UNIVERSITE MOHAMMED PREMIER
ECOLE NATIONALE DES SCIENCES APPLIQUEES
OUJDA-MAROC

Filière : STPI-CP2 Année universitaire : 2019 - 2020
Module : Analyse IV Enseignant : M. Derouich

Fiche TD N° : 2

Exercice 1. :

1. Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :
   $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$ et $g(x,y) = \ln(x-y^2)$.
2. Déterminer et représenter les courbes de niveau de la fonction suivante :
$$f(x,y) = x^2 + y^2.$$

Exercice 2. Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie sur $\mathbb{R}^2$ par :
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|y|}{x^2} \exp\left(-\dfrac{|y|}{x^2}\right) & \text{si} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et φ_λ la restriction de f à l'ensemble $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y = \lambda x\right\}$. Déterminer la limite de φ_λ au point $(0,0)$.
2. Soit ψ la restriction de f à l'ensemble $B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y = x^2\right\}$. Calculer la limite de ψ au point $(0,0)$.
3. Conclure.

Exercice 3. : Etudier la limite à l'origine des fonctions suivantes :

a) $f(x,y) = \dfrac{1-\cos(xy)}{x^2y^2}$; b) $g(x,y) = \dfrac{3x-y^2}{x^2+y^2}$; c) $h(x,y) = \dfrac{xy+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

d) $s(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$; e) $t(x,y) = (x^2-y^2)\sin\left(\dfrac{1}{xy}\right)$.

Exercice 4. : Etudier la continuité au point $(0,0)$ des fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définies pour chaque couple (x,y) de $\mathbb{R}^2$ par :

a) $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x+y)^2}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases},$$

b) $$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si} \ (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si} \ (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

c) $$h(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Exercice 5.

1. Peut-on prolonger par continuité au point $(0,0)$ les fonctions suivantes ?

   1.1 $f(x,y)=\dfrac{1-\cos\sqrt{xy}}{y}$ si $(x,y)\in A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/xy>0\right\}$.

   1.2 $g(x,y)=\left(x^2+y^2\right)^x$ si $(x,y)\neq(0,0)$.

   1.3 $h(x,y)=\dfrac{\sqrt{4-x^2-y^2}-2}{\sqrt{x^2+y^2}}$ si $(x,y)\neq(0,0)$.

2. Peut-on prolonger par continuité au point $(1,0)$ la fonction suivante ?

$$t(x,y)=\frac{y^3}{(x-1)^2+y^2} \text{ si } (x,y)\neq(1,0).$$

Exercice 6. Etudier la différentiabilité à l'origine de l'application $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ qui est définie par $f(0;0)=0$ et par $f(x;y)=\dfrac{|xy|}{\sqrt{x^2+3y^2}}$ si $(x;y)\neq(0;0)$.

Exercice 7. Soit f la fonction de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2+xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

1) Montrer que f est continue en $(0,0)$.

2) Calculer en tout point $(x,y)\neq(0,0)$ $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.

3) Etudier l'existance des dérivées partielles en $(0,0)$. f est-elle différentiable en $(0,0)$?

Exercice 8. : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$f(x;y)=\left(x^2+y^2\right)\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$ si $(x;y)\neq(0;0)$ et $f(0;0)=0$.

1) Déterminer les fonctions $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

2) Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ et calculer la différentielle de f au point $(x,y)\neq(0,0)$.

3) Montrer que les fonctions $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ ne sont pas continues en $(0,0)$ mais f est différentiable en $(0;0)$.

Filière : STPI-CP2 | Année universitaire : 2019 - 2020
Module : Analyse IV | Enseignant : M. Derouich

Corrigé

Exercice 1. 1. Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :
$f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$ et $g(x,y) = \ln(x-y^2)$.

2. Déterminer et représenter les courbes de niveau de la fonction suivante :

$$f(x,y) = x^2 + y^2.$$

Corrigé

1.

$$\begin{aligned} D_f &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 1 - x^2 - y^2 > 0\right\} \\ &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 < 1\right\} \\ &= \mathfrak{D}(0,1) \setminus \mathfrak{C}(0,1) \end{aligned}$$

Avec :
$\mathfrak{D}(0,1)$ est le disque de centre (0,0) et de rayon 1
$\mathfrak{C}(0,1)$ est le cercle de centre (0,0) et de rayon 1

$$\begin{aligned} D_g &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x > 0; x - y^2 > 0\right\} \\ &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x > 0; y^2 < x\right\} \\ &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x > 0; -\sqrt{x} < y < \sqrt{x}\right\} \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} L_\lambda &= \{(x,y) \in U / f(x,y) = \lambda\} \\ &= \{(x,y) \in U / x^2 + y^2 = \lambda\} \end{aligned}$$

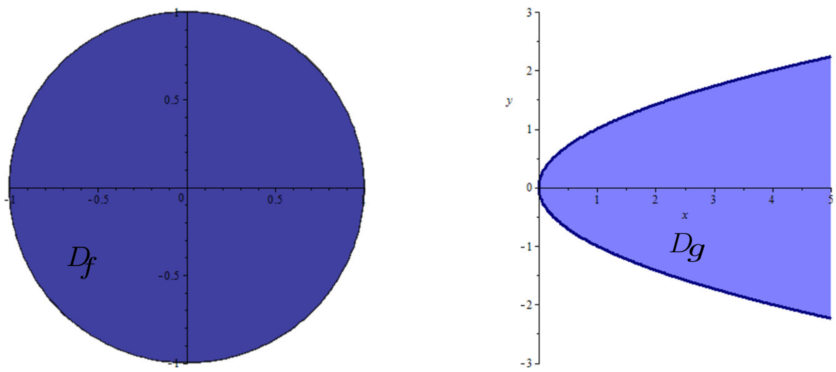

FIGURE 1 – Les domaines de définition de f et g

- Pour $\lambda = 0$ c'est un seul point (0, 0), $L_\lambda = \{(0,0)\}$.
- Pour $\lambda > 0$ La ligne de niveau L_λ est le cercle de centre (0,0) et de rayon $\sqrt{\lambda}$.
- Pour $\lambda < 0$ La ligne de niveau $L_\lambda = \phi$ (la fonction ne prend la valeur l en aucun point).

Exercice 2. Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|y|}{x^2} \exp\left(-\dfrac{|y|}{x^2}\right) & \text{si} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

1) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et φ_λ la restriction de f à l'ensemble $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y = \lambda x\right\}$. Déterminer la limite de φ_λ au point $(0,0)$.

2) Soit ψ la restriction de f à l'ensemble $B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y = x^2\right\}$. Calculer la limite de ψ au point $(0,0)$.

3) Conclure.

Corrigé

1) Pour $x \neq 0$, on a

$$\varphi_\lambda(x,y) = f(x,\lambda x) = \frac{|\lambda x|}{x^2} e^{-\dfrac{|\lambda x|}{x^2}}$$

• Si $\lambda = 0$,

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \varphi_0\left(x, y\right) = 0$$

• Si $\lambda \neq 0$,

$$\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{|\lambda x|}{x^2} e^{-\frac{|\lambda x|}{x^2}} = 0,$$

car $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{|\lambda x|}{x^2} = +\infty$. D'où, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \varphi_\lambda(x, y) = 0.$$

1) Pour $x \neq 0$, on a

$$\psi_\lambda\left(x, y\right) = f\left(x, x^2\right) = e^{-1}.$$

Donc,

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \psi(x, y) = e^{-1}.$$

Les restrictions φ_λ et ψ de f ont des limites différentes au point (0,0), la fonction f n'admet pas de limite en ce point.

Exercice 3. Etudier la limite à l'origine des fonctions suivantes :

a) $f\left(x, y\right) = \dfrac{1-\cos\left(xy\right)}{y^2}$; b) $g\left(x, y\right) = \dfrac{3x - y^2}{x^2 + y^2}$; c) $h\left(x, y\right) = \dfrac{xy + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$,

d) $s\left(x, y\right) = \dfrac{xy^2}{x^2 + y^4}$; e) $t\left(x, y\right) = (x^2 - y^2)\sin(\dfrac{1}{xy})$;

Corrigé

a) Nous avons $f\left(x, y\right) = \dfrac{1-\cos\left(xy\right)}{y^2} = x^2 \dfrac{1-\cos\left(xy\right)}{x^2y^2}$;

$$\text{et } 1 - \cos(xy) \backsim \frac{x^2y^2}{2} \text{ quand } (x, y) \longrightarrow (0, 0).$$

$$\Longrightarrow \lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{1-\cos(xy)}{x^2y^2} = \frac{1}{2}.$$

$$\Longrightarrow \lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} f(x, y) = 0 \times \frac{1}{2} = 0.$$

b) Posons $x = \lambda y^2$. Nous avons

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{3x - y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{y\longrightarrow 0} \frac{3\lambda y^2 - y^2}{\lambda^2 y^4 + y^2} = \lim_{y\longrightarrow 0} \frac{3\lambda - 1}{\lambda^2 y^2 + 1} = 3\lambda - 1,$$

qui dépend de λ. Donc, g n'admet pas de limite au point $(0,0)$.

c) Pour $(x,y) \neq (0,0)$, on a

$$\begin{aligned} |h(x,y)| &= \left| \frac{xy + y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| \leq \frac{|xy + y^2|}{|y|} \\ &\leq \frac{|xy| + y^2}{|y|} = |x| + |y| \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

D'où,

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} h(x,y) = 0.$$

d) Posons $x = \lambda y^2$. Nous avons

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^4} = \lim_{y\longrightarrow 0} \frac{\lambda y^4}{\lambda y^4 + y^4} = \frac{\lambda}{1+\lambda},$$

qui dépend de λ. Donc, h n'admet pas de limite au point $(0,0)$.

e) Pour $(x,y) \neq (0,0)$, on a

$$\begin{aligned} |t(x,y)| &= \left| (x^2 - y^2) \sin\left(\frac{1}{xy}\right) \right| \leq |x^2 - y^2| \\ &\leq x^2 + y^2 \underset{(x,y)\longrightarrow(0,0)}{\longrightarrow 0} . \end{aligned}$$

D'où,

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} t(x,y) = 0.$$

Exercice 4. Etudier la continuité au point $(0,0)$ des fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définies pour chaque couple (x,y) de $\mathbb{R}^2$ par :

a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x+y)^2}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$,

b) $g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

c) $h(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$

d) $t(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ \ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Corrigé

a) Pour $(x,y) \neq (0,0)$, on a

$$f(x,y) = 1 + \frac{2xy}{x^2+y^2}$$

Posons $y = \lambda x$. On a

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} f(x,y) = 1 + \frac{2\lambda}{1+\lambda^2},$$

qui dépend de λ. Donc, f n'admet pas de limite au point $(0,0)$ et par conséquent non continue en ce point.

b) Pour tout $(x,y) \neq (0,0)$, nous avons

$$\begin{aligned} |f(x,y)| &= \left|\frac{x^2+xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leq \frac{x^2+|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ &\leq \frac{x^2+|xy|}{\sqrt{x^2}} = \frac{x^2+|xy|}{|x|} = |x|+|y|. \end{aligned}$$

Donc, $\lim\limits_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} f(x,y) = 0$. Par suite, f est continue au point $(0,0)$.

c) Nous avons

$$|g(x,y)| \leq x^2+y^2.$$

D'où,

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} g(x,y) = 0 = g(0,0).$$

La fonction g est continue en (0,0).

d) Pour tout $(x, y) \neq (0, 0)$, nous avons

$$\begin{aligned} |t(x,y)| &= \left|\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right| \\ &\leq \frac{|x^3|}{x^2+y^2} + \frac{|y^3|}{x^2+y^2} \\ &\leq |x|\frac{x^2}{x^2+y^2} + |y|\frac{y^2}{x^2+y^2} \\ &\leq |x| + |y|. \end{aligned}$$

Donc, $\lim\limits_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} t(x,y) = 0$. Par suite, t est continue au point $(0, 0)$.

Exercice 5.

1. Peut-on prolonger par continuité au point $(0, 0)$ les fonctions suivantes ?
   1.1 $f(x,y) = \dfrac{1-\cos\sqrt{xy}}{y}$ si $(x,y) \in A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / xy > 0\right\}$.
   1.2 $g(x,y) = \left(x^2+y^2\right)^x$ si $(x,y) \neq (0,0)$.
   1.3 $h(x,y) = \dfrac{\sqrt{4-x^2-y^2}-2}{\sqrt{x^2+y^2}}$ si $(x,y) \neq (0,0)$.
2. Peut-on prolonger par continuité au point $(1, 0)$ la fonction suivante ?

$$t(x,y) = \frac{y^3}{(x-1)^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (1,0).$$

Corrigé

1)

1.1 Pour tout $(x, y) \in A$, on a

$$\frac{1-\cos(\sqrt{xy})}{y} = x\frac{1-\cos(\sqrt{xy})}{xy}.$$

$$\text{et } 1-\cos(\sqrt{xy}) \backsim \frac{xy}{2} \text{ quand } (x,y) \longrightarrow (0,0).$$

$$\Longrightarrow \lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{1-\cos(\sqrt{xy})}{xy} = \frac{1}{2}.$$

D'où,

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{1-\cos(\sqrt{xy})}{y} = \lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} x\,\frac{1-\cos(\sqrt{xy})}{xy} = 0.$$

On peut donc prolonger f par continuité à l'origine en posant $f(0,0) = 0$.

1.2 On a

$$g(x,y) = e^{x\ln\left(x^2+y^2\right)}.$$

D'autre part, pour tout $x, y) \neq (0,0)$,

$$\begin{aligned}\left|x\ln\left(x^2+y^2\right)\right| &\leq \sqrt{x^2+y^2}\left|\ln\left(x^2+y^2\right)\right| \\ &= 2\sqrt{x^2+y^2}\left|\ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\right|.\end{aligned}$$

Or,

$$\lim_{r\longrightarrow 0} r\ln(r) = 0.$$

Donc,

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} x\ln\left(x^2+y^2\right) = 0,$$

et par conséquent,

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} g(x,y) = 1.$$

On peut donc prolonger g par continuité à l'origine en posant $g(0,0) = 1$.

1.3 on a

$$\begin{aligned} h(x,y) &= \frac{\sqrt{4-x^2-y^2}-2}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ &= \frac{\left(\sqrt{4-x^2-y^2}-2\right)\left(\sqrt{4-x^2-y^2}+2\right)}{\left(\sqrt{4-x^2-y^2}+2\right)\sqrt{x^2+y^2}} \\ &= \frac{-x^2-y^2}{\left(\sqrt{4-x^2-y^2}+2\right)\sqrt{x^2+y^2}} \\ &= \frac{-\sqrt{x^2+y^2}}{\left(\sqrt{4-x^2-y^2}+2\right)} \\ \Longrightarrow |h(x,y)| &\leq \frac{1}{4}\sqrt{x^2+y^2}\end{aligned}$$

et par conséquent,

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} h(x,y) = 0.$$

On peut donc prolonger h par continuité à l'origine en posant $h(0,0) = 0$.

2)On a

$$\begin{aligned}|t(x,y)| &= \frac{|y^3|}{(x-1)^2+y^2} \\ &= |y| \;\; \frac{y^2}{(x-1)^2+y^2} \\ &\leq |y| \underset{y\longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0\end{aligned}$$

et par conséquent, $\lim\limits_{(x,y)\longrightarrow(1,0)} t(x,y) = 0$.
On peut donc prolonger t par continuité au point $(1,0)$ en posant $t(1,0) = 0$.

Exercice 6. Etudier la différentiabilité à l'origine de l'application $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ qui est définie par $f(0;0) = 0$ et par $f(x;y) = \dfrac{|xy|}{\sqrt{x^2+3y^2}}$ si $(x;y) \neq (0;0)$.

Corrigé

Nous avons

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{t\longrightarrow 0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = 0,\\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{t\longrightarrow 0}\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = 0.\end{aligned}$$

Si la fonction f est différentiable en (0,0), sa différentielle en ce point est nulle et on aura au voisinage de 0,

$$f(h,k) = f(0,0) + \|(h,k\|\,\varepsilon(h,k)$$

avec $\lim\limits_{(h,k)\longrightarrow(0,0)} \varepsilon(h,k) = 0$. En prenant la norme euclidienne et en choisissant la direction $k = \lambda h$, nous obtenons

$$\frac{f(h,k)-f(0,0)}{\|(h,k\|} = \frac{|hk|}{\sqrt{h^2+k^2}\sqrt{h^2+3k^2}} = \frac{|\lambda|}{\sqrt{1+\lambda^2}\sqrt{1+3\lambda^2}},$$

quantité qui ne tend pas vers 0 quand $(h,k) \longrightarrow (0,0)$. Donc, f n'est pas différentiable en (0,0).

Exercice 7. Soit f la fonction de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1) Montrer que f est continue en $(0,0)$.

2) Calculer en tout point $(x,y) \neq (0,0)$ $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.

3) Etudier l'existance des dérivées partielles en $(0,0)$. f est-elle différentiable en $(0,0)$?

Corrigé

1) Pour tout $(x, y) \neq (0, 0)$, nous avons

$$\begin{aligned} |f(x,y)| &= \left| \frac{x^2 + xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| \leq \frac{x^2 + |xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ &\leq \frac{x^2 + |xy|}{\sqrt{x^2}} = \frac{x^2 + |xy|}{|x|} = |x| + |y| . \end{aligned}$$

Donc, $\lim\limits_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} f(x, y) = 0$. Par suite, f est continue au point $(0, 0)$.

2) Pour tout $(x, y) \neq (0, 0)$, on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{2x+y}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x(x^2+xy)}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x^3+y^3+2xy^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{y(x^2+xy)}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x^3-yx^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}. \end{aligned}$$

3) On a

$$\lim_{h\longrightarrow 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\longrightarrow 0} \frac{h^2}{h\,|h|},$$

quantité qui n'admet pas de limite quand $h \longrightarrow 0$. Donc, $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ n'existe pas, et

$$\lim_{k\longrightarrow 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = 0.$$

Donc, $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$. $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ n'existe pas. Donc, f n'est pas différentiable au point $(0, 0)$.

Exercice 8. : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$f(x; y) = \left(x^2 + y^2\right) \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$ si $(x; y) \neq (0; 0)$ et $f(0; 0) = 0$.

1) Déterminer les fonctions $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.

2) Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et calculer la différentielle de f au point $(x, y) \neq (0, 0)$.

3) Montrer que les fonctions $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ ne sont pas continues en $(0, 0)$ mais f est différentiable en $(0; 0)$.

Corrigé

1) Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, nous avons

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 2x \sin \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \left(x^2+y^2\right) \frac{x}{(x^2+y^2)^{\dfrac{3}{2}}} \cos \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, \\
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 2y \sin \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \left(x^2+y^2\right) \frac{y}{(x^2+y^2)^{\dfrac{3}{2}}} \cos \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}.
\end{aligned}$$

Pour $x \neq 0$ et $y \neq 0$, nous avons

$$\begin{aligned}
f(x,0) &= x^2 \sin\left(\frac{1}{|x|}\right), \\
f(x,0) &= y^2 \sin\left(\frac{1}{|y|}\right).
\end{aligned}$$

D'où,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{f(x,0)}{x} = \lim_{x \longrightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{|x|}\right) = 0, \\
\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{y \longrightarrow 0} \frac{f(0,y)}{y} = \lim_{x \longrightarrow 0} y \sin\left(\frac{1}{|y|}\right) = 0.
\end{aligned}$$

Les dérivées partielles de f sont définies et continues sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Donc, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. La différentielle de f au point $(x, y) \neq (0,0)$ est donnée par :

$$\begin{aligned}
df_{(x,y)} &= \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dx + \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dy \\
&= \left[2x \sin \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \left(x^2+y^2\right) \frac{x}{(x^2+y^2)^{\dfrac{3}{2}}} \cos \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right] dx \\
&\quad + \left[2y \sin \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \left(x^2+y^2\right) \frac{y}{(x^2+y^2)^{\dfrac{3}{2}}} \cos \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right] dy.
\end{aligned}$$

3) On a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,0) &= 2x \sin\left(\frac{1}{|x|}\right) - \frac{x}{|x|} \cos\left(\frac{1}{|x|}\right), \\
\frac{\partial f}{\partial y}(0,y) &= 2y \sin\left(\frac{1}{|y|}\right) - \frac{y}{|y|} \cos\left(\frac{1}{|y|}\right).
\end{aligned}$$

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,y)$ n'ont pas de limite quand $x \longrightarrow 0$ et $y \longrightarrow 0$.

$$\left(\text{Pour } u_n = \frac{1}{\pi(1+n)} \text{ et } v_n = \frac{1}{\pi n + \pi/2} \text{ ou bien } u_n = \frac{1}{(4n+1)\pi/2} \text{ et } v_n = \frac{1}{2\pi n}\right)$$

Donc les fonctions $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ ne sont pas continues en (0,0). Cependant, la fonction f est différentiable en (0,0) car, en prenant la norme euclidienne, nous avons pour $(x,y) \neq (0,0)$,

$$\frac{|f(x,y)|}{\|(x,y)\|} = \frac{|f(x,y)|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \sqrt{x^2+y^2}.$$

Donc,

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{|f(x,y)|}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

Ce qui montre que f est différentiable en (0,0) et sa différentielle en ce point est nulle.