UNIVERSITE MOHAMMED PREMIER
ECOLE NATIONALE DES SCIENCES APPLIQUEES
OUJDA-MAROC

Filière : GC3 & GI3 — Année universitaire : 2019-2020

Elément de module : Analyse des données — Enseignant : M. Derouich

Fiche TD $N°$: 1

Exercice 1. : On considère deux séries statistiques de taille n

1. Montrer que la variance d'une série $(x_i)i = 1..n$ est égale à $V = \overline{x^2} - \overline{x}^2$ où $\overline{x}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} n_i x_i^2$ et $\overline{x}$ est la moyenne arithmétique de la série.
2. Soient (x_i) et (y_i) deux séries statistiques liées par la relation suivante : $\forall i\ y_i = \frac{x_i - a}{b}$ avec $b \neq 0\ a, b \in \mathbb{R}$ Montrer les propriétés suivantes : $i)\ \overline{y} = \frac{\overline{x} - a}{b}$ $\quad ii) V(y) = \frac{V(x)}{b^2}$ $\quad iii)\sigma(y) = \frac{\sigma(x)}{|b|}$

Exercice 2. : On a relevé les nombres d'allumettes contenues respectivement dans 20 boîtes, lors d'un contrôle dans une usine de fabrication. Les résultats sont les suivants : 40, 42, 32, 38, 40, 48, 30, 38, 36, 40, 34, 40, 34, 40, 38, 40, 42, 44, 36, 42.

1. Ranger ces résultats en classes d'intervalles de 4 allumettes, borne supérieure exclue.
2. Tracer l'histogramme de cette distribution.
3. Calculer la moyenne et l'écart type de cette série.
4. Calculer les moments d'ordre l, d'ordre 2 et d'ordre 3 par rapport à la valeur moyenne .

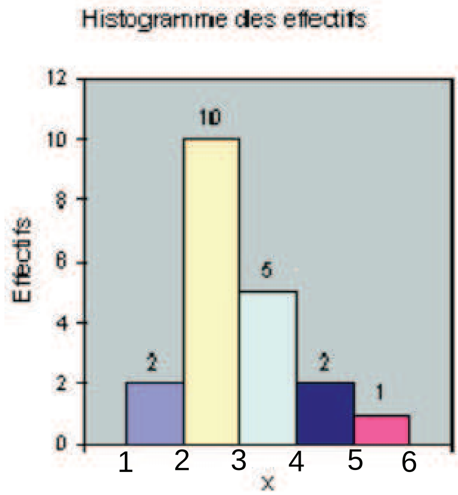
Exercice 3. : Les résultats d'un certain processus aléatoire sont des nombres entiers que l'on classe suivant l'histogramme ci-dessous.

1. Calculer la valeur moyenne. Quel est le mode ? quelle est la médiane ?
2. Tracer le polygône des fréquences et le polygône des effectifs cumulés.
3. Retrouver la valeur de la médiane.

Exercice 4. : On reprend les données de l'exemple 1.1 du cours : effectuant le changement de variable
$z = \frac{x - 1.7125}{0.0664}$

Classes	[1.55 ;1.60[	[1.60 ;1.65[	[1.65 ;1.70[	[1.70 ;1.75[	[1.75 ;1.80[	[1.80 ;1.85[	[1.85 ;190[
Effectif	3	12	18	25	15	5	2

1. Calculer $\overline{z},\ V(z)$ et $\sigma(z)$
2. En déduire $\overline{x},\ V(x)$ et $\sigma(x)$



UNIVERSITE MOHAMMED PREMIER
ECOLE NATIONALE DES SCIENCES APPLIQUEES
OUJDA-MAROC

Filière : GC3 & GI3 — Année universitaire : 2019-2020

Elément de module : Analyse des données — Enseignant : M. Derouich

Correction fiche TD $N°$: 1

Exercice 1. 1.

$$\begin{aligned}
V(X) &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i(x_i-\overline{X})^2 \\
&= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i\left(x_i^2-2x_i\overline{X}+\overline{X}^2\right) \\
&= \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{p} n_i x_i^2 - 2\sum_{i=1}^{p} n_i x_i\overline{X} + \sum_{i=1}^{p} n_i\overline{X}^2\right) \\
&= \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{p} n_i x_i^2 - 2\overline{X}\sum_{i=1}^{p} n_i x_i + \overline{X}^2\sum_{i=1}^{p} n_i\right) \\
&= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i x_i^2 - 2\overline{X}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i x_i + \overline{X}^2\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i \\
&= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i x_i^2 - \overline{X}^2 \\
V(X) &= \overline{X^2} - \overline{X}^2
\end{aligned}$$

2. Soit $Y = \dfrac{X - a}{b}$

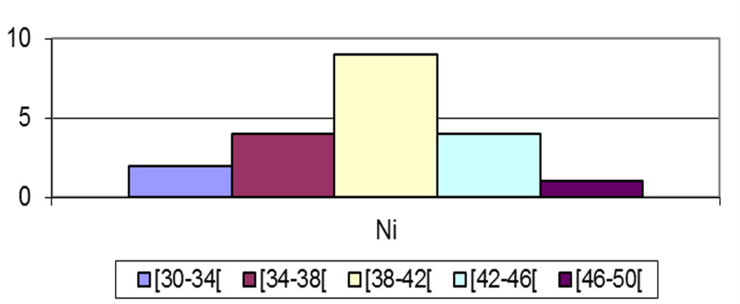
$$\begin{aligned}
\overline{Y} &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i y_i \\
&= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i \frac{x_i - a}{b} \\
&= \frac{1}{b}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i x_i - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i \frac{a}{b} \\
&= \frac{1}{b}\overline{X} - \frac{a}{b} \\
\overline{Y} &= \frac{\overline{X} - a}{b} \\
V(Y) &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i (y_i - \overline{Y})^2 \\
&= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i \left(\frac{x_i - a}{b} - \frac{\overline{X} - a}{b}\right)^2 \\
&= \frac{1}{b^2}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i \left(x_i - \overline{X}\right)^2 \\
V(Y) &= \frac{V(X)}{b^2} \\
\sigma_Y &= \frac{\sigma_X}{|b|}
\end{aligned}$$

Exercice 2. :

1.

Classe	[30-34[	[34-38[	[38-42[	[42-46[	[46-50[
c_i	32	36	40	44	48
n_i	2	4	9	4	1
$c_i \times n_i$	64	144	360	176	48
$n_i \times x_i^2$	2048	5184	14400	7744	2304
$x_i - \overline{X}$	-7,6	-3,6	0,4	4,4	8,4
$n_i \times (x_i - \overline{X})$	-15,2	-14,4	3,6	17,6	8,4
$n_i * (x_i - \overline{X})^2$	115,52	51,84	1,44	77,44	70,56
$n_i \times (x_i - \overline{X})^3$	-877,952	-186,624	0,576	340,736	592,704

2.



3. On a $N = 20$ donc

$$\begin{aligned}
\overline{X} &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i c_i \\
&= \frac{792}{20} \\
&= 39.6 \\
V(X) &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i c_i^2 - \overline{X}^2 \\
&= \overline{X^2} - \overline{X}^2 \\
&= 1584 - 39.6^2 \\
&= 15,84
\end{aligned}$$

4. On a $m_q = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i \left(x_i - x_0\right)^q$.

$$\begin{aligned}
m_1 &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i \left(x_i - \overline{X}\right) \\
&= \frac{0}{20} \\
&= 0 \\
m_2 &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i \left(x_i - \overline{X}\right)^2 \\
&= \frac{316.5}{20} \\
&= 15,84 \\
m_3 &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i \left(x_i - \overline{X}\right)^2 \\
&= \frac{-130,56}{20} \\
&= -6,528
\end{aligned}$$

Exercice 3.

Classe	[1,2[	[2,3[	[3,4[	[4,5[	[5,6[
c_i	1,5	2,5	3,5	4,5	5,5
n_i	2	10	5	2	1
effe cumulés	2	12	17	19	20
fréquences	0,1	0,5	0,25	0,1	0,05

1. La valeur moyenne de cette série statistique est :

$$\begin{aligned} \overline{X} &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i c_i \\ &= \frac{60}{20} = 3 \end{aligned}$$

la classe modale est $[2-3[$ puisqu'il est qui corespond à l'effectif maximum 10.

On a $\dfrac{N}{2} = 10 \Longrightarrow 2 \leq \dfrac{N}{2} < 12 \Longrightarrow N_m = 2, N_{m+1} = 12, x_m = 2$ et $x_{m+1} = 3$

$$\frac{M_e - x_m}{\frac{N}{2} - N_m} = \frac{x_{m+1} - x_m}{N_{m+1} - N_m} \quad \text{donc}$$

$$\begin{aligned} M_e &= x_m + (x_{m+1} - x_m)\left(\frac{\frac{N}{2} - N_m}{N_{m+1} - N_m}\right) \\ &= 2 + (3-2)\left(\frac{10-2}{12-2}\right) \\ &= 2.8 \end{aligned}$$

2.

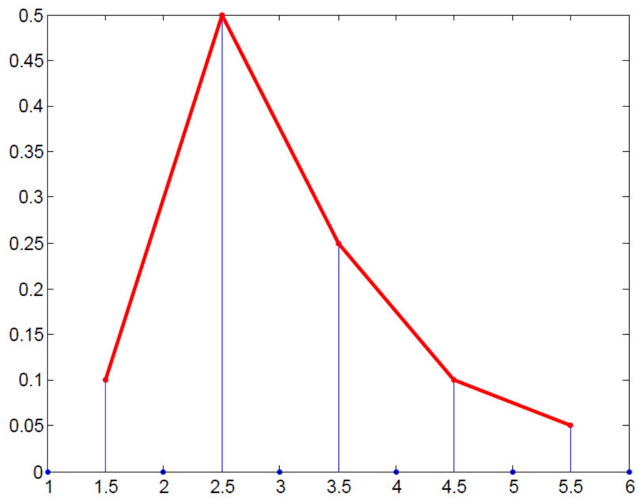


FIGURE 1 – Polygône des fréquences

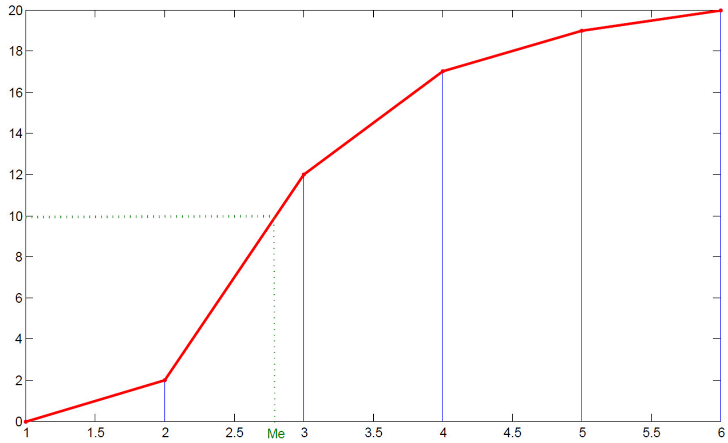


FIGURE 2 – Polygône des effectifs cumulés

3. D'après le graphe précédent : $Me = 2.8$

Exercice 4.

classes	[1.55,1.60[	[1.60,1.65[	[1.65,1.70[	[1.70,1.75[	[1.75,1.80[	[1.80,1.85[	[1.85,1.90[
c_i	1,575	1,625	1,675	1,725	1,775	1,825	1,875
n_i	3	12	18	25	15	5	2
z_i	-2,0707831	-1,3177710	-0,564759	0,188253	0,941265	1,6942771	2,4472891
$n_i \times z_i$	-6,2123493	-15,813253	-10,165662	4,7063253	14,11897	8,4713855	4,8945783
z_i^2	4,2881427	1,7365206	0,3189527	0,0354391	0,8859799	2,870574	5,9892242
$n_i \times z_i^2$	12,864428	20,838247	5,741149	0,8859799	13,28969	14,35287	11,978448

1. On a $N = 80$ donc

$$\begin{aligned}
\overline{Z} &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i z_i \\
&\simeq \frac{0}{80} \\
&\simeq 0 \\
V(Z) &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i z_i^2 - \overline{Z}^2 \\
&= \frac{79,950827}{80} \\
&= 0.9994 \\
&\simeq 1 \\
\sigma_Z &\simeq 1
\end{aligned}$$

2. On a $Z = \dfrac{X - 1.7125}{0.0664}$
$\Longrightarrow X = 0.0664Z + 1.7125$
$\Longrightarrow \overline{X} = 0.0664\overline{Z} + 1.7125 = 1.7125$
$\Longrightarrow V(X) = 0.0664^2 V(Z) = 0,00440625$
$\Longrightarrow \sigma_X = \sqrt{V(X)} = 0,06638$