UNIVERSITE MOHAMMED PREMIER
ECOLE NATIONALE DES SCIENCES APPLIQUEES
OUJDA-MAROC

Filière : STPI-CP2 — Année universitaire : 2019 - 2020
Module : Analyse IV — Enseignant : M. Derouich

Fiche TD N° : 3

Exercice 1. Etudier la différentiablilité des fonctions suivantes :

1) $f(x,y) = x^2 + y^2$; 2) $g(x,y,z) = \sin(x^2+y) + \cos yz$; 3) $h(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$;
4) $t(x;y) = y^2 \sin\dfrac{x}{y}$ si $y \neq 0$ et $t(x;0) = 0$ si $y = 0$.

Exercice 2. :

1. Montrer que :
   1.1 $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / xy = 1\}$ est fermé de $\mathbb{R}^2$.
   1.2 $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + xy + y^2 < e^{z+x}\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^3$.
2. Soient f et g deux applications continues de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$. Montrer que
   2.1 $A = \{x \in \mathbb{R}^n / \ f(x) = g(x)\}$ est fermé.
   2.2 $B = \{x \in \mathbb{R}^n / \ 1 < f(x) < 2\}$ est ouvert.
   2.3 $C = \{x \in \mathbb{R}^n / \ f(x) \leq g(x)\}$ est fermé.

Exercice 3. Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x-1)y^2}{(x-1)^2+y^2} & \text{pour } (x,y) \neq (1,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (1,0). \end{cases}$$

1. montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$;
2. calculer les dérivées partielles de f pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$;
3. montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus (1,0)$;
4. que peut-on conclure sur la différentiabilité de f sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(1,0)\}$
5. montrer que f n'est pas différentiable en $(1,0)$;
6. f est-elle de classe C^1 en $(1,0)$?

Exercice 4. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ une constante et $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction ainsi définie

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x^2+y^2)}{x^2+y^2} & \text{pour } (x,y) \neq (0,0), \\ \alpha & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
2. Calculer les dérivées partielles de f pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
3. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$;
4. Que peut-on conclure sur la différentiabilité de f ?
5. Calculer $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

6. Déduire la valeur α_0 de α pour laquelle f est continue en (0, 0).
7. Soit $\alpha = \alpha_0$

   $i)$ Calculer les dérivées partielles de f en $(0,0)$.

   $ii)$ En utilisant la définition, prouver que f est différentiable en $(0,0)$.

   $iii)$ Montrer que f est de classe C^1 en $(0,0)$.

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$f(x;y) = (\cos x + \sin y, -\sin x + \cos y, 2\sin x \cos y)$.

1) Déterminer la matrice Jacobienne $J_{(x,y)}(f)$ de f au point (x,y).

2) Soit $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par : $g(u,v,w) = u^2 + v^2 + w$. Déterminer la matrice Jacobienne $J_{(u,v,w)}(g)$ de g au point (u,v,w).

3) Calculer la matrice Jacobienne $J_{(x,y)}(gof)$ de gof au point (x,y)

a) En explicitant gof. b) Au moyen d'un produit de matrices.

Exercice 6. Soient les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ et $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définies par :

$$f(x,y) = (x^2 + y, x^2 - y^2, 1);\ g(x,y) = (e^{x-y}, 2xy).$$

1) Rappeler la définition d'une fonction de classe C^k sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$.

2) Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

a) Déterminer les matrices jacobiennes $J_f(x,y)$ et $J_g(x,y)$ respectives de f et g.

b) Calculer de deux manières différentes la matrice jacobienne $J_{(fog)}(x,y)$ de fog.

c) Donner $d(fog)_{(x,y)}(h,k)$, $(h,k) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 7. Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $f(x,y) = xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ si $(x;y) \neq (0;0)$ et $f(0;0) = 0$ admet des dérivées partielles d'ordre 2 en tout point mais que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.

Exercice 8. Soit f la fonction définie par $f(x,y) = 3x^2 + 2y^3 - 6y$

1. Montrer qu'on peut appliquer le théorème des fonctions implicites à la fonction f au voisinage de $(0,0)$. Soit φ cette fonction implicite.
2. Etablir la relation $x + (\varphi^2(x) - 1)\varphi'(x) = 0$, calculer $\varphi'(0)$
3. Donner le développement limité de φ à l'ordre 2 au voisinage de 0 .
4. Déterminer l'équation de la droite tangente à $y = \varphi(x)$ en $x = 0$.

Exercice 9. :

1. Montrer que l'equation $z^3 + 2z + e^{z-x-y^2} = cos(x - y + z)$ définit implicitement z comme fonction C^∞ de x et y au voisinage de 0 qui s'annule en 0.
2. Calculer les dérivées partielles de z en 0.
3. Écrire l'équation du plan tangent à f en (0, 0).

Exercice 10. : Déterminer les extrema de f et g et préciser leur nature.

1. $f(x,y) = \left(x^2 + y^2\right) e^{x^2-y^2}$.
2. $g(x,y) = xe^y + y\ln(x)$.

UNIVERSITE MOHAMMED PREMIER
ECOLE NATIONALE DES SCIENCES APPLIQUEES
OUJDA-MAROC

Filière : STPI-CP2 — Année universitaire : 2019 - 2020
Module : Analyse IV — Enseignant : M. Derouich

Corrigé

Exercice 1. Etudier la différentiablilité des fonctions suivantes :

1) $f(x,y) = x^2 + y^2$; 2) $g(x,y,z) = \sin(x^2+y) + \cos yz$; 3) $h(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$;
4) $t(x;y) = y^2 \sin \dfrac{x}{y}$ si $y \neq 0$ et $t(x;0) = 0$ si $y = 0$.

Corrigé

1) La fonction f est un polynôme. Donc, elle est différentiable en tout point de $\mathbb{R}^2$ et pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$df_{(x,y)} = 2xdx + 2ydy,$$

et pour tout $(h,k) \in \mathbb{R}^2$, nous avons,

$$df_{(x,y)}(h,k) = 2hx + 2ky.$$

2) g est différentiable sur $\mathbb{R}^3$ comme somme et composée de fonctions différentiables sur $\mathbb{R}^3$. Pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, on a

$$dg_{(x,y,z)} = 2x\cos(x^2+y)dx + \left[\cos(x^2+y) - z\sin(yz)\right]dy - y\sin(yz)\,dz,$$

et pour tout $(h,k,l) \in \mathbb{R}^3$, nous avons,

$$dg_{(x,y,z)}(h,k,l) = 2hx\cos(x^2+y) + k\left[\cos(x^2+y) - z\sin(yz)\right] - ly\sin(yz).$$

3) La fonction h est différentiable sur $\mathbb{R}^2/\{(0,0)\}$ comme composée de fonctions différentiables sur $\mathbb{R}^2$. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2/\{(0,0)\}$, on a

$$dh_{(x,y)} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dx + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}dy.$$

Etudions la différentiabilité en (0,0). Nous avons

$$\frac{h(t,0)-h(0,0)}{t} = \frac{h(0,t)-h(0,0)}{t} = \frac{\sqrt{t^2}}{t}.$$

Ces quantités n'ont pas de limite lorsque t tend vers 0. Donc, les dérivées partielles en (0,0) n'existe pas. Par conséquent, h n'est pas différentiable en (0,0).

4) La fonction t est différentiable sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ comme produit et composée de fonctions différentiables. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$, on a

$$dt_{(x,y)} = y \cos\left(\frac{x}{y}\right) dx + \left[2y \sin\left(\frac{x}{y}\right) - x \cos\left(\frac{x}{y}\right)\right] dy.$$

D'autre part, pour tout $a \in \mathbb{R}$ et pour tout (h, k) proche de (0,0), on a

$$\frac{|t(a+h,k) - t(a,0)|}{\|(h,k)\|} = \frac{k^2 \left|\sin\left(\dfrac{a+h}{k}\right)\right|}{\sqrt{h^2+k^2}} \leq |k|\,.$$

Donc,

$$\lim_{(h,k) \longrightarrow (0,0)} \frac{|t(a+h,k) - t(a,k)|}{\|(h,k)\|} = 0.$$

$\Longrightarrow$ t est différentiable en $(a, 0)$ et sa différentielle en ce point est l'application nulle.

Exercice 2. :

1. Montrer que :

   1.1 $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / xy = 1\}$ est fermé de $\mathbb{R}^2$.

   1.2 $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + xy + y^2 < e^{z+x}\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^3$.

2. Soient f et g deux applications continues de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$. Montrer que

   2.1 $A = \{x \in \mathbb{R}^n /\ f(x) = g(x)\}$ est fermé.

   2.2 $B = \{x \in \mathbb{R}^n /\ 1 < f(x) < 2\}$ est ouvert.

   2.3 $C = \{x \in \mathbb{R}^n /\ f(x) \leq g(x)\}$ est fermé.

Corrigé

1.1)

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / xy = 1\right\} = f^{-1}(\{1\}),$$

où $f(x, y) = xy$. Comme $\{1\}$ est fermé dans $\mathbb{R}$ et f est continue sur $\mathbb{R}^2$, alors A est fermé dans $\mathbb{R}^2$.
1.2)

$$\begin{aligned} C &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + xy + y^2 < e^{z+x}\} \\ &= C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + xy + y^2 - e^{z+x} < 0\} \\ &= h^{-1}(]-\infty, 0[)\,, \end{aligned}$$

où $h(x, y, z) = x^2 + xy + y^2 - e^{z+x}$. Comme $]-\infty, 0[$ est ouvert dans $\mathbb{R}$ et f continue sur $\mathbb{R}^3$, alors C est un ouvert de $\mathbb{R}^3$. 1)

$$E = f^{-1}(\{a\})$$

est fermé dans $\mathbb{R}^n$ comme image réciproque du fermé $\{a\}$ par l'application continue f.

2)

$$F = \complement E.$$

Comme E est fermé dans $\mathbb{R}^n$, F est ouvert dans $\mathbb{R}^n$.

3)

$$\begin{aligned} G &= \{x \in \mathbb{R}^n / f(x) = g(x)\} = \{x \in \mathbb{R}^n / f(x) - g(x) = 0\} \\ &= (f-g)^{-1}\{0\}, \end{aligned}$$

est fermé dans $\mathbb{R}^n$ comme image réciproque du fermé $\{0\}$ par l'application continue $f - g$.

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x-1)y^2}{(x-1)^2+y^2} & \text{pour } (x,y) \neq (1,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (1,0). \end{cases}$$

1. montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$;
2. calculer les dérivées partielles de f pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$;
3. montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(1,0)\}$;
4. que peut-on conclure sur la différentiabilité de f sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(1,0)\}$
5. montrer que f n'est pas différentiable en $(1,0)$;
6. f est-elle de classe C^1 en $(1,0)$?

Corrigé

1. La fonction f est définie et continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(1,0)\}$ comme quotient de fonctions continues. D'autre part, on a

$$\left| \frac{(x-1)y^2}{(x-1)^2+y^2} \right| \leq \left| \frac{(x-1)y^2}{y^2} \right| \leq |x-1| \underset{(x,y)\to(1,0)}{\longrightarrow} 0$$
$$\Longrightarrow \lim_{(x,y)\to(1,0)} f(x,y) = f(1,0)$$

Donc, f est continue en (0,0). Par suite, f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

2. les dérivées partielles de f pour $\mathbb{R}^2 \setminus \{(1,0)\}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -y^2 \frac{(x-1)^2 - y^2}{((x-1)^2+y^2))^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2(x-1)^3 y}{((x-1)^2+y^2))^2}$$

les dérivées partielles de f au point $(1,0)$ On a

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(1,0) &= \lim_{t\longrightarrow 0} \frac{f(t,0) - f(1,0)}{t} \\ &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(1,0) &= \lim_{t\longrightarrow 0} \frac{f(1,t) - f(1,0)}{t} \\ &= 0 \end{aligned}$$

3. f est continue sur $\mathbb{R}^2$, ces dérivées partielles de f sont définies et continues sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(1,0)\}$. Donc, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(1,0)\}$.
4. On a f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(1,0)\}$ donc f est différentiable sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(1,0)\}$. (Toute fonction de classe C^1 étant différentiable).
5. Si f est différentiable en (0,0), sa différentielle en ce point serait l'application linéaire $df_{(0,0)}$ définie sur $\mathbb{R}^2$ par :
$$df_{(1,0)}(h,k) = h\frac{\partial f}{\partial x}(1,0) + k\frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = 0,$$
et nous aurons au voisinage de (1,0),
$$\frac{f(1+h,k) - f(1,0) - df_{(1,0)}(h,k)}{\|(h,k)\|} = \frac{\frac{hk^2}{h^2+k^2}}{\sqrt{h^2+k^2}}.$$
$$\lim_{(h,k)\longrightarrow(0,0)} \frac{f(1+h,k) - f(1,0) - df_{(1,0)}(h,k)}{\|(h,k)\|} = \lim_{(h,k)\longrightarrow(0,0)} \frac{hk^2}{(h^2+k^2)\sqrt{h^2+k^2}}$$
pour $k = \lambda h$ on a
$$\begin{aligned}\lim_{(h,k)\longrightarrow(0,0)} \frac{f(1+h,k) - f(1,0) - df_{(1,0)}(h,k)}{\|(h,k)\|} &= \lim_{(h,k)\longrightarrow(0,0)} \frac{h^3\lambda^2}{h^2(1+\lambda^2)|h|\sqrt{1+\lambda^2}} \\ &= \lim_{(h,k)\longrightarrow(0,0)} \frac{h}{|h|}\frac{\lambda^2}{(1+\lambda^2)^{3/2}}\end{aligned}$$
et cette quantité n'admet pas de limite. Donc, f n'est pas différentiable au point $(1,0)$.
6. f n'est pas différentiable au point $(1,0)$ donc elle n'est pas de classe C^1 en $(1,0)$.

Exercice 4. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ une constante et $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction ainsi définie
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x^2+y^2)}{x^2+y^2} & \text{pour } (x,y) \neq (0,0), \\ \alpha & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
2. Calculer les dérivées partielles de f pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
3. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$;
4. Que peut-on conclure sur la différentiabilité de f ?
5. Calculer $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$
6. Déduire la valeur α_0 de α pour laquelle f est continue en $(0,0)$.
7. Soit $\alpha = \alpha_0$

   i) Calculer les dérivées partielles de f en $(0,0)$.

   ii) En utilisant la définition, prouver que f est différentiable en $(0,0)$.

   iii) Montrer que f est de classe C^1 en $(0,0)$.

Corrigé

1. La fonction f est définie et continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ comme quotient et composée de fonctions continues.

2. On a
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2x}{x^2+y^2}\left(\frac{1}{1+x^2+y^2} - \frac{\ln(1+x^2+y^2)}{x^2+y^2}\right)$$
$$\text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2y}{x^2+y^2}\left(\frac{1}{1+x^2+y^2} - \frac{\ln(1+x^2+y^2)}{x^2+y^2}\right)$$

3. f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, ces dérivées partielles de f sont définies et continues sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Donc, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

4. On a f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ donc f est différentiable sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. (Toute fonction de classe C^1 étant différentiable).

5. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, en passant en coordonnées polaires :
$$\begin{aligned} f(x,y) = f(r\cos\theta, r\sin\theta) &= \frac{\ln(1+r^2)}{r^2} \\ &= 1 - \frac{r^2}{2} + o(r^2) \text{ lorsque } r \simeq 0 \\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) &= \lim_{\substack{r\to 0 \\ \forall\theta}} 1 - \frac{r^2}{2} + o(r^2) \\ &= 1 \end{aligned}$$

6. f est continue en $(0,0) \Longleftrightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$ donc $\alpha_0 = 1$.

7. Si $\alpha_0 = 1$

   i) On a
$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{t\longrightarrow 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} \\ &= \lim_{t\longrightarrow 0} \frac{\frac{\ln(1+t^2)}{t^2} - 1}{t} \\ &= \lim_{t\longrightarrow 0} \frac{-\frac{t^2}{2} + o(t^2)}{t} \\ &= \lim_{t\longrightarrow 0} -\frac{t}{2} + o(t) \\ &= 0 \end{aligned}$$
   de même, par symétrie, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim\limits_{t\longrightarrow 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = 0.$

   ii) Si f est différentiable en (0,0), sa différentielle en ce point serait l'application linéaire $df_{(0,0)}$ définie sur $\mathbb{R}^2$ par :
$$df_{(0,0)}(h,k) = h\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) + k\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0,$$

et nous aurons au voisinage de (0,0),

$$\frac{f(h,k)-f(0,0)-df_{(0,0)}(h,k)}{\|(h,k)\|}=\frac{\dfrac{\ln(1+h^2+k^2)}{h^2+k^2}-1}{\sqrt{h^2+k^2}}.$$

$$\begin{aligned}
\lim_{(h,k)\longrightarrow(0,0)}\frac{f(h,k)-f(0,0)-df_{(0,0)}(h,k)}{\|(h,k)\|} &= \lim_{(h,k)\longrightarrow(0,0)}\frac{\dfrac{\ln(1+h^2+k^2)}{h^2+k^2}-1}{\sqrt{h^2+k^2}}\\
&= \lim_{\substack{r\rightarrow 0\\ \forall\theta}}\frac{1}{r}\left(\frac{\ln(1+r^2)}{r^2}-1\right)\\
&= \lim_{\substack{r\rightarrow 0\\ \forall\theta}}\frac{1}{r}\left(1-\frac{r^2}{2}+r^2\varepsilon(r)-1\right)\\
&= 0
\end{aligned}$$

donc f est bien différentiable en $(0,0)$.

$iii)$ On a

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\rightarrow(0,0)}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \lim_{(x,y)\rightarrow(0,0)}\frac{2x}{x^2+y^2}\left(\frac{1}{1+x^2+y^2}-\frac{\ln(1+x^2+y^2)}{x^2+y^2}\right)\\
&= \lim_{\substack{r\rightarrow 0\\ \forall\theta}}\frac{2\cos\theta}{r}\left(\frac{1}{1+r^2}-\frac{\ln(1+r^2)}{r^2}\right)\\
&= \lim_{\substack{r\rightarrow 0\\ \forall\theta}}\frac{2\cos\theta}{r}\left(\frac{1}{1+r^2}-1+\frac{r^2)}{2}\right)\\
&= \lim_{\substack{r\rightarrow 0\\ \forall\theta}}\frac{r(r^2-1)}{1+r^2}\cos\theta
\end{aligned}$$

Comme $\left|\dfrac{r(r^2-1)}{1+r^2}\cos\theta\right|\leq\left|\dfrac{r(r^2-1)}{1+r^2}\right|\underset{r\rightarrow 0}{\longrightarrow}0$

Donc $\displaystyle\lim_{(x,y)\rightarrow(0,0)}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0=\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$

de même $\displaystyle\lim_{(x,y)\rightarrow(0,0)}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$

Donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont continues en (0, 0) et on a f est continue en (0, 0), on conclut que f est de classe C^1 en (0,0)

Exercice 5. Soit $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^3$ la fonction définie par :

$f(x;y)=(\cos x+\sin y,-\sin x+\cos y,2\sin x\cos y)$.

1) Déterminer la matrice Jacobienne $J_{(x,y)}(f)$ de f au point (x,y).

2) Soit $g:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}$ la fonction définie par : $g(u,v,w)=u^2+v^2+w$. Déterminer la matrice Jacobienne $J_{(u,v,w)}(g)$ de g au point (u,v,w).

3) Calculer la matrice Jacobienne $J_{(x,y)}(gof)$ de gof au point (x,y)

a) En explicitant gof. b) Au moyen d'un produit de matrices.

Corrigé

1) La matrice jacobienne de f est donnée par :

$$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} -\sin x & \cos y \\ -\cos x & -\sin y \\ 2\cos x\cos y & -2\sin x\sin y \end{pmatrix}.$$

2) La matrice jacobienne de g est donnée par :

$$J_g(u,v,w) = \begin{pmatrix} 2u & 2v & 1 \end{pmatrix}.$$

3) a) On a

$$\begin{aligned} gof(x,y) &= g\left[f(x,y)\right] = g(\cos x + \sin y, -\sin x + \cos y, 2\sin x\cos y) \\ &= (\cos x + \sin y)^2 + (-\sin x + \cos y)^2 + 2\sin x\cos y \\ &= 2 + 2\cos x\sin y. \end{aligned}$$

D'où,

$$Jgof(x,y) = \begin{pmatrix} -2\sin x\sin y, & 2\cos x\cos y \end{pmatrix}.$$

b) On a

$$\begin{aligned} Jgof(x,y) &= J_g(f(x,y) \times J_f(x,y) \\ &= J_g\left(\cos x + \sin y, -\sin x + \cos y, 2\sin x\cos y\right) \times \begin{pmatrix} -\sin x & \cos y \\ -\cos x & -\sin y \\ 2\cos x\cos y & -2\sin x\sin y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2\left(\cos x + \sin y\right), & 2\left(-\sin x + \cos y\right) & ,1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\sin x & \cos y \\ -\cos x & -\sin y \\ 2\cos x\cos y & -2\sin x\sin y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2\sin x\sin y & 2\cos x\cos y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Exercice 6. Soient les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ et $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définies par :

$$f(x,y) = (x^2 + y, x^2 - y^2, 1); \; g(x,y) = (e^{x-y}, 2xy).$$

1) Rappeler la définition d'une fonction de classe C^k sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$.

2) Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

a) Déterminer les matrices jacobiennes $J_f(x,y)$ et $J_g(x,y)$ respectives de f et g.

b) Calculer de deux manières différentes la matrice jacobienne $J_{(fog)}(x,y)$ de fog.

c) Donner $d\,(fog)_{(x,y)}\,(h,k)\,,\,(h,k) \in \mathbb{R}^2$.

Corrigé

1) une fonction f est dite de classe C^k sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ si f admet toutes les dérivées partielles d'ordre k sur U et que celles-ci sont continues sur U.

2)

a) Les matrices jacobiennes $J_f(x,y)$ et $J_g(x,y)$ de f est g sont données par :

$$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & 1 \\ 2x & -2y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_g(x,y) = \begin{pmatrix} e^{x-y} & -e^{x-y} \\ 2y & 2x \end{pmatrix}.$$

b)

- Calcul de $J_{(fog)}(x,y)$ par utilisation de l'expression de fog. Nous avons

$$\begin{aligned} (fog)(x,y) &= f[g(x,y)] = \left(\left[e^{x-y}\right]^2 + 2xy, \left[e^{x-y}\right]^2 - [2xy]^2, 1\right) \\ &= \left(e^{2x-2y} + 2xy, e^{2x-2y} - 4x^2y^2, 1\right). \end{aligned}$$

D'où,

$$J_{(fog)}(x,y) = \begin{pmatrix} 2e^{2x-2y} + 2y & -2e^{2x-2y} + 2x \\ 2e^{2x-2y} - 8xy^2 & -2e^{2x-2y} - 8x^2y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Calcul de $J_{(fog)}(x,y)$ par utilisation des matrices jacobiennes. Nous avons

$$\begin{aligned} J_{(fog)}(x,y) &= J_f[g(x,y)] \times J_g(x,y) \\ &= \begin{pmatrix} 2e^{x-y} & 1 \\ 2e^{x-y} & -4xy \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{x-y} & -e^{x-y} \\ 2y & 2x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2e^{2x-2y} + 2y & -2e^{2x-2y} + 2x \\ 2e^{2x-2y} - 8xy^2 & -2e^{2x-2y} - 8x^2y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

c) On a

$$\begin{aligned} \left[d(fog)_{(x,y)}(h,k), (h,k)\right]^t &= J_{(fog)}(x,y) \times (h,k)^t \\ &= \begin{pmatrix} 2e^{2x-2y} + 2y & -2e^{2x-2y} + 2x \\ 2e^{2x-2y} - 8xy^2 & -2e^{2x-2y} - 8x^2y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} h\left(2e^{2x-2y} + 2y\right) + k\left(-2e^{2x-2y} + 2x\right) \\ h\left(2e^{2x-2y} - 8xy^2\right) + k\left(-2e^{2x-2y} - 8x^2y\right) \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Donc,

$$d(fog)_{(x,y)}(h,k), (h,k) = \begin{pmatrix} h\left(2e^{2x-2y} + 2y\right) + k\left(-2e^{2x-2y} + 2x\right), \\ h\left(2e^{2x-2y} - 8xy^2\right) + k\left(-2e^{2x-2y} - 8x^2y\right), 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 7. Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $f(x,y) = xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ si $(x;y) \neq (0;0)$ et $f(0;0) = 0$ admet des dérivées partielles d'ordre 2 en tout point mais que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.

Corrigé

La fonction f est de classe C^∞ dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ comme quotient de fonctions de classe C^∞. Nous avons

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = 0 \text{ et} \\
\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = 0. \\
&.
\end{aligned}$$

et pour $(x,y) \neq (0,0)$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{y\left(x^4 + 4x^2y^2 - y^4\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}, \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= -\frac{x\left(y^4 + 4x^2y^2 - x^4\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}.
\end{aligned}$$

D'où,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(0,k) &= -k \text{ si } k \neq 0, \\
\frac{\partial f}{\partial y}(h,0) &= h \text{ si } h \neq 0.
\end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) &= \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(h,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{h} = 1, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) &= \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(0,k) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{k} = -1.
\end{aligned}$$

Les dérivées partielles d'ordre 2 existent en (0,0). Cependant, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$. Donc, f n'est pas de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 8. Soit f la fonction définie par $f(x,y) = 3x^2 + 2y^3 - 6y$

1. Montrer qu'on peut appliquer le théorème des fonctions implicites à la fonction f au voisinage de $(0,0)$. Soit φ cette fonction implicite.
2. Etablir la relation $x + (\varphi^2(x) - 1)\varphi'(x) = 0$, calculer $\varphi'(0)$

3. Donner le développement limité de φ à l'ordre 2 au voisinage de 0 .
4. Déterminer l'équation de la droite tangente à $y = \varphi(x)$ en $x = 0$.

Corrigé

1. On a f est une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$.
   Comme $f(0,0) = 0$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 6y^2 - 6, \Longrightarrow \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = -6 \neq 0$.
   Alors d'après le théorème des fonctions implicites au voisinage de $(0,0)$, il existe un intervalle ouvert I contenant 0 et une fonction φ de I dans $\mathbb{R}$ de classe C^∞ sur I telle que $\varphi(0) = 0$ et pour tout $x \in I; f(x, \varphi(x)) = 0$.

2. On dérive la relation $3x^2 + 2\varphi(x)^3 - 6\varphi(x) = 0$, pour $x \in I$. Il vient :
   $$6x + 6\varphi'(x)\varphi^2(x) - 6\varphi'(x) = 0.$$
   $$\Longrightarrow x + \varphi'(x)(\varphi^2(x) - 1) = 0.$$
   On évalue cette relation en $x = 0$ (on a $\varphi(0) = 0$),
   donc on trouve $\varphi'(0) = 0$.

3. Une deuxième dérivation donne :
   $6x + 6\varphi'(x)\varphi^2(x) - 6\varphi'(x) = 0$
   $\Longrightarrow 6 + 6\varphi''(x)\varphi^2(x) + 12(\varphi')^2(x)\varphi(x) - 6\varphi''(x) = 0$ On évalue cette relation en $x = 0$ (on a $\varphi(0) = 0$ et $\varphi'(0) = 0$),
   donc on trouve $\varphi''(0) = 1$.
   $$\Longrightarrow \varphi(x) = \varphi(0) + x\varphi'(0) + \frac{x^2}{2}\varphi''(0) + o(x^2)$$
   $$\Longrightarrow \varphi(x) = \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$
4. L'équation la droite tangente à φ en 0 est
   $$y = \varphi(0,0) + x\varphi'(x) \Longleftrightarrow y = 0$$

Exercice 9. :

1. Montrer que l'equation $z^3 + 2z + e^{z-x-y^2} = cos(x - y + z)$ définit implicitement z comme fonction C^∞ de x et y au voisinage de 0 qui s'annule en 0.
2. Calculer les dérivées partielles de z en 0.
3. Écrire l'équation du plan tangent à φ en (0, 0).

Corrigé

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$f(x,y,z) = z^3 + 2z + e^{z-x-y^2} - \cos(x-y+z)$$

La fonction f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^3$, elle vérifie $f(0,0,0) = 0$ et sa dérivée partielle par rapport à z est

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 3z^2 + 2 + e^{z-x-y^2} + \sin(x-y+z)$$

En particulier, $\frac{\partial f}{\partial z}(0,0,0)) = 3 \neq 0$,
Alors d'après le théorème des fonctions implicites au voisinage de $(0,0,0)$, il existe donc un voisinage V de $(0,0)$ et une fonction $\varphi : V \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ telle que $\varphi(0,0) = 0$ et pour tout $(x,y) \in V$

$$f(x,y,\varphi(x,y)) = 0$$

2. On peut calculer les dérivées partielles par la formule :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) & = & -\dfrac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,\varphi(x,y))}{\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,\varphi(x,y))} \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) & = & -\dfrac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,\varphi(x,y))}{\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,\varphi(x,y))} \end{cases}$$

Comme
$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = e^{z-x-y^2} + \sin(x-y+z) \Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0,0,0)) = 1$,
$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = -2ye^{z-x-y^2} - \sin(x-y+z) \Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(0,0,0)) = 0$,
$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 3z^2 + 2 + e^{z-x-y^2} + \sin(x-y+z) \Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial z}(0,0,0)) = 3 \neq 0$, Donc

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x}(0,0) & = & -\dfrac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0,0)}{\frac{\partial f}{\partial z}(0,0,0)} = 1 \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial y}(0,0) & = & -\dfrac{\frac{\partial f}{\partial y}(0,0,0)}{\frac{\partial f}{\partial z}(0,0,0)} = 0 \end{cases}$$

3. L'équation du plan tangent à φ en $(0,0)$ est

$$z = \varphi(0,0) + x\frac{\partial \varphi}{\partial x}(0,0) + y\frac{\partial \varphi}{\partial y}(0,0) \Longleftrightarrow z = x$$

Exercice 10. : Déterminer les extrema de f préciser leur nature.

1. $f(x,y) = \left(x^2+y^2\right)e^{x^2-y^2}$.

2. $f(x,y) = xe^y + y\ln(x)$.

Corrigé

1) les extrema de $f(x,y) = \left(x^2+y^2\right) e^{x^2-y^2}$.

Les points critiques vérifient le système d'équations

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} \left[2x+2x\left(x^2+y^2\right)\right] e^{x^2-y^2} = 2x\left(1+x^2+y^2\right) e^{x^2-y^2} = 0 \\ \left[2y-2y\left(x^2+y^2\right)\right] e^{x^2-y^2} = 2y\left(1-x^2-y^2\right) e^{x^2-y^2} = 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} x=0 \\ y=0 \text{ ou } 1-x^2-y^2=0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x=0 \\ y=0 \text{ ou } y=1 \text{ ou } y=-1. \end{array}\right.$$

Les points stationnaires sont : $(0,0)$, (0,1) et (0,-1).

la nature de chaque point critique :
On a $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2-6x^2$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -2$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 0$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 0$
Donc La matrice hessienne de f en un point (x,y) est

$$Hessf_{(x,y)} := \left(\begin{array}{cc} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc} A & C \\ C & B \end{array}\right)$$

Avec

$$\begin{array}{rcl} A &=& \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \left[2\left(1+x^2+y^2\right)+4x^2+4x^2\left(1+x^2+y^2\right)\right] e^{x^2-y^2} \\ B &=& \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \left[2\left(1-x^2-y^2\right)-4y^2-4y^2\left(1-x^2-y^2\right)\right] e^{x^2-y^2} \\ C &=& \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \left[4xy-4xy\left(\left(1+x^2+y^2\right)\right)\right] e^{x^2-y^2}. \end{array}$$

• au point $(0,0)$ on a
$A=2$, $B=2$ et $C=0 \Longrightarrow \Delta(0,0)=4>0$ et comme $A=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)=2>0$
$\Longrightarrow (0,0)$ est un minimum local.

On remarque que

$$f(x,y) \geq 0 = f(0,0) \Longrightarrow (0,0) \text{ est un minimum global..}$$

• Pour (0,1) et (0,-1), on a
$A=4e^{-1}$, $B=-4^e-1$ et $C=0 \Longrightarrow \Delta(0,\pm 1) = -16e^{-1} < 0 \Longrightarrow$(0,1) et (0,-1) sont des points selles.

2) les extrema de $f(x,y) = xe^y + y\ln(x)$.

Les points critiques vérifient le système d'équations

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} e^y + \dfrac{y}{x} = 0 \\ xe^y + \ln x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} e^y = -\dfrac{y}{x} \\ y = \ln x \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \ln x \\ x^2 + \ln x = 0 \end{cases}$$

La fonction $g : x \longmapsto x^2 + \ln x$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. L'etude de cette fonction montre qu'il existe un et un seul point $\alpha \in]0,1[$ tel que $g(\alpha) = 0$. Donc, il existe un et un seul point $\alpha \in]0,1[$ tel que $\alpha^2 + \ln \alpha = 0$.

la nature de chaque point critique

On a $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \dfrac{-y}{x^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = xe^y$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = e^y + \dfrac{1}{x}$

$\Longrightarrow \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\alpha, \ln(\alpha)) = \dfrac{-\ln(\alpha)}{\alpha^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \alpha^2$

et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\alpha, \ln(\alpha)) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\alpha, \ln(\alpha)) = \alpha + \dfrac{1}{\alpha}$

Donc la matrice hessienne de f en un point (x,y) est

$$Hessf_{(x,y)} := \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{-\ln(\alpha)}{\alpha^2} & \alpha + \dfrac{1}{\alpha} \\ \alpha + \dfrac{1}{\alpha} & \alpha^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \Delta(\alpha, \ln(\alpha)) &= \det(Hessf_{(\alpha,\ln(\alpha))}) \\ &= -\left[\alpha + \frac{1}{\alpha}\right]^2 - \ln(\alpha) \\ &= -\left[\alpha + \frac{1}{\alpha}\right]^2 + \alpha^2 \quad (\text{car } \alpha^2 + \ln \alpha = 0) \\ &= -2 - \frac{1}{\alpha^2} \\ &< 0 \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ pas d'extremum
