UNIVERSITE MOHAMMED PREMIER
ECOLE NATIONALE DES SCIENCES APPLIQUEES
OUJDA-MAROC

Filière : STPI-CP2 — Année universitaire : 2019-2020
Module : Analyse IV — Enseignant : M. Derouich

Fiche TD $N°$: 1

Exercice 1.

1. Montrer les applications $\mathbf{N}_1$, $\mathbf{N}_2$ et $\mathbf{N}_\infty$ définies sur $\mathbb{R}^n$ par :
$$\begin{aligned}\mathbf{N}_1(x) &= \sum_{k=1}^{n} |x_k|, \\ \mathbf{N}_2(x) &= \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2} \quad \text{(norme euclidienne)}, \\ \mathbf{N}_\infty(x) &= \sup_{k=1,\dots,n} |x_k| \quad \text{(norme sup)}.\end{aligned}$$
sont des normes sur $\mathbb{R}^n$.
2. Montrer que les trois normes $\mathbf{N}_1$, $\mathbf{N}_2$ et $\mathbf{N}_\infty$ définies sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes et on a
$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{N}_\infty(x) \leq \mathbf{N}_1(x) \leq \sqrt{n}\mathbf{N}_2(x) \leq n\mathbf{N}_\infty(x).$$

Exercice 2. : Les fonctions suivantes sont-elles des distances sur $\mathbb{R}$?
$$d_1(x,y) = (x-y)^2; \; d_2(x,y) = \sqrt{|y-x|}; \; d_3(x,y) = \left|y^3 - x^3\right|;$$
$$d_4(x,y) = \left|y^2 - x^2\right|; \; d_5(x,y) = |y - 2x|.$$

Exercice 3. : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction strictement croissante. On définit d_1 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^+$ par :
$$d(x,y) = |f(y) - f(x)|,$$

1. Montrer que d est une distance sur $\mathbb{R}$.
2. Soit d la distance usuelle sur $\mathbb{R}$ définie par : $d_1(x,y) = |y-x|$ et d_* l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $d_*(x,y) = |\arctan(y) - \arctan(x)|$.

   2.1- Montrer que d_* est une distance sur $\mathbb{R}$.

   2.2- $\mathbb{R}$ est-il borné pour la distance d_*?

   2.3- Décrire et représenter la boule ouverte $B(0,1)$ relativement à d_*.

   2.4- Les distances d_1 et d_* sont-elles équivalentes ?

Exercice 4. : Soit a et b deux réels strictement positifs. On pose

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \mathbf{N}(x,y) = \sqrt{a^2x^2 + b^2y^2}.$$

On rappelle que la norme $\mathbf{N}_2$ est définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $\mathbf{N}_2(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

1) Prouver que $\mathbf{N}$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$. Que peut-on dire des normes $\mathbf{N}$ et $\mathbf{N}_2$?

2) Déterminer et dessiner la boule fermée de centre 0 et de rayon 1 pour les deux normes $\mathbf{N}$ et $\mathbf{N}_2$.

3) Déterminer p et q tel que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ p\,\mathbf{N}_2(x,y) \leq \mathbf{N}(x,y) \leq q\,\mathbf{N}_2(x,y).$$

Exercice 5. : Montrer que

1) Toute intersection d'ensembles fermés de E est fermée dans E.

2) Toute réunion finie d'ensembles fermés de E est fermée dans E.

Exercice 6. : Soit $a \in E$.

1. Montrer que la sphère $S(a,r)$, de centre a et de rayon r, de E est un ensemble fermé dans E.
2. Montrer que $\{a\}$ est fermé dans E.
3. Montrer que tout sous-ensemble fini de E est fermé dans E.

Exercice 7. $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 - y^2 \geq 1 \text{ et } x^2 + y^2 < 2\}$

1. montrer que la suite $\left(\sqrt{2} - \frac{1}{n}, 0\right) \in C$, avec $n \geq 3$
2. en déduire que C n'est pas fermé de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 8. : Soit (a_n) une suite d'éléments de $\mathbb{R}^p$ de limite $a \in \mathbb{R}^p$. Le sous-ensemble $A = \{a_n; n \in \mathbb{N}\} \cup \{a\}$ est-il compact dans $\mathbb{R}^p$?

UNIVERSITE MOHAMMED PREMIER
ECOLE NATIONALE DES SCIENCES APPLIQUEES
OUJDA-MAROC

Filière : STPI-CP2 | Année universitaire : 2019 - 2020
Module : Analyse IV | Enseignant : M. Derouich

Corrigé

Exercice 1.

1. Montrer les applications $\mathbf{N}_1$, $\mathbf{N}_2$ et $\mathbf{N}_\infty$ définies sur $\mathbb{R}^n$ par :
$$\begin{aligned}\mathbf{N}_1(x) &= \sum_{k=1}^{n}|x_k|,\\ \mathbf{N}_2(x) &= \sqrt{\sum_{k=1}^{n}|x_k|^2}\quad \text{(norme euclidienne)},\\ \mathbf{N}_\infty(x) &= \sup_{k=1,\ldots,n}|x_k|\quad \text{(norme sup)}.\end{aligned}$$
sont des normes sur $\mathbb{R}^n$.
2. Montrer que les trois normes $\mathbf{N}_1$, $\mathbf{N}_2$ et $\mathbf{N}_\infty$ définies sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes et on a
$$\forall x\in\mathbb{R}^n,\quad \mathbf{N}_\infty(x)\le \mathbf{N}_1(x)\le\sqrt{n}\mathbf{N}_2(x)\le n\mathbf{N}_\infty(x).$$

Corrigé

1. • Montrons que $\mathbf{N}_1$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$
   i) Soit $x\in\mathbb{R}^n$
$$\begin{aligned}\mathbf{N}_1(x)=0 &\iff \sum_{k=1}^{n}|x_k|=0\\ &\iff |x_k|=0,\ \forall k=1,\ldots,n,\\ &\iff x_k=0,\ \forall k=1,\ldots,n,\\ &\iff x=0.\end{aligned}$$

$ii)$ Soient $x \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\mathbf{N}_1(\lambda x) &= \sum_{k=1}^{n} |\lambda x_k| \\
&= |\lambda| \sum_{k=1}^{n} |x_k| \\
&= |\lambda| \sum_{k=1}^{n} |x_k| \\
&= |\lambda| \mathbf{N}_1(x).
\end{aligned}$$

$iii)$ Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$ Nous avons,

$$\begin{aligned}
\mathbf{N}_1(x+y) &= \sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k| \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} (|x_k| + |y_k|) \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} |x_k| + \sum_{k=1}^{n} |y_k| \\
&\leq \mathbf{N}_1(x) + \mathbf{N}_1(y)
\end{aligned}$$

Finalement $\mathbf{N}_1$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$

- Montrons que $\mathbf{N}_2$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$

  $i)$ Soit $x \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}
\mathbf{N}_2(x) = 0 &\iff \sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 = 0 \\
&\iff |x_k| = 0,\ \forall k = 1, \ldots, n, \\
&\iff x_k = 0,\ \forall k = 1, \ldots, n, \\
&\iff x = 0.
\end{aligned}$$

$ii)$ Soient $x \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\mathbf{N}_2(\lambda x) &= \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |\lambda x_k|^2} \\
&= \sqrt{\lambda^2 \sum_{k=1}^{n} |x_k|^2} \\
&= |\lambda| \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2} \\
&= |\lambda| \mathbf{N}_2(x).
\end{aligned}$$

iii) Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$ Nous avons,

$$\begin{aligned}
\mathbf{N}_2^2\left(x+y\right) &= \sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^2 \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} \left(|x_k| + |y_k|\right)^2 \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 + 2|x_k||y_k| + |y_k|^2 \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 + \sum_{k=1}^{n} |y_k|^2 + 2\sum_{k=1}^{n} |x_k||y_k|
\end{aligned}$$

Par application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}$$

on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbf{N}_2^2\left(x+y\right) &\leq \mathbf{N}_2^2(x) + \mathbf{N}_2^2(y) + 2\left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^2\right)^{1/2} \\
&\leq \left[\mathbf{N}_2\left(x\right)\right]^2 + \left[\mathbf{N}_2\left(y\right)\right]^2 + 2\left[\mathbf{N}_2\left(x\right)\right]\left[\mathbf{N}_2\left(x\right)\right] \\
&\leq \left(\mathbf{N}_2\left(x\right) + \mathbf{N}_2\left(y\right)\right)^2.
\end{aligned}$$

D'où,

$$\mathbf{N}_2\left(x+y\right) \leq \mathbf{N}_2\left(x\right) + \mathbf{N}_2\left(y\right).$$

Finalement $\mathbf{N}_2$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$

- Montrons que $\mathbf{N}_\infty$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$
  i) Soit $x \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}
\mathbf{N}_\infty\left(x\right) = 0 &\iff \sup_{k=1,\ldots,n} |x_k| = 0 \\
&\iff |x_k| = 0,\ \forall\, k = 1, \ldots, n, \left(0 \leq |x_k| \leq \sup_{k=1,\ldots,n} |x_k|\ \forall\, k = 1, \ldots, n\right) \\
&\iff x_k = 0,\ \forall k = 1, \ldots, n, \\
&\iff x = 0.
\end{aligned}$$

ii) Soient $x \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\mathbf{N}_\infty\left(\lambda x\right) = \sup_{k=1,\ldots,n} |\lambda x_k| = |\lambda| \sup_{k=1,\ldots,n} |x_k|$$

Donc $\mathbf{N}_\infty(\lambda x) = |\lambda|\mathbf{N}_\infty(x)$.

iii) Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$

Nous avons, $\mathbf{N}_\infty(x+y) = \sup\limits_{k=1,\ldots,n} |x_k + y_k|$ et comme

$$\begin{aligned}
|x_k + y_k| &\leq |x_k| + |y_k| \\
&\leq \sup_{k=1,\ldots,n} |x_k| + \sup_{k=1,\ldots,n} |x_k| \ \forall k = 1,\ldots,n, \\
\Rightarrow \sup_{k=1,\ldots,n} |x_k + y_k| &\leq \sup_{k=1,\ldots,n} |x_k| + \sup_{k=1,\ldots,n} |x_k| \\
\Rightarrow \mathbf{N}_\infty(x+y) &\leq \mathbf{N}_\infty(x) + \mathbf{N}_\infty(y)
\end{aligned}$$

D'où $\mathbf{N}_\infty$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$

2. Les normes $\mathbf{N}_1$, $\mathbf{N}_2$ et $\mathbf{N}_\infty$ définies sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes. D'une façon précise, $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\mathbf{N}_\infty(x) \leq \mathbf{N}_1(x) \leq \sqrt{n}\mathbf{N}_2(x) \leq n\mathbf{N}_\infty(x).$$

Soit $x \in \mathbb{R}^n$ nous avons

$$\sup_{k=1,\ldots,n} |x_k| \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k|.$$

Donc,

$$\mathbf{N}_\infty(x) \leq \mathbf{N}_1(x). \tag{0.0.1}$$

Par application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz ($a_k = 1,\ b_k = |x_k|$), on déduit que

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} |x_k| &\leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} 1^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2} \\
&\leq \sqrt{n}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2}.
\end{aligned}$$

Par suite,

$$\mathbf{N}_1(x) \leq \sqrt{n}\mathbf{N}_2(y). \tag{0.0.2}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
\mathbf{N}_2^2(x) &= \sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} \left(\sup_{k=1,\ldots,n} |x_k|\right)^2 = n\left(\sup_{k=1,\ldots,n} |x_k|\right)^2.
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\mathbf{N}_2(x) \leq \sqrt{n}\mathbf{N}_\infty(x),$$

ou encore

$$\sqrt{n}\mathbf{N}_2(x) \leq n\mathbf{N}_\infty(x). \tag{0.0.3}$$

D'où le résultat à partir des inégalités (1.1), (1.2) et (1.3).

Exercice 2. Les fonctions suivantes sont-elles des distances sur $\mathbb{R}$?

$d_1(x,y) = (x-y)^2;\ d_2(x,y) = \sqrt{|y-x|};\ d_3(x,y) = |y^3 - x^3|;$

$d_4(x,y) = |y^2 - x^2|;\ d_5(x,y) = |y-2x|.$

Corrigé

a) d_1 n'est pas une distance car pour $z > y > x$

$$\begin{aligned} d_1(z,x) &= (z-x)^2 = (z-y+y-x)^2 \\ &= (z-y)^2 + (y-x)^2 + 2(z-y)(y-x) \\ &= d_1(x,y) + d_1(y,z) + 2(z-y)(y-x) \\ &> d_1(x,y) + d_1(x,z). \end{aligned}$$

b) d_2 est une distance car les 3 conditions d'une distance sont satisfaites.

- $d_2(x,y) = 0 \Leftrightarrow |y-x| = 0 \Leftrightarrow x = y$
- $d_2(x,y) = d_2(y,x)$ évident.
- $[d_2(x,z)]^2 = |x-z| = |x-y+y-z| \leq |x-y| + |y-z|$
  $\leq \left[\sqrt{|x-y|} + \sqrt{|y-z|}\right]^2$. Donc, $d_2(x,z) \leq d_2(x,y) + d_2(y,z)$.

c) d_3 est une distance car les 3 conditions d'une distance sont satisfaites.

- $d_3(x,y) = 0 \Leftrightarrow |y^3 - x^3| = 0 \Leftrightarrow x = y$
- $d_3(x,y) = d_3(y,x)$ évident.
- $d_3(x,z) = |z^3 - x^3| = |z^3 - y^3 + y^3 - x^3| \leq |z^3 - y^3| + |y^3 - x^3|$ Donc, $d_3(x,z) \leq d_3(x,y) + d_3(y,z)$.

d) d_4 n'est pas une distance car $d_4(x,y) = 0 \Longrightarrow y = \pm x$.

e) d_5 n'est pas une distance car la symétrie n'est pas satisfaite. $d_5(x,y) \neq d_5(y,x)$.

Exercice 3. : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction strictement croissante. On définit d de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^+$ par :

$$d(x, y) = |f(y) - f(x)|,$$

1. Montrer que d est une distance sur $\mathbb{R}$.
2. Soit d la distance usuelle sur $\mathbb{R}$ définie par : $d_1(x, y) = |y - x|$ et d_* l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $d_*(x, y) = |\arctan(y) - \arctan(x)|$.

2.1- Montrer que d_* est une distance sur $\mathbb{R}$.

2.2- $\mathbb{R}$ est-il borné pour la distance d_*?

2.3- Décrire et représenter la boule ouverte $B(0, 1)$ relativement à d_*.

2.4- Les distances d_1 et d_* sont-elles équivalentes ?

Corrigé

1. Les axiomes de symétrie et de l'inégalité triangulaire sont vérifiées. Pour l'axiome de séparation, nous avons

$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$ (car f est une injection puisque strictement croissante).

2. **2.1-** On a $f(x) = \arctan(x)$ est bijective de $\mathbb{R}$ dans $]-\pi/2; \pi/2[$.
Donc d'après 1. l'application d_* est une distance.

2.2- On a $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} d_*(0, x) &= |\arctan(x) - \arctan(0)| \\ &\leq |\arctan(x)| \\ &\leq \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

$\Longrightarrow x \in B(0, \frac{\pi}{2}) \Longrightarrow \mathbb{R} \subset B(0, \frac{\pi}{2})$
donc $\mathbb{R}$ est bornée par rapport à d_*.

2.3-

$$\begin{aligned} B(0, 1) &= \{x \in \mathbb{R} / |\arctan(x) - 0| < 1\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} / -1 < \arctan(x) < 1\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} / \tan(-1) < x < \tan(1)\} \\ &=]\tan(-1), \tan(1)[\\ &=]-\tan(1), \tan(1)[\end{aligned}$$

2.4- Si $x < y$ d'après le théorème des accroissements finis $\exists\ c_{xy} \in]x, y[$ tel que : $\arctan(x) - \arctan(y) = \dfrac{1}{1+c_{xy}^2}(x-y)$

$\Longrightarrow \dfrac{d_*(x,y)}{d_1(x,y)} = 1 + c_{xy}^2$ n'est pas bornée donc d_1 et d_* ne sont pas équivalents.

Exercice 4. Soit a et b deux réels strictement positifs. On pose

$$\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \mathbf{N}(x,y) = \sqrt{a^2x^2 + b^2y^2}.$$

On rappelle que la norme $\mathbf{N}_2$ est définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $\mathbf{N}_2(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$.

1) Prouver que $\mathbf{N}$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$. Que peut-on dire des normes $\mathbf{N}$ et $\mathbf{N}_2$?

2) Déterminer et dessiner la boule fermée de centre 0 et de rayon 1 pour les deux normes $\mathbf{N}$ et $\mathbf{N}_2$.

3) Déterminer p et q tel que

$$\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ p\,\mathbf{N}_2(x,y) \le \mathbf{N}(x,y) \le q\,\mathbf{N}_2(x,y).$$

Corrigé

• $\mathbf{N}(x,y) = \sqrt{a^2x^2+b^2y^2} = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$

• Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\mathbf{N}(\lambda x) = \sqrt{a^2\lambda^2x^2 + b^2\lambda^2y^2} = \sqrt{\lambda^2}\sqrt{a^2x^2+b^2y^2} = |\lambda|\,\mathbf{N}(x).$$

• Pour tout $X = (x_1, y_1)$ et $Y = (x_2, y_2)$, on a

$$\begin{aligned}
[\mathbf{N}(X+Y)]^2 &= [\mathbf{N}(x_1+x_2, y_1+y_2)]^2 \\
&= a^2(x_1+x_2)^2 + b^2(y_1+y_2)^2 \\
&= a^2x_1^2 + a^2{x_2}^2 + 2a^2x_1x_2 + b^2y_1^2 + b^2{y_2}^2 + 2b^2y_1y_2 \\
&= a^2x_1^2 + b^2y_1^2 + a^2{x_2}^2 + b^2{y_2}^2 + 2\left[(ax_1)(ax_2) + (by_1)(by_2)\right] \\
&\le a^2x_1^2 + b^2y_1^2 + a^2{x_2}^2 + b^2{y_2}^2 + 2\sqrt{a^2x_1^2+b^2y_1^2} \times \sqrt{a^2x_2^2+b^2y_2^2} \\
&= \left(\sqrt{a^2x_1^2+b^2y_1^2} + \sqrt{a^2x_2^2+b^2y_2^2}\right)^2 = (\mathbf{N}(X) + \mathbf{N}(Y).)^2
\end{aligned}$$

D'où l'inégalité triangulaire. Par conséquent, $\mathbf{N}$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$. Puisque $\mathbb{R}^2$ est un **e.v.n.** de dimension finie, alors les deux normes $\mathbf{N}$ et $\mathbf{N}_2$ sont équivalentes (Dans $\mathbb{R}^n$ toutes les normes sont équivalentes).

2)
• La boule fermée de centre 0 et de rayon 1 pour la norme $\mathbf{N}_2$ est définie par :

$$\mathbf{B}_2\left(0,1\right) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 1\right\}.$$

C'est le disque fermé de centre 0 et de rayon 1.

• La boule fermée de centre 0 et de rayon 1 pour la norme $\mathbf{N}$ est définie par :

$$\mathbf{B}_*\left(0,1\right) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / a^2x^2 + b^2y^2 \leq 1\right\}.$$

C'est une ellipse

3) Soit $p = \min\left(a,b\right)$ et $q = \max\left(a,b\right)$. On a pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$p\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{p^2x^2+p^2y^2} \leq \sqrt{a^2x^2+b^2y^2} \leq \sqrt{q^2x^2+q^2y^2} = q\sqrt{x^2+y^2}.$$

Donc, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$p\mathbf{N}_2(x,y) \leq \mathbf{N}(x,y) \leq q\mathbf{N}_2(x,y).$$

Exercice 5. Montrer que

1) Toute intersection d'ensembles fermés de E est fermée dans E.

2) Toute réunion finie d'ensembles fermés de E est fermée dans E.

Corrigé

1. Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille quelconque de fermés. Montrons que $F = \bigcap\limits_{i\in I} F_i$ est fermée. Nous avons
$$\complement_F = \bigcup_{i\in I} \complement_{F_i}$$
Pour chaque $i \in I, \complement_{F_i}$ est ouvert. Comme la réunion d'une famille d'ouverts est ouverte, alors $\complement_F$ est ouvert et par suite F est fermé.

2. Soit $(F_j)_{j\in J}$ une famille finie de fermés (J fini. Montrons que $F = \bigcup\limits_{j\in J} F_j$ est fermée. Nous avons

$$\complement_F = \bigcap_{j\in J} \complement_{F_j}$$

Pour chaque $j \in J, \complement_{F_j}$ est ouvert. Comme l'intersection d'une famille finie d'ouverts est ouverte, alors $\complement_F$ est ouvert et par suite F est fermé.

Exercice 6. Soit $a \in \mathbb{R}^n$.

1. Montrer que la sphère $S\,(a, r)$, de centre a et de rayon r, de E est un ensemble fermé dans $\mathbb{R}^n$.
2. Montrer que $\{a\}$ est fermé dans $\mathbb{R}^n$.
3. Montrer que tout sous-ensemble fini de $\mathbb{R}^n$ est fermé dans $\mathbb{R}^n$.

Corrigé

1. Soit $S(a, r)$ la sphère de centre a et de rayon r. On peut écrire

$$\complement^{\mathbb{R}^n}_{S(a,r)} = B(a, r) \cup \complement^{\mathbb{R}^n}_{B'(a,r)}.$$

$\complement^{\mathbb{R}^n}_{B'(a,r)}$ le complémentaire de la boule fermée B'(a,r) est ouver et B(a,r) est ouverte. Donc est ouvert et par conséquent, $S(a, r)$ est fermée.

2. Montrons que $\complement^{\mathbb{R}^n}_{\{a\}}$ est ouvert.
Soit $b \in \complement^{\mathbb{R}^n}_{\{a\}} \Longrightarrow b \notin \{a\} \Longrightarrow b \neq a \Longrightarrow d(a, b) > 0$
soit $r = \dfrac{d(a, b)}{2}$, donc $d(a, b) > r \Longrightarrow a \notin B(b, r)$
$\Longrightarrow \forall x \in B(b, r),\ \ x \neq a \Longrightarrow \forall x \in B(b, r),\ \ x \notin \{a\}$
$\Longrightarrow \forall x \in B(b, r),\ \ x \in \complement^{\mathbb{R}^n}_{\{a\}} \Longrightarrow B(b, r) \subset \complement^{\mathbb{R}^n}_{\{a\}}$
Donc $\complement^{\mathbb{R}^n}_{\{a\}}$ est ouvert $\Longrightarrow \{a\}$ est fermé.

3. Soit F un sous-ensemble fini de $\mathbb{R}^n$, càd $F = \{a_1, a_2, ., a_m\} = \bigcup\limits_{i=1}^{m}\{a_i\}$.
D'après 2) chaque ensemble $\{a_i\}$ est fermé. Comme F est une réunion finie de fermés, alors, F est férmé.

Exercice 7. $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 - y^2 \geq 1 \text{ et } x^2 + y^2 < 2\}$

1. montrer que la suite $\left(\sqrt{2}-\frac{1}{n},0\right) \in C$, avec $n \geq 3$
2. en déduire que C n'est pas fermé de $\mathbb{R}^2$.

Corrigé

1. Soient $x_n = \sqrt{2}-\frac{1}{n}$ et $y_n = 0$, on a

$$\begin{aligned} x_n^2 - y_n^2 &= \left(\sqrt{2}-\frac{1}{n}\right)^2 \\ &= 2-\frac{2\sqrt{2}}{n}+\frac{1}{n^2} \\ &= 2+\frac{1-2n\sqrt{2}}{n^2} \end{aligned}$$

comme $n \geq 3 \Longrightarrow 2n\sqrt{2} \geq 6\sqrt{2} \Longrightarrow 1-2n\sqrt{2} \leq 1-6\sqrt{2} < 0$.
Donc $2-\frac{1-2n\sqrt{2}}{n^2} < 2 \Longrightarrow x_n^2 - y_n^2 < 2$

$$\begin{aligned} x_n^2 - y_n^2 - 1 &= \left(\sqrt{2}-\frac{1}{n}\right)^2 - 1 \\ &= \left(\sqrt{2}-\frac{1}{n}-1\right)\left(\sqrt{2}-\frac{1}{n}+1\right) \\ &= \left(\sqrt{2}-1-\frac{1}{n}\right)\left(\sqrt{2}+1-\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

comme $n \geq 3 \Longrightarrow \left(\sqrt{2}+1-\frac{1}{n}\right) \geq 0$ et $\left(\sqrt{2}-1-\frac{1}{n}\right) \geq \sqrt{2}-1-\frac{1}{3} \geq 0$.
Donc $x_n^2 - y_n^2 - 1 \geq 0 \Longrightarrow x_n^2 - y_n^2 \geq 1$ D'où $\left(\sqrt{2}-\frac{1}{n},0\right)_{n>2} \in D$,

2. On a $\left(\sqrt{2}-\frac{1}{n},0\right)_{n>2} \in D$, mais $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{2}-\frac{1}{n},0\right) = \left(\sqrt{2},0\right) \notin D$.
Donc D n'est pas fermé

Exercice 8. Soit (a_n) une suite d'éléments de $\mathbb{R}^p$ de limite $a \in \mathbb{R}^p$. Le sous-ensemble $A = \{a_n; n \in \mathbb{N}\} \cup \{a\}$ est-il compact dans $\mathbb{R}^p$?

Corrigé

Soit $(O_i)_{i\in I}$ une famille quelconque d'ouverts recouvrant A c.à.d $A \subset \bigcup_{i\in I} O_i$, et on doit prouver qu'on peut en extraire un sous-recouvrement fini.;
il existe $i_0 \in I$ tel que $a \in O_{i_0}$; O_{i_0} étant voisinage de a, on a donc

$$(\exists n_0 \in \mathbb{N}), (\forall n)/n > n_0 \text{ on a } a_n \in O_{i_0} \left(\text{car } \lim_{n\to+\infty} a_n = a \right)$$

Les éléments $a_0, a_1; \cdots, a_{n_0}$ en nombre fini. Soient $i_1, \cdots, i_{n_0}$ tels que, pour $j \leq n_0, a_j \in O_{i_j}$
Alors, il est clair que $O_{i_1} \cup O_{i_2} \cup \cdots \cup O_{i_{n_0}} \cup O_{i^*}$ est un recouvrement ouvert de A.
Donc A est compact

Exercice 9. :

a) Toute intersection de compacts de $\mathbb{R}^p$ est un compact de $\mathbb{R}^p$.

b) Toute réunion finie de compacts de $\mathbb{R}^p$ est un compact de $\mathbb{R}^p$.

Corrigé

a) On sait qu'un compact est fermé. Comme toute intersection de fermés est fermée, alors une intersection quelconque de compacts est un fermé. D'autre part, cette intersection est bornée car incluse dans chaque compact qui est borné.

b) Comme toute réunion finie de fermés est un fermé, alors une réunion finie de compacts est fermée. D'autre part, chaque compact est borné. Une réunion finie d'ensembles bornés est aussui bornée. Donc, une réunion finie de compacts est compacte.