f(x), l) = \sup_{1 \leq i \leq p} |f_i(x) - l_i| < \varepsilon.$$

Proposition 1.1

Soit $A \subset \mathbb{R}^n, f : A \longrightarrow \mathbb{R}^p$, $x_0 \in A$ et $l = (l_1, l_2, \ldots, l_p) \in \mathbb{R}^p$.
Pour que f ait la limite l au point x_0, il faut et il suffit, que pour tout $\forall 1 \leq i \leq p$, la fonction numérique f_i ait pour limite l_i au point x_0.

Preuve. On choisit sur $\mathbb{R}^p$ la distance sup définie par :

$$d_p(x, y) = \sup_{1 \leq i \leq p} |x_i - y_i|.$$

Sur $\mathbb{R}^n$, on choisit une distance d_n équivalente à la distance euclidienne.
Démontrons que la condition est nécessaire. Supposons que $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = l$. On a donc,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, (x \in A \text{ et } d_n(x, x_0) < \eta)$$
$$\Longrightarrow d_p(f(x), l) = \sup_{1 \leq i \leq p} |f_i(x) - l_i| < \varepsilon.$$

D'où,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, (x \in A \text{ et } d_n(x, x_0) < \eta) \Longrightarrow |f_i(x) - l_i| < \varepsilon,$$

$$\forall i \in \{1, \ldots, p\}.$$

$$\forall i \in \{1, 2, \ldots, p\}, \lim_{x \longrightarrow x_0} f_i(x) = l_i.$$

Montrons que la condition est suffisante.
Supposons que pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, p\}, \lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f_i(x) = l_i$.
Pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$, nous avons,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta_{\varepsilon,i,x_0} > 0, (x \in A \text{ et } d_n(x, x_0) < \eta_{\varepsilon,i,x_0}) \Longrightarrow |f_i(x) - l_i| < \varepsilon.$$

Posons $\eta = \inf\limits_{1 \leq i \leq p} \eta_{\varepsilon,i,x_0}$. On a,

$$(x \in A \text{ et } d_n(x, x_0) < \eta) \Longrightarrow \sup_{1 \leq i \leq p} |f_i(x) - l_i| = d_p(f(x), l) < \varepsilon.$$

Proposition 1.2

Soient : $A \subset \mathbb{R}^n$, $x_0 \in A$ *et* $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^p$. f *est continue au point* x_0 *(resp. sur* A*) si et seulement si* $\forall 1 \leq i \leq p$ *, la fonction numérique* f_i *est continue au point* x_0 *(resp. sur* A*).*

3.1.3 Caractéristique des fonctions continues

Proposition 1.3

Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$. *Les trois propositions suivantes sont équivalentes.*
(i) f *est continue sur* $\mathbb{R}^n$.
(ii) *Pour tout ouvert* O *de* $\mathbb{R}^p$, $f^{-1}(O)$ *est ouvert dans* $\mathbb{R}^n$.
(iii) *Pour tout fermé* F *de* $\mathbb{R}^p$, $f^{-1}(F)$ *est fermé dans* $\mathbb{R}^n$.

Exemple 1

1. *L'ensemble*$B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 > 10\right\}$ *est ouvert dans* $\mathbb{R}^2$ *car la fonction*

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & f(x,y) = x^2 + y^2, \end{array}$$

est continue sur $\mathbb{R}^2$ *et* $B = f^{-1}(]10, +\infty[)$ *est ouvert car c'est l'image réciproque de l'ouvert* $]10, +\infty[$ *par la fonction continue* f.

Exemple (suite)

2. $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = 2x - y\}$ *est fermé car c'est l'image réciproque du fermé* $\{0\}$ *par la fonction continue* $g(x,y) = x^2 + y^2 - 2x + y$; $D = g^{-1}(\{0\})$.

Remarque 1.1

L'image d'un ouvert (resp. fermé) de $\mathbb{R}^n$ *par une application continue n'est pas nécessairement un ouvert (resp. fermé) de* $\mathbb{R}^p$.

Par exemple,
L'image de l'ouvert $]-1,1[$ par l'application $x \mapsto x^2$ est l'intervalle $[0,1[$ qui n'est pas ouvert.
L'image du fermé $\mathbb{R}$ par l'application $x \mapsto arctgx$ est l'ouvert $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ qui n'est pas un fermé de $\mathbb{R}$.

3.1.4 Propriétés des fonctions continues sur un compact

Proposition 1.4

Soit $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ et $B \subset A$. Si f est continue sur A et B est une partie compacte de $\mathbb{R}^n$, alors $f(B)$ est un compact de $\mathbb{R}^p$.

Preuve. Soit $(O_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts de $\mathbb{R}^p$ qui recouvre $f(B)$ càd $f(B) \subset \bigcup_{i \in I} O_i$. Comme f est continue, d'après la proposition 1.3, $\forall i \in I$, $f^{-1}(O_i)$ est ouvert dans $\mathbb{R}^n$. Or, la famille $\left[f^{-1}(O_i)\right]_{i \in I}$ est un recouvrement ouvert de B. Comme B est compact, il existe une partie finie $J \subset I$ tel que

$$B \subset \cup_{j \in J} \left[f^{-1}(O_j)\right].$$

Donc,

$$f(B) \subset \bigcup_{j \in J} O_j.$$

Par suite, $f(B)$ est compact.

Corollaire 1.1 (théorème du maximum)

Toute fonction numérique continue sur un compact A de $\mathbb{R}^n$ est bornée et atteint ses bornes (c.à.d, $\exists (x_1, x_2) \in A^2$ tel que

$$\sup_{x \in A} f(x) = f(x_1) \text{ et } \inf_{x \in A} f(x) = f(x_2).)$$

Preuve. Puisque A est compact et f est continue sur A, d'après la proposition 1.4, $f(A)$ est compact dans $\mathbb{R}$. Donc, $f(A)$ est fermé et borné dans $\mathbb{R}$. Par conséquent, $\sup_{x \in A} f(x) \in f(A)$ et $\inf_{x \in A} f(x) \in f(A)$. D'où la proposition.

Définition 1.2 (Application uniformément continue)

Soit $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$.
On dit que f est **uniformément continue** *sur A si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall (x, y) \in A^2;\ d_n(x, y) < \eta \implies d_p[f(x), f(y)] < \varepsilon.$$

Exemple 2

Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ *telle que*

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n,\ d_p [f(x), f(y)] < k d_n (x, y), \tag{1}$$

où k *est une constante strictement positive. Alors,* f *est uniformément continue sur* $\mathbb{R}^n$*. Pour montrer l'uniforme continuité, il suffit de prendre* $\eta = \frac{\varepsilon}{k}$*. Une fonction qui vérifie (1) est dite* **Lipschitzienne** *de rapport* k*.*

Remarque 1.2

Une fonction uniformément continue est évidemment continue. La réciproque est fausse comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 3

La fonction

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & f(x) = x^2, \end{array}$$

est continue sur $\mathbb{R}^+$ *mais non uniformément continue sur* $\mathbb{R}^+$. *Choisissons sur* $\mathbb{R}^+$ *la distance naturelle. On a*

$$d[f(x), f(y)] = |f(y) - f(x)| = \left|y^2 - x^2\right| = (y+x)\,|y-x|\,.$$

Soit $\varepsilon > 0$ *et* $\eta > 0$. *Les réels* $x = \frac{\varepsilon}{\eta}$ *et* $y = x + \frac{\eta}{2}$ *vérifient*

$$|y-x| = \frac{\eta}{2} < \eta \text{ et } (y+x)\,|y-x| > 2x\,|y-x| = \varepsilon.$$

Donc, f *n'est pas uniformément continue sur* $\mathbb{R}^+$.

Proposition 1.5 (Théorème de Heine)

Toute fonction continue sur un compact est uniformément continue.

Preuve. Supposons que $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ est continue.
On a

$$\forall \varepsilon > 0, \forall x \in A, \exists \eta_x > 0 \text{ tel que } \left(y \in A \text{ et } d_n\left(x,y\right) < 2\eta_x\right) \Longrightarrow d_p\left[f\left(x\right), f\left(\right.\right.$$

La famille $\left[B\left(x,\eta_x\right)\right]_{x\in A}$ constitue un recouvrement ouvet de A. Comme A est compact, on peut extraire un recouvrement fini. Il existe donc $x_1, x_2, \ldots, x_m$ tel que

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{m} B\left(x_k, \eta_{x_k}\right).$$

Posons $\eta = \inf\limits_{k=1,\ldots,m} \eta_{x_k} > 0$.
Soient y et z deux éléments de A tel que $d_n\left(y,z\right) < \eta$.
Puisque $y \in A$, il existe $k \in \{1, 2, \ldots, m\}$ tel que $y \in B\left(x_k, \eta_{x_k}\right)$.
D'où, $d_n\left(x_k, y\right) < \eta_{x_k}$.

D'autre part,

$$d_n\left(x_k,z\right) \leq d_n\left(x_k,y\right) + d_n\left(y,z\right) \leq \eta_{x_k} + \eta \leq 2\eta_{x_k}.$$

Donc, on a

$$d_p\left[f\left(x_k\right),f\left(y\right)\right] < \frac{\varepsilon}{2} \text{ et } d_p\left[f\left(x_k\right),f\left(z\right)\right] < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Par conséquent,

$$d_p\left[f\left(y\right),f\left(z\right)\right] \leq d_p\left[f\left(x_k\right),f\left(y\right)\right] + d_p\left[f\left(x_k\right),f\left(z\right)\right] < \varepsilon.$$

D'où le résultat.

Définition 2.1

Soit $f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ *une application de* $\mathbb{R}^n$ *dans* $\mathbb{R}^p$ *on dira que* f *différentiable si et seulement si* $\forall 1 \leq i \leq p$ *, la fonction numérique* f_i *est différentiable.*

Remarque 2.1

$f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ *est différentiable en* $a \in \mathbb{R}^n$ *si et seulement s'il existe une application* df_a *linéaire de* $\mathbb{R}^n$ *dans* $\mathbb{R}^p$ *telle que*

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a) - df_a(h)}{\|h\|_n} = 0, \tag{2}$$

soit au voisinage de 0,

$$f(a+h) = f(a) + df_a(h) + \|h\|_n \varepsilon(a,h), \text{ avec } \lim_{h\longrightarrow 0} \varepsilon(a,h) = 0,$$

Remarque (suite)

ou encore avec les notations de Landau

$$f\left(a+h\right)=f\left(a\right)+df_{a}\left(h\right)+o\left\|h\right\|_{n}$$

Proposition 2.1

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $x_0 \in U$, f et g deux fonctions de U dans $\mathbb{R}^p$ différentiables en x_0, λ et μ deux réels. Alors, la fonction $\lambda f + \mu g$ est différentiable en x_0 et sa différentielle en ce point est :

$$d\left(\lambda f + \mu g\right)_{x_0} = \lambda df_{x_0} + \mu dg_{x_0}$$

3.3.2 Différentielle du produit

Proposition 2.2

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $x_0 \in U$, f et g deux fonctions de U dans $\mathbb{R}$ différentiables en x_0. Alors, la fonction fg est différentiable en x_0 et sa différentielle en ce point est :

$$d\left(fg\right)_{x_0} = g\left(x_0\right) df_{x_0} + f\left(x_0\right) dg_{x_0}.$$

3.3.3 Différentielle du quotient

Proposition 2.3

Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$, $x_0 \in U$, f une fonction de U dans $\mathbb{R}$ différentiable en x_0 et telle que $f(x_0) \neq 0$. Alors, il existe un voisinage V de x_0 tel que f ne soit non nulle sur $U \cap V$. La fonction $\frac{1}{f}$ définie de $U \cap V$ dans $\mathbb{R}$ est différentiable en x_0 et sa différentielle est

$$d\left(\frac{1}{f}\right)_{x_0} = -\frac{1}{\left[f(x_0)\right]^2} df_{x_0}.$$

Proposition 2.4

Si f et g sont différentiables en x_0 et si $g(x_0) \neq 0$, alors $\frac{f}{g}$ est différentiable en x_0 et on a

$$d\left(\frac{f}{g}\right)_{x_0} = -\frac{f(x_0)\, dg_{x_0} - g(x_0)\, df_{x_0}}{\left[g(x_0)\right]^2}.$$

Définition 2.2

1. *l'application linéaire df_a admet une unique matrice qui la représente dans la base canonique. Cette matrice est appelée* **matrice jacobienne** *donnée par :*

$$\mathcal{J}_f(a) = \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a)\right)_{\substack{1\leq j\leq p \\ i\leq i\leq n}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & . & . & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_p}{\partial x_2}(a) & . & . & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

c' est une matrice à p lignes et n colonnes

2. *si $p = n$ alors $\mathcal{J}_f(a)$ est une matrice carrée*
On appelle **jacobien** *d'une application f le déterminant de la matrice jacobienne $\mathcal{J}_f(a)$ et on le note $\frac{D(f_1,...,f_p)}{D(x_1,...,x_p)}(a)$ ou $\frac{\partial(f_1,...,f_p)}{\partial(x_1,...,x_p)}(a)$.*

Définition (suite)

et on a $\det(\mathcal{J}_{\mathbf{f}}(\mathbf{a})) = \frac{\mathbf{D}(\mathbf{f_1,\dots,f_p})}{\mathbf{D}(\mathbf{x_1,\dots,x_p})}(\mathbf{a}) = \frac{\partial(\mathbf{f_1,\dots,f_p})}{\partial(\mathbf{x_1,\dots,x_p})}(\mathbf{a})$.

3. *si f est une application linéaire alors sa matrice coïncide avec sa jacobienne (car $df = f$)*

Remarque 2.2

1. *Pour tout $u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$, on a*

$$(df_a.u)^t = \mathcal{J}_f(a).u^t = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}.$$

2. *L'application df_a est une bijection de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^n$ si et seulement si*

$$\frac{D(f_1, \dots, f_p)}{D(x_1, \dots, x_p)}(a) \neq 0.$$

3.3.5 Application composée :

Théorème 2.1

Soit U *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$, V *un ouvert de* $\mathbb{R}^p$, $a \in U, f : U \longrightarrow \mathbb{R}^p$ *et* $f : V \longrightarrow \mathbb{R}^q$.
Si $f(U) \subset V$, f *différentiable au point* a *et* g *différentiable au point* $f(a)$, *alors* gof *est différentiable au point* a *et on a*

$$\mathcal{J}_{gof}(a) = \mathcal{J}_g(f(a)) \times \mathcal{J}_f(a)$$

3.3.6 Application inverse :

supposons que $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ application supposons qu'il existe une application U vérifient $fog = gof = I_d$ Alors f est inversible dans D et g est l'application inverse.

Théorème 2.2

si f *admet dans* D *(un domaine de* $\mathbb{R}^n$*) une application inverse* $g = f^{-1}$, *alors le jacobien de* f^{-1} *est l'inverse du jacobien de* f *c.à.d*

$$\mathcal{J}_{f^{-1}}(f(a)) = \left[\mathcal{J}_f(a)\right]^{-1}.$$

3.3.7 Dérivées partielles d'une fonction composée

Proposition 2.5

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ *une fonction différentiable en* $a \in U$, $g : V \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^q$ *tq* $f(U) \subset V$ *et différentiable en* $f(a) = b$. *et*

$$h : \begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & \mathbb{R}^q \\ x = (x_1, \cdots, x_n) & \longmapsto & h(x) = gof(x) \end{array}$$

alors

1. $\forall j = 1 \cdots q$ *la fonction* h_j *admet une dérivée partielle par rapport à* x_i, $i = 1 \cdots n$ *au point* a.
2. *et on a la formule suivante :*

$$\frac{\partial h_j}{\partial x_i}(a) = \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial g_j}{\partial y_k}(b) \frac{\partial f_k}{\partial x_i}(a) \qquad \substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq q}$$

Preuve :

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ une fonction différentiable en $a \in U$ et $g : V \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^q$ tq $f(U) \subset V$ et différentiable en $f(a) = b$.
Posons $h = gof$. On a

$$J_h(a) = J_{gof}(a) = J_g(f(a)) \times J_f(a),$$

avec

$$\begin{aligned} J_f(a) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix} = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq p \\ 1\leq j\leq n}} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right)_{\substack{1\leq i\leq p \\ 1\leq j\leq n}} \\ J_g(f(a)) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(b) & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial y_p}(b) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial g_q}{\partial y_1}(b) & \dots & \frac{\partial g_q}{\partial y_q}(b) \end{pmatrix} = (b_{ij})_{\substack{1\leq i\leq q \\ 1\leq j\leq p}} = \left(\frac{\partial g_i}{\partial y_j}(b)\right)_{\substack{1\leq i\leq q \\ 1\leq j\leq p}} \end{aligned}$$

D'où,

$$J_h(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial h_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial h_q}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial h_q}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix} = (c_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq q \\ 1 \leq j \leq n}} = \left(\frac{\partial h_i}{\partial x_j}(a)\right)_{\substack{1 \leq i \leq q \\ 1 \leq j \leq n}}.$$

$$\text{donc} \quad c_{ij} = \frac{\partial h_i}{\partial x_j}(a) = \sum_{k=1}^{p} b_{ik} a_{kj} = \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial g_i}{\partial y_k}(b) \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(a).$$

Exemples 4

1. *Soit f la fonction de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par :*

$$\begin{aligned} f(r,\theta,\varphi) &= (x(r,\theta,\varphi), y(r,\theta,\varphi), z(r,\theta,\varphi)) \\ &= (r\cos\theta\cos\varphi, r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\varphi). \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial r} &= \cos\theta\cos\varphi, \ \frac{\partial x}{\partial \theta} = -r\sin\theta\cos\varphi, \ \frac{\partial x}{\partial \varphi} = -r\cos\theta\sin\varphi; \\ \frac{\partial y}{\partial r} &= \sin\theta\cos\varphi, \ \frac{\partial y}{\partial \theta} = r\cos\theta\cos\varphi, \ \frac{\partial y}{\partial \varphi} = -r\sin\theta\sin\varphi; \\ \frac{\partial z}{\partial r} &= \sin\varphi, \ \frac{\partial z}{\partial \theta} = 0, \ \frac{\partial z}{\partial \varphi} = r\cos\varphi; \end{aligned}$$

Exemples (suite)

$$\textit{Donc} \quad J_f(r,\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\cos\varphi & -r\cos\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\varphi & 0 & r\cos\varphi \end{pmatrix}$$

Le jacobien de f est

$$\frac{\partial(f_1,f_2,f_3)}{\partial(r,\theta,\varphi)} = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)} = r^2\cos(\varphi)$$

2. *Soient les fonction f, g et h définies par :*

$$f \; : \; \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (r,\theta) & \longmapsto & (r\cos\theta, r\sin\theta) \end{array} \; ; \; g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x^2+y^2 \end{array}$$

$$h \; = \; gof. : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (r,\theta) & \longmapsto & h(r,\theta) = g[f(r,\theta)] = r^2 \end{array}$$

Exemples (suite)

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial h}{\partial r}(r,\theta) &= \frac{\partial g}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta)\frac{\partial f_1}{\partial r}(r,\theta) + \frac{\partial g}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)\frac{\partial f_2}{\partial r}(r,\theta) \\
&= \cos\theta\frac{\partial g}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + \sin\theta\frac{\partial g}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta) \\
&= 2r\cos^2\theta + 2r\sin^2\theta = 2r \\
\frac{\partial h}{\partial \theta}(r,\theta) &= \frac{\partial g}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta)\frac{\partial f_1}{\partial \theta}(r,\theta) + \frac{\partial g}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)\frac{\partial f_2}{\partial \theta}(r,\theta) \\
&= -r\sin\theta\frac{\partial g}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + r\cos\theta\frac{\partial g}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta) \\
&= -2r^2\sin\theta\cos\theta + 2r^2\sin\theta\cos\theta = 0.
\end{aligned}
$$

On retrouve facilement le résultat en explicitant $h((r,\theta)) = gof(r,\theta)$

Soit $f(x,y)$ une fonction à deux variables réelles définis et continue dans un domaine D. Associons lui l'équation $f(x,y)=0$
Cette équation peut avoir des solutions, qui représentent des points isolés du plan.

Exemple 5

$F(x,y)=x^2+(y-1)^2$ *admet comme solution réelle la point* $(0,1)$

Remarque 3.1

Il arrive que pour toute valeur de x *l'équation considéré comme équation en* y*, admet une où plusieurs solutions.*

Exemple 6

$f(x,y) = x^2 + (y-1)^2 - R^2$
L'équation $f(x,y) = 0$ *admet* $\forall x / |x| \leq R$ *deux solutions*
$y = 1 + \sqrt{R^2 - x^2}$ *et* $y = 1 - \sqrt{R^2 - x^2}$

Nous nous proposon de chercher des critères pour que la solution soit inique.

Définition 3.1

Nous dirons que l'équation $f(x,y) = 0$ *définie une fonction implicite* φ, *si la fonction* φ *existe et vérifie* $f(x, \varphi(x)) = 0$ *pour tout* x

3.4.2 Théorème des fonctions implicites dans $\mathbb{R}^2$

Théorème 3.1

Soit f une fonction définis dans un domine D du plan et possédant dans D une dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial y}$ continue.
Supposons qu'il existe un point $(x_0, y_0) \in D$ tel que $f(x_0, y_0) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$.
Alors elle existe une fonction φ continue définie sur un intervalle ouvert I contenant x_0 tel que :

$$\begin{cases} \varphi(x_0) = y_0 \\ f(x, \varphi(x)) = 0 \quad \forall x \in I \end{cases}$$

La fonction φ est unique, si en plus $\frac{\partial f}{\partial x}$ existe et continue dans D alors φ admet une dérivée continue donnée par

$$\varphi'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, \varphi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x))}$$

Exemple 7

1. *soit* $f(x,y) = x^2 + y^2 - 1$
existe-t-il une fonction $\varphi : U \to V$ *telle que* $f(x,\varphi(x)) = 0 \quad \forall x \in U$ *?*
ou $U \times V$ *est un voisinage de* $(1,0) = (x_0, y_0)$
on a $f(x_0,y_0) = 0$ *et* $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y$ *continue en tout point de* $\mathbb{R}^2$
mais $\frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = 0$ *donc il n'est existe pas* φ *tel que* $F(x,\varphi(x)) = 0$
2. *si on prend maintenant* $(x_0,y_0) = (0,1)$ *on a toujours* $f(x_0,y_0) = 0$
$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y$ *continue en tout point de* $\mathbb{R}^2$
$\frac{\partial f}{\partial y}(0,1) = 2 \neq 0$

donc il existe $\varphi : U =]-1,1[\longrightarrow V =]0,+\infty[$

$$x \longmapsto \varphi(x)$$

telle que $f(x,\varphi(x)) = 0$ *et* $\forall x \in]-1,1[, \quad \varphi(x) = \sqrt{1-x^2}$

Remarque 3.2

Soit $y = \varphi(x)$ *une solution de l'équation implicite* $f(x, y) = 0$
La tangente ou graphe de φ *au point* (x_0, y_0) *à pour équation*
$y - y_0 = \varphi'(x_0)(x - x_0)$
Or $\varphi'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,\varphi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi(x))}$ *donc*

$$(y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0))(x - x_0) = 0$$

Exemple 8

Tangente à la circonférence qui a pour équation $x^2 + y^2 = R^2$
$\Longrightarrow f(x, y) = x^2 + y^2 - R^2 \Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x$ *et* $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y$
D'où l'équation de la tangente est :

$$2x_0(x - x_0) + 2y_0(y - y_0) = 0$$

$$\Longrightarrow x_0.x - x_0^2 + y_0.y - y_0^2 = 0 \Longrightarrow x_0.x + y_0.y = R^2$$

Théorème 3.2

soit f(x,y,z) une fonction continue dans un domaine $D \subset \mathbb{R}^3$.
On suppose que $\frac{\partial f}{\partial z}$ existe et continue.
Si il existe un point (x_0, y_0, z_0) tel que $f(x_0, y_0, z_0) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$.
Alors il existe un voisinage V de (x_0, y_0) dans lequel on peut définir une fonction $\varphi(x, y)$ unique vérifiant

1. *φ continue*
2. *l'équation $f(x, y, \varphi(x, y)) = 0$ est vérifiée en tout point de V*
3. *si on plus $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ existent et sont continues dans D alors : φ admet dans V deux dérivées partielles :*

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial x} & = & -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} & = & -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}} \end{cases}$$

Définition 4.1

Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^p$ admettant sur U des dérivées partielles par rapport à chacune de ses variables. Pour chaque $i = 1, 2 \ldots, n$, on a donc une fonction

$$D_i f = \frac{\partial f}{\partial x_i} : \begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & \mathbb{R}^p \\ x & \longmapsto & \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \end{array}$$

La fonction $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ peut avoir une dérivée seconde par rapport à x_j en un point $a \in U$ ou sur U. On note $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$ ou $D_{ji} f(a)$ ou $f''_{x_i x_j}(a)$ la dérivée partielle par rapport à x_j au point a de la fonction $\frac{\partial f}{\partial x_i}$.

Définition (suite)

Les fonctions $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ *sont appelées dérivées partielles d'ordre* 2 *de* f.
Les fonctions $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}$ *seront notées* $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$.
Par récurrence, on définit les dérivées partielles d'ordre p *de* f *par :*

$$\frac{\partial^p f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_p}}(x) = \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \left(\frac{\partial^{p-1} f}{\partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_p}} \right)$$

qu'on note aussi $D_{i_1 i_2 \ldots i_p} f(x)$ *ou* $f^{(p)}_{x_{i_p} x_{i_{p-1} \ldots x_{i1}}}(x)$.

Exemple 9

Soit $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^3 x_2 - 5x_2 x_3^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2, x_3) = 6x_1^2 x_2$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^3 - 5x_2^3$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3) = -10x_3 x_2$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} = 6x_1^2$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = 12x_1 x_2$$

Définition 4.2

une fonction f, dont toutes dérivée partielle jusqu'a l'ordre k sont défini et continue dans un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ est dite de **classe $\mathbf{C^k}$** *dans Ω .*
la fonction f est dite de **classe $\mathbf{C^\infty}$** *sur Ω si f admet des dérivées partielles continues de n'importe quel ordre.*

Théorème 4.1 (théorème de Schwarz)

Si f est de classe C^2 dans Ω on a :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \quad \forall i;j, \quad i \neq j$$

Autrement dit : le résultat est indépendant de l'ordre de la dérivation .
Plus généralement si f est de classe C^k on a :

$$\forall p \leq k \quad \frac{\partial^p f}{\partial x_1 \ldots \partial x_{(i_p)}} = \frac{\partial^p f}{\partial x_{(p_{(i_1)})} \ldots \partial x_{(p_{(i_p)})}}$$

Définition 4.3 (Matrice Hessienne)

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n$ et soit $(e_1; \cdots; e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Si f est de classe C^2 sur l'ouvert U la matrice :

$$Hessf_x := \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x) & . & . & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x) & . & . & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(x) \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(x) & . & . & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(x) \end{pmatrix}$$

est appelée matrice hessienne de f en x.

Remarque 4.1

Le théorème de Schwarz montre que les dérivées partielles croisées sont égales, donc la matrice hessienne est symétrique.

Exemple 10

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^2$, *une fonction de classe* C^2, *la matrice hessienne de* f *en* (x, y) *est la matrice symétrique :*

$$Hessf_{(x,y)} := \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \end{pmatrix}$$

Définition 5.1

Soit x et y deux éléments de $\mathbb{R}^n$. On appelle segment d'extrémités x et y, l'ensemble

$$[x,y] = \{z \in \mathbb{R}^n / z = tx + (1-t)\,y, t \in [0,1]\}.$$

Théorème 5.1

Soit I un intervalle ouvert $\mathbb{R}$ et f une fonction dérivable de I dans $\mathbb{R}^p$. On suppose qu'il existe une fonction $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable, telle que

$$\left\|f'(t)\right\|_p \leq g'(t), \quad \forall t \in I.$$

Alors,

$$\|f(x) - f(y)\|_p \leq g(x) - g(y), \quad \forall x, y \in I.$$

Preuve.

Soit $\varepsilon > 0$ et considérons l'ensemble

$$I(\varepsilon) = \left\{ t \in I / \left\| f(t) - f(x) \right\|_p \leq g(t) - g(x) + \varepsilon (t - x) \right\}.$$

$x \in I(\varepsilon)$ entraîne que $I(\varepsilon) \neq \emptyset$. $I(\varepsilon) \subset I$, donc, $I(\varepsilon)$ est borné. D'où $\sup I(\varepsilon)$ existe. Posons $M = \sup I(\varepsilon)$ et montrons que $M \in I(\varepsilon)$. Soit (t_n) une suite de $I(\varepsilon)$ qui converge vers vers M. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\left\| f(t_n) - f(x) \right\|_p \leq g(t_n) - g(x) + \varepsilon (t_n - x).$$

Comme f et g sont continues, par passage à la limite, nous déduisons que

$$\left\| f(M) - f(x) \right\|_p \leq g(M) - g(x) + \varepsilon (M - x).$$

Donc, $M \in I(\varepsilon)$. Montrons maintenant que $M = y$. Supposons que $M < y$. Comme f et g sont dérivables à droite au point M, alors, il existe $h > 0$ tel que pour $M < t < M + h$, on ait à la fois

$$\left\| \frac{f(t) - f(M)}{t - M} - f'_d(M) \right\|_p \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad \left| \frac{g(t) - g(M)}{t - M} - g'_d(M) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}\left\|\frac{f(t)-f(M)}{t-M}\right\|_p &\leq \left\|f_d'(M)\right\|_p+\frac{\varepsilon}{2}\leq g_d'(M)+\frac{\varepsilon}{2}\\ &\leq \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{g(t)-g(M)}{t-M},\end{aligned}$$

càd

$$\|f(t)-f(M)\|_p\leq\varepsilon(t-M)+g(t)-g(M). \tag{3}$$

Puisque, $M\in I(\varepsilon)$, on a

$$\|f(M)-f(x)\|_p\leq g(M)-g(x)+\varepsilon(M-x). \tag{4}$$

Par conséquent, de (3) et (4), on déduit que pour tout $t\in\left]M,M+h\right[$,

$$\begin{aligned}\|f(t)-f(x)\|_p &\leq \|f(t)-f(M)\|_p+\|f(M)-f(x)\|_p\\ &\leq g(t)-g(x)+\varepsilon(t-x)\end{aligned}$$

Donc, $M+\frac{h}{2}\in I$. Ce qui contredit la définition de M.

Proposition 5.1 (Théorème de la moyenne)

Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^p$ différentiable sur U et tel que

$$\sup_{u \in U} \|df_u\| \leq k.$$

Alors, quels que soient les points x et y de U tel que le segment $[x, y]$ soit contenu dans U, on a

$$\|f(x) - f(y)\|_p \leq k \|x - y\|_n .$$

Preuve. Soit g la fonction de $I = [0, 1]$ dans $\mathbb{R}^n$ définie par :

$$g(t) = x + t(y - x).$$

On a $g(I) \subset U$. Donc, on peut considérer la fonction $F = fog$ définie de I dans $\mathbb{R}^p$. Comme f et g sont dérivables sur I, la fonction F est dérivable sur I et on a

$$F'(t) = f'(t).g'(t) = df_{g(t)}.g'(t) = df_{x+t(y-x)}.(y - x).$$

Donc,

$$\left\|F'(t)\right\|_p = \left\|df_{x+t(y-x)}.(y-x)\right\|_p \leq \left\|df_{x+t(y-x)}\right\| \|(y-x)\|_n \leq k\|(y-x)\|_n$$

En posant, $\varphi(t) = kt\|(y-x)\|_n$, on aura

$$\left\|F'(t)\right\|_p \leq \varphi'(t),$$

et en utilisant le lemme précédent, on obtient

$$\|F(1) - F(0)\|_p \leq \varphi(1) - \varphi(0),$$

càd,

$$\|f(x) - f(y)\|_p \leq k\|x-y\|_n.$$

Corollaire 5.1

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^p$

1. *Si f est constante sur U, alors f est différentiable sur U et $df_x = 0 \quad \forall x \in U$.*
2. *Si de plus U est connexe et $df_x = 0$ $\forall x \in U$. Alors, f est constante sur U.*

Preuve. Soit $a \in U$ et posons

$$X = \{x \in U / f(x) = f(a)\}.$$

On a $X = f^{-1}\{a\}$. Comme f est continue sur U, X est une partie fermée non vide de U.
Soit $b \in X$, il existe $r > 0$ tel que $B(b, r) \subset U$.
Si $x \in B(b, r)$, le segment $[b, x] \subset U$.
En vertu du théorème de la moyenne, on a $\|f(b) - f(x)\|_p = 0$.
Donc, $f(b) = f(x) = f(a)$ et par suite, $x \in X$. Par conséquent, $B(b, r) \subset X$.
X est une partie à la fois ouverte et fermée dans U.
Comme $X \neq \emptyset$, alors $X = U$.

Proposition 5.2 ((théorème des accroissements finis)

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ différentiable sur U, x et $x+h$ deux points de U tels que le segment $[x, x+h] \subset U$. Alors, il existe $\theta \in]0,1[$ tel que

$$f(x+h) - f(x) = \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x+\theta h).$$

Preuve. Considérons l'application g de $I = [0,1] \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$ définie par : $g(t) = x + th$. On a $g(I) \subset U$.
On peut donc considérer la fonction $F = fog$ définie de I dans $\mathbb{R}$.
Cette dernière fonction est continiue sur et dérivable sur $]0,1[$.
Donc, il existe $\theta \in]0,1[$ tel que

$$F(1) - F(0) = F'(\theta).$$

$$
\begin{aligned}
\text{càd, } f(x+h) - f(x) &= (fog)'(\theta) = \frac{d}{dt}(fog)(\theta) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x+\theta h) \cdot \frac{dg_i}{dt} \\
&= \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x+\theta h).
\end{aligned}
$$

Formule Taylor à l'ordre 1 dans $\mathbb{R}^n$:

$$f(x_0+h)-f(x_0)=\sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{i=j}^{n} h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0+\theta h)$$

Formule Taylor à l'ordre m dans $\mathbb{R}^n$:

Théorème 5.2

Soit V un voisinage du point x_0 dans $\mathbb{R}^n$, et $f : V \longrightarrow \mathbb{R}$ une application telle que f de classe C^m. On a alors, au voisinage de $h = 0$

$$\begin{aligned} f(x_0+h)-f(x_0) &= \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)+\frac{1}{2!}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}(x_0)+\dots \\ &+\frac{1}{m!}\sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{n}\sum_{i_3=1}^{n}\dots\sum_{i_m=1}^{n} h_{i_1}h_{i_2}\dots h_{i_m}\frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\dots\partial x_{i_m}}(x_0)+o(\|h\|^m)\end{aligned}$$

Théorème 1

Si $m = 2$, on a donc

$$f(x_0+h) - f(x_0) = \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) + o\left(\sum_{i=1}^{n} h_i^2\right) \tag{5}$$

3.6.3 Développement limite

Soit $a = (a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$, V un voisinage de $a, B(a,r)$, $r > 0$ une boule ouverte incluse dans V et $f : V \to \mathbb{R}^n$

1. Développement limite à l'ordre 1 : Si f de classe C^1 dans V on peut écrire son Développement limite à l'ordre 1.
   Pour chaque $x \in B(a,r); x \neq a$ on a :
   $$f(x) = f(a) + \sum_{i=1}^{n}(x_i - a_i)\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + \|x-a\|\varepsilon(x)$$
   où $\varepsilon(x) \to 0$ quand $x \to a$
2. Développement limite à l'ordre 2 : Si f de classe C^2 dans V on peut écrire son Développement limite à l'ordre 2
   $\forall x \in B(a,r); x \neq a$ on a :
   $$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + \frac{1}{2!}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x_i - a_i)(x_j - a_j)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \\ &\quad + \|x-a\|^2\varepsilon(x) \end{aligned}$$
   où $\varepsilon(x) \to 0$ quand $x \to a$

Définition 5.2

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in U$.
On dit que f admet un **maximum strict (***resp.* **un minimum strict)** *au point a s'il existe $\alpha > 0$ tel que*

$$x \in U \text{ et } \|x - a\| < \alpha \Longrightarrow f(x) < f(a) \quad (\textit{resp. } f(x) < f(a)).$$

On dit que f admet un extremum strict au point a si f admet en ce point un maximum strict ou un minimum strict.

Proposition 5.3

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in U$.
On suppose que f admet des dérivées partielles par rapport à toutes les variables au point a et que f admet un extremum strict au point a.
Alors, pour tout $i = 1, 2, \ldots, n$, $\quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0.$

Preuve :

Considérons pour tout $i = 1, 2, \ldots, n$, la fonction F_i définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$F_i(x_i) = f\left(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_n\right).$$

F_i admet un extremum strict au point a_i.
Donc, $F_i'\left(a_i\right) = 0$ càd $\frac{\partial f}{\partial x_i}\left(a\right) = 0$.

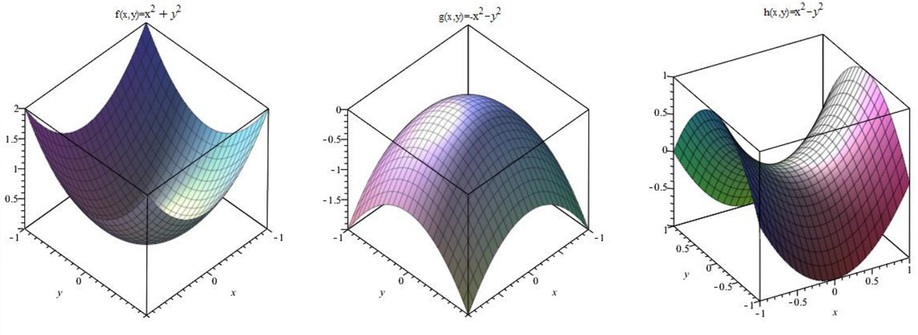
Proposition 5.4

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 et $(a, b) \in U$ un point critique de f. On note $\Delta(a, b)$ le déterminant de $Hessf_{(a,b)}$. Alors

1. *Si $\Delta(a, b) > 0$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(a, b\right) > 0$ alors $\left(a, b\right)$ est un* **minimum** *local strict.*
2. *Si $\Delta(a, b) > 0$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(a, b\right) < 0$ alors $\left(a, b\right)$ est un* **maximum** *local strict.*
3. *Si $\Delta(a, b) < 0$ alors $\left(a, b\right)$ est un* **point selle** *ou* **point col**.
4. *si $\Delta(a, b) = 0$, on ne peut pas conclure à partir des dérivées secondes.*

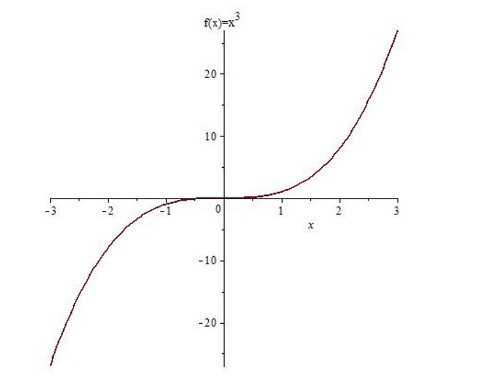
Exemple 11

1. $f(x,y) = x^2 + y^2$ *le point* $(0,0)$ *est un minimum.*
2. $g(x,y) = -x^2 - y^2$ *le point* $(0,0)$ *est un maximum.*
3. $h(x,y) = x^2 - y^2$ *le point* $(0,0)$ *est un point selle*



Remarque 5.1

On peut avoir $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$ *pour tout* $i = 1, 2, \ldots, n$, *sans que* f *admette un extremum strict au point* a. *Ainsi par exemple, la fonction* f *définie de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *par :* $f(x) = x^3$ *vérifie* $f'(0) = 0$. *Cependant,* f *n'admet pas d'extremum strict au point 0.*



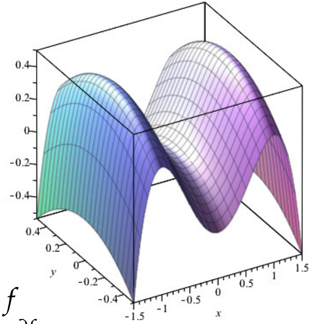
Exercice 5.1

On pose $f(x,y) = x^2 - y^2 - \frac{x^4}{2}$ *;*

1. *Tracer la représentation graphique avec Matlab ou Maple de la fonction* f
   pour $x \in [-1.5, 1.5]$ *et* $y \in [-0.5, 0.5]$.
2. *Déterminer les points critiques de* f.
3. *Étudier les extrema locaux de* f.

Corrigé

1. la représentation graphique de la fonction f



2. les points critiques de f
on a $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2x^3$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = -2y$
Un point (x, y) est critique si et seulement s'il est solution du système

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) & = & 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) & = & 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} 2x - 2x^3 & = & 0 \\ -2y & = & 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x(x^2-1) & = & 0 \\ y & = & 0 \end{array} \right.$$

Les solutions de ce système sont $(0,0)$, $(1,0)$ et $(-1,0)$.
Donc on a trois points critiques $(0,0)$, $(1,0)$ et $(-1,0)$

2. la nature de chaque point critique
   On a $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2 - 6x^2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 0$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 0$
   Donc La matrice hessienne de f en un point (x,y) est

$$Hessf_{(x,y)} := \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-6x^2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \Delta(x,y) = \det(Hessf_{(x,y)}) = -4 + 12x^2$$

✓ pour le point critique $(0,0)$
on a $\Delta(0,0) = -4 < 0$
$\Longrightarrow (0,0)$ est un point selle.

✓ pour le point critique $(1,0)$
on a $\Delta(1,0) = 8$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,0) = -4 < 0$
$\Longrightarrow (1,0)$ est un maximum local.

✓ pour le point critique $(-1,0)$
on a $\Delta(-1,0) = 8$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1,0) = -4 < 0$
$\Longrightarrow (-1,0)$ est un maximum local.