# Fiche $N^{\circ}3$ :Analyse en composante principale (ACP)

# Exercice 1

On a :

$$V = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

# Exercice 1

On a :

$$V = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

1- Donc le trace de $V$ est : $tra(V) = \frac{1}{4} \times 4 = 1$

2- Les différentes valeurs propres de $V$ on a :

$$\det(V - \lambda I) \qquad = \qquad \begin{vmatrix} 1/4-\lambda & -1/4 & 0 & 0 \\ -1/4 & 1/4-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4-\lambda & -1/4 \\ 0 & 0 & -1/4 & 1/4-\lambda \end{vmatrix}.$$

2- Les différentes valeurs propres de $V$ on a :

$$\det(V-\lambda I) \qquad = \qquad \begin{vmatrix} 1/4-\lambda & -1/4 & 0 & 0 \\ -1/4 & 1/4-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4-\lambda & -1/4 \\ 0 & 0 & -1/4 & 1/4-\lambda \end{vmatrix}.$$

$$\underset{L_4 \leftarrow L_4 + L_3}{\overset{L_1 \leftarrow L_1 + L_2}{=}}$$

2- Les différentes valeurs propres de $V$ on a :

$$\det(V-\lambda I) = \begin{vmatrix} 1/4-\lambda & -1/4 & 0 & 0 \\ -1/4 & 1/4-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4-\lambda & -1/4 \\ 0 & 0 & -1/4 & 1/4-\lambda \end{vmatrix}.$$

$$\underset{L_4\leftarrow L_4+L_3}{\overset{L_1\leftarrow L_1+L_2}{=}} \begin{vmatrix} -\lambda & -\lambda & 0 & 0 \\ -1/4 & 1/4-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4-\lambda & -1/4 \\ 0 & 0 & -\lambda & -\lambda \end{vmatrix}.$$

$$= \qquad \lambda^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1/4 & 1/4-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4-\lambda & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$= \lambda^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1/4 & 1/4-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4-\lambda & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$\underset{C_3 \leftarrow C_3 - C_4}{\overset{C_2 \leftarrow C_2 - C_1}{=}}$$

$$
= \quad \lambda^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1/4 & 1/4-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4-\lambda & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}.
$$

$$
\underset{C_3 \leftarrow C_3 - C_4}{\overset{C_2 \leftarrow C_2 - C_1}{=}} \quad \lambda^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1/4 & 1/2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2-\lambda & -1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.
$$

$$
=
$$

$$
\begin{aligned}
&= \quad \lambda^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1/4 & 1/4-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4-\lambda & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}. \\
&\underset{C_3 \leftarrow C_3 - C_4}{\overset{C_2 \leftarrow C_2 - C_1}{=}} \quad \lambda^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1/4 & 1/2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2-\lambda & -1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \\
&= \quad \lambda^2 (\frac{1}{2} - \lambda)^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \quad \lambda^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1/4 & 1/4-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4-\lambda & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}. \\
&\underset{C_3 \leftarrow C_3 - C_4}{\overset{C_2 \leftarrow C_2 - C_1}{=}} \quad \lambda^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1/4 & 1/2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2-\lambda & -1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \\
&= \quad \lambda^2 (\frac{1}{2} - \lambda)^2
\end{aligned}
$$

Donc $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_1 = 1/2$

3- Le vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda = 0$

Soit

$$u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \ker(V)$$

3- Le vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda = 0$
Soit

$$u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \ker(V) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rl} x - y = & 0 \\ -x + y = & 0 \\ z - t = & 0 \\ -z + t = & 0 \end{array} \right.$$

3- Le vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda = 0$
Soit

$$u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \ker(V) \Longleftrightarrow \begin{cases} x - y = & 0 \\ -x + y = & 0 \\ z - t = & 0 \\ -z + t = & 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = & y \\ z = & t \end{cases}$$

3- Le vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda = 0$

Soit

$$u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \ker(V) \iff \begin{cases} x - y = & 0 \\ -x + y = & 0 \\ z - t = & 0 \\ -z + t = & 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = & y \\ z = & t \end{cases}$$

$$\implies u = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3- Le vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda = 0$
Soit

$$u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \ker(V) \iff \left\{ \begin{array}{rl} x - y = & 0 \\ -x + y = & 0 \\ z - t = & 0 \\ -z + t = & 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rl} x = & y \\ z = & t \end{array} \right.$$

$$\Longrightarrow u = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ donc } u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et}$$

$$u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3- Le vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda = 0$

Soit

$$u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \ker(V) \Longleftrightarrow \begin{cases} x - y = & 0 \\ -x + y = & 0 \\ z - t = & 0 \\ -z + t = & 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = & y \\ z = & t \end{cases}$$

$$\Longrightarrow u = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ donc } u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et}$$

$$u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

En normalisant les vecteurs $u_1$ et $u_2$ on obtient finalement

$$\|u_1\| = \|u_2\| = \sqrt{2} \Longrightarrow \quad u_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

4-Déterminer des vecteurs propres orthonormés de $V$ associés à $\lambda_2 = 1/2$

Soit $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \ker(V - \frac{1}{2}I)$

4-Déterminer des vecteurs propres orthonormés de $V$ associés à $\lambda_2 = 1/2$

$$\text{Soit } v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \ker(V - \frac{1}{2}I) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{cc} x - y = & 2x \\ -x + y = & 2y \\ z - t = & 2z \\ -z + t = & 2t \end{array} \right.$$

4-Déterminer des vecteurs propres orthonormés de $V$ associés à $\lambda_2 = 1/2$

$$\text{Soit } v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \ker(V - \frac{1}{2}I) \iff \left\{ \begin{array}{rl} x - y = & 2x \\ -x + y = & 2y \\ z - t = & 2z \\ -z + t = & 2t \end{array} \right. \iff$$

$$\left\{ \begin{array}{rl} y = & -x \\ t = & -z \end{array} \right.$$

4-Déterminer des vecteurs propres orthonormés de $V$ associés à $\lambda_2 = 1/2$

$$\text{Soit } v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \ker(V - \frac{1}{2}I) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rl} x - y = & 2x \\ -x + y = & 2y \\ z - t = & 2z \\ -z + t = & 2t \end{array} \right. \Longleftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{rl} y = & -x \\ t = & -z \end{array} \right.$$

$$\Longrightarrow v = x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

4-Déterminer des vecteurs propres orthonormés de $V$ associés à $\lambda_2 = 1/2$

Soit $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \ker(V - \frac{1}{2}I) \iff \left\{ \begin{array}{rl} x - y = & 2x \\ -x + y = & 2y \\ z - t = & 2z \\ -z + t = & 2t \end{array} \right. \iff$

$\left\{ \begin{array}{rl} y = & -x \\ t = & -z \end{array} \right.$

$\implies v = x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ donc $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et

$v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

En normalisant les vecteurs $v_1$ et $v_2$ on obtient finalement

En normalisant les vecteurs $v_1$ et $v_2$ on obtient finalement

$$\|v_1\| = \|v_2\| = \sqrt{2} \Longrightarrow \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

# Exercice 2

Soit X le tableau suivant : $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

On considère les six vecteurs $x_1, x_2, \cdots, x_6$ de $\mathbb{R}^3$(muni de la métrique euclidien usuelle) dont les composantes sont données par les lignes de $X$ . On pose $m_i = 1/6$ pours $i = 1; 2; \cdots, 6$

1- On a $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

1- On a $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

donc $x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $x_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

$x_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $x_5 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $x_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Longrightarrow \overline{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}} = \overline{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}} = \overline{\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} = 0$$

donc :

$$\Longrightarrow \overline{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}} = \overline{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}} = \overline{\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} = 0$$

donc : $G = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Longrightarrow \overline{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}} = \overline{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}} = \overline{\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} = 0$$

donc : $G = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

et $V = 1/6 \sum_{i=1}^{6} x_i x_i' = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

- Le moment d'inertie de N par rapport à l'origine $I_G = tr(V) = 2$,

- Le moment d'inertie de N par rapport à l'origine $I_G = tr(V) = 2$,
- Les différentes valeurs propres de $V$ on a :

$$\det(V - \lambda I) \qquad = \qquad \begin{vmatrix} 2/3-\lambda & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3-\lambda & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3-\lambda \end{vmatrix}.$$

- Le moment d'inertie de N par rapport à l'origine $I_G = tr(V) = 2$,
- Les différentes valeurs propres de $V$ on a :

$$\det(V - \lambda I) \quad = \quad \begin{vmatrix} 2/3-\lambda & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3-\lambda & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3-\lambda \end{vmatrix}.$$

$$\underset{C_1 \leftarrow C_1+C_2+C_3}{=}$$

- Le moment d'inertie de N par rapport à l'origine $I_G = tr(V) = 2$,
- Les différentes valeurs propres de $V$ on a :

$$\det(V - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2/3-\lambda & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3-\lambda & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3-\lambda \end{vmatrix}.$$

$$\overset{C_1 \leftarrow C_1+C_2+C_3}{=} \begin{vmatrix} -\lambda & -1/3 & -1/3 \\ -\lambda & 2/3-\lambda & -1/3 \\ -\lambda & -1/3 & 2/3-\lambda \end{vmatrix}.$$

$$=$$

- Le moment d'inertie de N par rapport à l'origine $I_G = tr(V) = 2$,
- Les différentes valeurs propres de $V$ on a :

$$\det(V - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2/3-\lambda & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3-\lambda & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3-\lambda \end{vmatrix}.$$

$$\overset{C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3}{=} \begin{vmatrix} -\lambda & -1/3 & -1/3 \\ -\lambda & 2/3-\lambda & -1/3 \\ -\lambda & -1/3 & 2/3-\lambda \end{vmatrix}.$$

$$= -\lambda \begin{vmatrix} 1 & -1/3 & -1/3 \\ 1 & 2/3-\lambda & -1/3 \\ 1 & -1/3 & 2/3-\lambda \end{vmatrix}.$$

- Le moment d'inertie de N par rapport à l'origine $I_G = tr(V) = 2$,
- Les différentes valeurs propres de $V$ on a :

$$\det(V - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2/3-\lambda & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3-\lambda & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3-\lambda \end{vmatrix}.$$

$$\overset{C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3}{=} \begin{vmatrix} -\lambda & -1/3 & -1/3 \\ -\lambda & 2/3-\lambda & -1/3 \\ -\lambda & -1/3 & 2/3-\lambda \end{vmatrix}.$$

$$= -\lambda \begin{vmatrix} 1 & -1/3 & -1/3 \\ 1 & 2/3-\lambda & -1/3 \\ 1 & -1/3 & 2/3-\lambda \end{vmatrix}.$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{\overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{=}}$$

- Le moment d'inertie de N par rapport à l'origine $I_G = tr(V) = 2$,
- Les différentes valeurs propres de $V$ on a :

$$\det(V - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2/3-\lambda & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3-\lambda & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3-\lambda \end{vmatrix}.$$

$$\overset{C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3}{=} \begin{vmatrix} -\lambda & -1/3 & -1/3 \\ -\lambda & 2/3-\lambda & -1/3 \\ -\lambda & -1/3 & 2/3-\lambda \end{vmatrix}.$$

$$= -\lambda \begin{vmatrix} 1 & -1/3 & -1/3 \\ 1 & 2/3-\lambda & -1/3 \\ 1 & -1/3 & 2/3-\lambda \end{vmatrix}.$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{\overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{=}} -\lambda \begin{vmatrix} 1 & -1/3 & -1/3 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}.$$

$$=$$

- Le moment d'inertie de N par rapport à l'origine $I_G = tr(V) = 2$,
- Les différentes valeurs propres de $V$ on a :

$$
\begin{aligned}
\det(V - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 2/3-\lambda & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3-\lambda & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3-\lambda \end{vmatrix}. \\
&\overset{C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3}{=} \begin{vmatrix} -\lambda & -1/3 & -1/3 \\ -\lambda & 2/3-\lambda & -1/3 \\ -\lambda & -1/3 & 2/3-\lambda \end{vmatrix}. \\
&= -\lambda \begin{vmatrix} 1 & -1/3 & -1/3 \\ 1 & 2/3-\lambda & -1/3 \\ 1 & -1/3 & 2/3-\lambda \end{vmatrix}. \\
&\underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{\overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{=}} -\lambda \begin{vmatrix} 1 & -1/3 & -1/3 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}. \\
&= -\lambda(1-\lambda)^2
\end{aligned}
$$

Donc $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_1 = 1$

Donc $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_1 = 1$
Comme $V$ admet une valeur propre nulle donc le nuage des individus est contenu dans le plan

Donc $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_1 = 1$

Comme $V$ admet une valeur propre nulle donc le nuage des individus est contenu dans le plan

- Le vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda = 0$

Soit $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker(V) \Longleftrightarrow \begin{cases} 4x - 2y - 2z = & 0 \\ -2x + 4y - 2z = & 0 \\ -2x - 2y + 4z = & 0 \end{cases}$

Donc $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_1 = 1$

Comme $V$ admet une valeur propre nulle donc le nuage des individus est contenu dans le plan

- Le vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda = 0$

Soit $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker(V) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rl} 4x - 2y - 2z = & 0 \\ -2x + 4y - 2z = & 0 \\ -2x - 2y + 4z = & 0 \end{array} \right.$

$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rl} 6x - 6y = & 0 \\ 4z = & 2x + 2y \end{array} \right.$

Donc $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_1 = 1$
Comme $V$ admet une valeur propre nulle donc le nuage des individus est contenu dans le plan
- Le vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda = 0$

$$\text{Soit } u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker(V) \Longleftrightarrow \begin{cases} 4x - 2y - 2z = & 0 \\ -2x + 4y - 2z = & 0 \\ -2x - 2y + 4z = & 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 6x - 6y = & 0 \\ 4z = & 2x + 2y \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y = & x \\ z = & x \end{cases}$$

Donc $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_1 = 1$

Comme $V$ admet une valeur propre nulle donc le nuage des individus est contenu dans le plan

- Le vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda = 0$

$$\text{Soit } u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker(V) \iff \begin{cases} 4x - 2y - 2z = & 0 \\ -2x + 4y - 2z = & 0 \\ -2x - 2y + 4z = & 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 6x - 6y = & 0 \\ 4z = & 2x + 2y \end{cases} \iff \begin{cases} y = & x \\ z = & x \end{cases}$$

$$\implies u = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donc $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_1 = 1$
Comme $V$ admet une valeur propre nulle donc le nuage des individus est contenu dans le plan
- Le vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda = 0$

$$\text{Soit } u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker(V) \iff \begin{cases} 4x - 2y - 2z = & 0 \\ -2x + 4y - 2z = & 0 \\ -2x - 2y + 4z = & 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 6x - 6y = & 0 \\ 4z = & 2x + 2y \end{cases} \iff \begin{cases} y = & x \\ z = & x \end{cases}$$

$$\Longrightarrow u = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ donc } u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Les vecteurs propres orthonormés de $V$ associés au valeur propre $\lambda_2 = 1$ : Soit

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker(V - I)$$

Les vecteurs propres orthonormés de $V$ associés au valeur propre $\lambda_2 = 1$ : Soit

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker(V - I) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} 4x - 2y - 2z = & 6x \\ -2x + 4y - 2z = & 6y \\ -2x - 2y + 4z = & 6z \end{array} \right.$$

Les vecteurs propres orthonormés de $V$ associés au valeur propre $\lambda_2 = 1$ : Soit

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker(V - I) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rl} 4x - 2y - 2z = & 6x \\ -2x + 4y - 2z = & 6y \\ -2x - 2y + 4z = & 6z \end{array} \right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rl} x + y + z = & 0 \\ x + y + z = & 0 \\ x + y + z = & 0 \end{array} \right.$$

Les vecteurs propres orthonormés de $V$ associés au valeur propre $\lambda_2 = 1$ : Soit

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker(V - I) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rl} 4x - 2y - 2z = & 6x \\ -2x + 4y - 2z = & 6y \\ -2x - 2y + 4z = & 6z \end{array} \right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rl} x + y + z = & 0 \\ x + y + z = & 0 \\ x + y + z = & 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rl} z = & -x - y \end{array} \right.$$

Les vecteurs propres orthonormés de $V$ associés au valeur propre $\lambda_2 = 1$ : Soit

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker(V - I) \iff \begin{cases} 4x - 2y - 2z = & 6x \\ -2x + 4y - 2z = & 6y \\ -2x - 2y + 4z = & 6z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + y + z = & 0 \\ x + y + z = & 0 \\ x + y + z = & 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = & -x - y \end{cases}$$

$$\Longrightarrow v = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Les vecteurs propres orthonormés de $V$ associés au valeur propre $\lambda_2 = 1$ : Soit

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker(V - I) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rl} 4x - 2y - 2z = & 6x \\ -2x + 4y - 2z = & 6y \\ -2x - 2y + 4z = & 6z \end{array} \right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rl} x + y + z = & 0 \\ x + y + z = & 0 \\ x + y + z = & 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rl} z = & -x - y \end{array} \right.$$

$$\Longrightarrow v = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

donc $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Soit $W\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé à $\lambda_2 = 1$ orthogonal à $v_1$

Donc $W$ verifie :

Soit $W \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé à $\lambda_2 = 1$ orthogonal à $v_1$

Donc $W$ verifie :

$$\begin{cases} 4\alpha - 2\beta - 2\gamma = & 6\alpha \\ -2\alpha + 4\beta - 2\gamma = & 6\beta \\ -2\alpha - 2\beta + 4\gamma = & 6\gamma \\ et(1 \;\; 0 \;\; -1) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = & 0 \end{cases}$$

Soit $W \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé à $\lambda_2 = 1$ orthogonal à $v_1$

Donc $W$ verifie :

$$\left\{ \begin{array}{rr} 4\alpha - 2\beta - 2\gamma = & 6\alpha \\ -2\alpha + 4\beta - 2\gamma = & 6\beta \\ -2\alpha - 2\beta + 4\gamma = & 6\gamma \\ et(1 \;\; 0 \;\; -1) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = & 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rr} \alpha + \beta + \gamma = & 0 \\ \alpha - \gamma = & 0 \end{array} \right.$$

Soit $W \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé à $\lambda_2 = 1$ orthogonal à $v_1$

Donc $W$ verifie :

$$\left\{\begin{array}{rr} 4\alpha - 2\beta - 2\gamma = & 6\alpha \\ -2\alpha + 4\beta - 2\gamma = & 6\beta \\ -2\alpha - 2\beta + 4\gamma = & 6\gamma \\ et(1 \;\; 0 \;\; -1)\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rr} \alpha + \beta + \gamma = & 0 \\ \alpha - \gamma = & 0 \end{array}\right. \iff$$

$$\left\{\begin{array}{rr} 2\alpha + \beta = & 0 \\ \gamma = & \alpha \end{array}\right.$$

Soit $W\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$ un vecteur propre associé à $\lambda_2 = 1$ orthogonal à $v_1$

Donc $W$ verifie :

$$\left\{\begin{array}{rr} 4\alpha - 2\beta - 2\gamma = & 6\alpha \\ -2\alpha + 4\beta - 2\gamma = & 6\beta \\ -2\alpha - 2\beta + 4\gamma = & 6\gamma \\ et(1 \;\; 0 \; -1)\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix} = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rr} \alpha + \beta + \gamma = & 0 \\ \alpha - \gamma = & 0 \end{array}\right. \iff$$

$$\left\{\begin{array}{rr} 2\alpha + \beta = & 0 \\ \gamma = & \alpha \end{array}\right.$$

D'où : $W\begin{pmatrix}1\\ -2\\ 1\end{pmatrix}$

On a $\|v_1\| = \sqrt{2}$ et $\|w\| = \sqrt{6}$
En normalisant les vecteurs $v_1$ et $W$ on obtient finalement

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \qquad W = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

On a $\|v_1\| = \sqrt{2}$ et $\|w\| = \sqrt{6}$
En normalisant les vecteurs $v_1$ et $W$ on obtient finalement

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \qquad W = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

La représentation graphique dans le plan engendré par $v_1$ et $W$ :
On a la coordonnée de $x_i$ sur $\Delta_{v_1}$ est : $x_i^t.v_1$ donc

On a $\|v_1\| = \sqrt{2}$ et $\|w\| = \sqrt{6}$
En normalisant les vecteurs $v_1$ et $W$ on obtient finalement

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \qquad W = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

La représentation graphique dans le plan engendré par $v_1$ et $W$ :
On a la coordonnée de $x_i$ sur $\Delta_{v_1}$ est : $x_i^t.v_1$ donc

$$x_1^t.v_1 = (1 \;\; 0 \;\; -1) \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = 1/\sqrt{2} + 1/\sqrt{2} = \sqrt{2}$$

On a $\|v_1\| = \sqrt{2}$ et $\|w\| = \sqrt{6}$
En normalisant les vecteurs $v_1$ et $W$ on obtient finalement

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad W = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

La représentation graphique dans le plan engendré par $v_1$ et $W$ :
On a la coordonnée de $x_i$ sur $\Delta_{v_1}$ est : $x_i^t.v_1$ donc

$$x_1^t.v_1 = (1 \;\; 0 \;\; -1) \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = 1/\sqrt{2} + 1/\sqrt{2} = \sqrt{2}$$

$$x_1^t.W = (1 \;\; 0 \;\; -1) \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{pmatrix} = 1/\sqrt{6} - 1/\sqrt{6} = 0$$

D'où

| | $\Delta_{v_1}$ | $\Delta_{v_2}$ |
|---|---|---|
| $x_1$ | $\sqrt{2}$ | $0$ |
| $x_2$ | $\sqrt{2}/2$ | $-\sqrt{6}/2$ |
| $x_3$ | $-\sqrt{2}/2$ | $-\sqrt{6}/2$ |
| $x_4$ | $-\sqrt{2}/2$ | $\sqrt{6}/2$ |
| $x_5$ | $-\sqrt{2}$ | $0$ |
| $x_6$ | $\sqrt{2}/2$ | $\sqrt{6}/2$ |

# Exercice 3

1- On a

| | mathématiques | physique | français | anglais |
|---|---|---|---|---|
| Jean | 6.0 | 6.0 | 5.0 | 5.5 |
| Aline | 8.0 | 8.0 | 8.0 | 8.0 |
| Annie | 6.0 | 7.0 | 11.0 | 9.5 |
| Monique | 14.5 | 14.5 | 15.5 | 15.0 |
| Didier | 14.0 | 14.0 | 12.0 | 12.5 |
| André | 11.0 | 10.0 | 5.5 | 7.0 |
| Pierre | 5.5 | 7.0 | 14.0 | 11.5 |
| Brigitte | 13.0 | 12.5 | 8.5 | 9.5 |
| Evelyne | 9.0 | 9.5 | 12.5 | 12.0 |
| Moyenne | 9.67 | 9.83 | 10.22 | 10.06 |

Donc le centre de gravité est donné par le vecteur :

$$G = \begin{pmatrix} 9.67 \\ 9.83 \\ 10.22 \\ 10.06 \end{pmatrix}.$$

Donc le centre de gravité est donné par le vecteur :

$$G = \begin{pmatrix} 9.67 \\ 9.83 \\ 10.22 \\ 10.06 \end{pmatrix}.$$

2- On soumettre le tableau $Y$ à un ACP.

$$V = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 11.389 & 9.917 & 2.657 & 4.824 \\ 9.917 & 8.944 & 4.120 & 5.481 \\ 2.657 & 4.120 & 12.062 & 9.293 \\ 4.824 & 5.481 & 9.293 & 7.914 \\ \hline \end{array}$$

a- Indiquer la transformation qui permet de passer de la matrice $Y$ à la matrice $X$. On a :

$$Y = \begin{pmatrix} 6.0 & 6.0 & 5.0 & 5.5 \\ 8.0 & 8.0 & 8.0 & 8.0 \\ 6.0 & 7.0 & 11.0 & 9.5 \\ 14.5 & 14.5 & 15.5 & 15.0 \\ 14.0 & 14.0 & 12.0 & 12.5 \\ 11.0 & 10.0 & 5.5 & 7.0 \\ 5.5 & 7.0 & 14.0 & 11.5 \\ 13.0 & 12.5 & 8.5 & 9.5 \\ 9.0 & 9.5 & 12.5 & 12.0 \end{pmatrix}$$

Donc

$$X = \begin{pmatrix} 6.0-9.67 & 6.0-9.83 & 5.0-10.22 & 5.5-10.06 \\ 8.0-9.67 & 8.0-9.83 & 8.0-10.22 & 8.0-10.06 \\ 6.0-9.67 & 7.0-9.83 & 11.0-10.22 & 9.5-10.06 \\ 14.5-9.67 & 14.5-9.83 & 15.5-10.22 & 15.0-10.06 \\ 14.0-9.67 & 14.0-9.83 & 12.0-10.22 & 12.5-10.06 \\ 11.0-9.67 & 10.0-9.83 & 5.5-10.22 & 7.0-10.06 \\ 5.5-9.67 & 7.0-9.83 & 14.0-10.22 & 11.5-10.06 \\ 13.0-9.67 & 12.5-9.83 & 8.5-10.22 & 9.5-10.06 \\ 9.0-9.67 & 9.5-9.83 & 12.5-10.22 & 12.0-10.06 \end{pmatrix}$$

Donc

$$X = \begin{pmatrix} 6.0 - 9.67 & 6.0 - 9.83 & 5.0 - 10.22 & 5.5 - 10.06 \\ 8.0 - 9.67 & 8.0 - 9.83 & 8.0 - 10.22 & 8.0 - 10.06 \\ 6.0 - 9.67 & 7.0 - 9.83 & 11.0 - 10.22 & 9.5 - 10.06 \\ 14.5 - 9.67 & 14.5 - 9.83 & 15.5 - 10.22 & 15.0 - 10.06 \\ 14.0 - 9.67 & 14.0 - 9.83 & 12.0 - 10.22 & 12.5 - 10.06 \\ 11.0 - 9.67 & 10.0 - 9.83 & 5.5 - 10.22 & 7.0 - 10.06 \\ 5.5 - 9.67 & 7.0 - 9.83 & 14.0 - 10.22 & 11.5 - 10.06 \\ 13.0 - 9.67 & 12.5 - 9.83 & 8.5 - 10.22 & 9.5 - 10.06 \\ 9.0 - 9.67 & 9.5 - 9.83 & 12.5 - 10.22 & 12.0 - 10.06 \end{pmatrix}$$

la première ligne de $X$ est : $X_1 \begin{pmatrix} -3.67 & -3.83 & -5.22 & -4.56 \end{pmatrix}$

b- On a

$$V = \begin{pmatrix} 11.389 & 9.917 & 2.657 & 4.824 \\ 9.917 & 8.944 & 4.120 & 5.481 \\ 2.657 & 4.120 & 12.062 & 9.293 \\ 4.824 & 5.481 & 9.293 & 7.914 \end{pmatrix}$$

b- On a

$$V = \begin{pmatrix} 11.389 & 9.917 & 2.657 & 4.824 \\ 9.917 & 8.944 & 4.120 & 5.481 \\ 2.657 & 4.120 & 12.062 & 9.293 \\ 4.824 & 5.481 & 9.293 & 7.914 \end{pmatrix}$$

donc $I_G = tr(V) = 40.30$.

c- Les deux plus grandes valeurs propres de la matrice $V$ des variances-covariances sont $\lambda_1 = 28.253, \lambda_2 = 12.03$ .

b- On a

$$V = \begin{pmatrix} 11.389 & 9.917 & 2.657 & 4.824 \\ 9.917 & 8.944 & 4.120 & 5.481 \\ 2.657 & 4.120 & 12.062 & 9.293 \\ 4.824 & 5.481 & 9.293 & 7.914 \end{pmatrix}$$

donc $I_G = tr(V) = 40.30$.

c- Les deux plus grandes valeurs propres de la matrice $V$ des variances-covariances sont $\lambda_1 = 28.253, \lambda_2 = 12.03$ .

Donc : $cr(I_{\Delta_1/I_G}) = \dfrac{\lambda_1}{I_G} = \dfrac{28.253}{40.30} = 0.7$ et

b- On a

$$V = \begin{pmatrix} 11.389 & 9.917 & 2.657 & 4.824 \\ 9.917 & 8.944 & 4.120 & 5.481 \\ 2.657 & 4.120 & 12.062 & 9.293 \\ 4.824 & 5.481 & 9.293 & 7.914 \end{pmatrix}$$

donc $I_G = tr(V) = 40.30$.

c- Les deux plus grandes valeurs propres de la matrice $V$ des variances-covariances sont $\lambda_1 = 28.253, \lambda_2 = 12.03$ .
Donc : $cr(I_{\Delta_1 / I_G}) = \dfrac{\lambda_1}{I_G} = \dfrac{28.253}{40.30} = 0.7$ et
$cr(I_{\Delta_2 / I_G}) = \dfrac{\lambda_2}{I_G} = \dfrac{12.03}{40.30} = 0.3$
$cr(I_{\Delta_1 \oplus \Delta_2}) = 0.7 + 0.3 = 1 = 100\%$ donc le nuage est pratiquement dan un espace de dimension 2

d- Les deux vecteurs propres normés de $V$ sont donnés dans le tableau ci-dessous :

| | 1 | 2 |
|---|---|---|
| Maths | 0.515 | -0.567 |
| Physique | 0.507 | -0.372 |
| Français | 0.492 | 0.650 |
| Anglais | 0.492 | 0.323 |

On note $a_1 = \begin{pmatrix} 0.515 \\ 0.507 \\ 0.492 \\ 0.485 \end{pmatrix}$ et $a_2 = \begin{pmatrix} -0.567 \\ -0.372 \\ 0.650 \\ 0.323 \end{pmatrix}$

Les coordonnées de " Jean " sur axe $\Delta_1$ sont données par :

Les coordonnées de " Jean " sur axe $\Delta_1$ sont données par :

$X_1.a_1 =$

Les coordonnées de " Jean " sur axe $\Delta_1$ sont données par :

$$X_1.a_1 = (-3.67 \quad -3.83 \quad -5.22 \quad -4.56).\begin{pmatrix} 0.515 \\ 0.507 \\ 0.492 \\ 0.485 \end{pmatrix}$$

Les coordonnées de " Jean " sur axe $\Delta_1$ sont données par :

$$X_1.a_1 = (-3.67 \quad -3.83 \quad -5.22 \quad -4.56).\begin{pmatrix} 0.515 \\ 0.507 \\ 0.492 \\ 0.485 \end{pmatrix}$$

$= -8.61$

De même les coordonnées de " Jean " sur axe $\Delta_2$ sont données par :

$X_1.a_2 =$

Les coordonnées de " Jean " sur axe $\Delta_1$ sont données par :

$$X_1.a_1 = (-3.67 \quad -3.83 \quad -5.22 \quad -4.56).\begin{pmatrix} 0.515 \\ 0.507 \\ 0.492 \\ 0.485 \end{pmatrix}$$

$= -8.61$

De même les coordonnées de " Jean " sur axe $\Delta_2$ sont données par :

$$X_1.a_2 = (-3.67 \quad -3.83 \quad -5.22 \quad -4.56).\begin{pmatrix} -0.567 \\ -0.372 \\ 0.650 \\ 0.323 \end{pmatrix}$$

Les coordonnées de " Jean " sur axe $\Delta_1$ sont données par :

$$X_1.a_1 = (-3.67 \quad -3.83 \quad -5.22 \quad -4.56).\begin{pmatrix} 0.515 \\ 0.507 \\ 0.492 \\ 0.485 \end{pmatrix}$$

$= -8.61$

De même les coordonnées de " Jean " sur axe $\Delta_2$ sont données par :

$$X_1.a_2 = (-3.67 \quad -3.83 \quad -5.22 \quad -4.56).\begin{pmatrix} -0.567 \\ -0.372 \\ 0.650 \\ 0.323 \end{pmatrix}$$

$= -1.41$

4- Les coefficients de corrélation linéaire entre le premier facteur et les 4 variables :

4- Les coefficients de corrélation linéaire entre le premier facteur et les 4 variables :

$$\rho(1,1) = \sqrt{\lambda_1} \times \frac{a_{11}}{\sqrt{V_1}} = \sqrt{28.253} \times \frac{0.515}{3.37} = 0.811$$

4- Les coefficients de corrélation linéaire entre le premier facteur et les 4 variables :

$$\rho(1,1) = \sqrt{\lambda_1} \times \frac{a_{11}}{\sqrt{V_1}} = \sqrt{28.253} \times \frac{0.515}{3.37} = 0.811$$

$$\rho(1,2) = \sqrt{\lambda_1} \times \frac{a_{12}}{\sqrt{V_2}} = \sqrt{28.253} \times \frac{0.507}{2.99} = 0.9$$

4- Les coefficients de corrélation linéaire entre le premier facteur et les 4 variables :

$$\rho(1,1) = \sqrt{\lambda_1} \times \frac{a_{11}}{\sqrt{V_1}} = \sqrt{28.253} \times \frac{0.515}{3.37} = 0.811$$

$$\rho(1,2) = \sqrt{\lambda_1} \times \frac{a_{12}}{\sqrt{V_2}} = \sqrt{28.253} \times \frac{0.507}{2.99} = 0.9$$

$$\rho(1,3) = \sqrt{\lambda_1} \times \frac{a_{13}}{\sqrt{V_2}} = \sqrt{28.253} \times \frac{0.492}{3.47} = 0.75 \quad \cdots$$

4- Les coefficients de corrélation linéaire entre le premier facteur et les 4 variables :

$$\rho(1,1) = \sqrt{\lambda_1} \times \frac{a_{11}}{\sqrt{V_1}} = \sqrt{28.253} \times \frac{0.515}{3.37} = 0.811$$

$$\rho(1,2) = \sqrt{\lambda_1} \times \frac{a_{12}}{\sqrt{V_2}} = \sqrt{28.253} \times \frac{0.507}{2.99} = 0.9$$

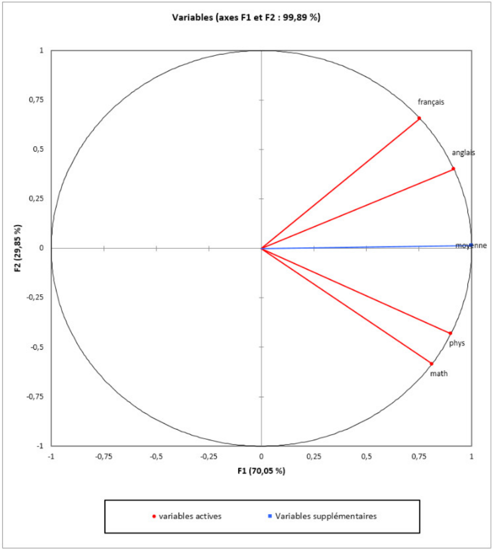
$$\rho(1,3) = \sqrt{\lambda_1} \times \frac{a_{13}}{\sqrt{V_2}} = \sqrt{28.253} \times \frac{0.492}{3.47} = 0.75 \quad \cdots$$

4- Les corrélations entre les variables et les autres facteurs sont données ci-dessous

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| math | 0.81 | -0.584 | 0.01 | -0.02 |
| phys | 0.90 | -0.432 | -0.03 | 0.02 |
| fran | 0.75 | 0.651 | -0.02 | -0.01 |
| ang | 0.92 | 0.399 | 0.04 | 0.02 |

## Interprétation

Ainsi, on voit que le premier facteur est corrélé positivement, et assez fortement, avec chacune des 4 variables initiales : plus un élève obtient de bonnes notes dans chacune des 4 disciplines, plus il a un score élevé sur l'axe 1 ; réciproquement, plus ses notes sont mauvaises, plus son score est négatif ; l'axe 1 représente donc, en quelques sortes, le résultat global (dans l'ensemble des 4 disciplines considérées) des élèves. En ce qui concerne l'axe 2, il oppose, d'une part, le français et l'anglais (corrélations positives), d'autre part, les mathématiques et la physique (corrélations négatives). Il s'agit donc d'un axe d'opposition entre disciplines littéraires et disciplines scientifiques, surtout marqué par l'opposition entre le français et les mathématiques.



Variables (axes F1 et F2 : 99,89 %)
français
anglais
moyenne
phys
math
F1 (70,05 %)
F2 (29,85 %)
1
0,75
0,5
0,25
0
-0,25
-0,5
-0,75
-1
-1
-0,75
-0,5
-0,25
0
0,25
0,5
0,75
1
variables actives
Variables supplémentaires

5- Le tableau suivant donne les coordonnées des individus (les élèves) sur les deux premiers axes (les facteurs)

| | F1 | F2 |
|---|---|---|
| Jean | -8.61 | -1.41 |
| Aline | -3.88 | -0.50 |
| Annie | -3.21 | 3.47 |
| Monique | 9.85 | 0.60 |
| Didier | 6.41 | -2.05 |
| André | -3.03 | -4.92 |
| Pierre | -1.03 | 6.38 |
| Brigitte | 1.95 | -4.20 |
| Evelyne | 1.55 | 2.63 |

$$i - \mathit{Note\_moy} = \begin{pmatrix} -4,3194444 \\ -1,9444444 \\ -1,5694444 \\ 4,93055556 \\ 3,18055556 \\ -1,5694444 \\ -0,4444444 \\ 0,93055556 \\ 0,80555556 \end{pmatrix}.$$

$$i- \ Note\_moy = \begin{pmatrix} -4,3194444 \\ -1,9444444 \\ -1,5694444 \\ 4,93055556 \\ 3,18055556 \\ -1,5694444 \\ -0,4444444 \\ 0,93055556 \\ 0,80555556 \end{pmatrix}.$$

$$ii- \Longrightarrow \rho(Note\_moy, F1) = \frac{14,11138}{5,312961 \times 2,6563} = 0,99989 \simeq 1$$

Ce qui justifier l'assimilation du premier facteur à la moyenne

6- l'indice ponctuel de la représentation de " Jean " sur le premier axe factoriel :

On a la première ligne de $X$ est :

$X_1(-3.67 \quad -3.83 \quad -5.22 \quad -4.56)$

6- l'indice ponctuel de la représentation de " Jean " sur le premier axe factoriel :

On a la première ligne de $X$ est :

$X_1(-3.67 \quad -3.83 \quad -5.22 \quad -4.56)$

Le vecteur directeur unitaire $a_1$ de $\Delta_1$ est : $\begin{pmatrix} 0.515 \\ 0.507 \\ 0.492 \\ 0.485 \end{pmatrix}$

6- l'indice ponctuel de la représentation de " Jean " sur le premier axe factoriel :

On a la première ligne de $X$ est :

$X_1(-3.67 \quad -3.83 \quad -5.22 \quad -4.56)$

Le vecteur directeur unitaire $a_1$ de $\Delta_1$ est : $\begin{pmatrix} 0.515 \\ 0.507 \\ 0.492 \\ 0.485 \end{pmatrix}$

Donc $\quad \cos^2(\alpha_{U_1,\Delta_1}) = \dfrac{(X_1.a_1)^2}{\|X_1\|^2} =$

6- l'indice ponctuel de la représentation de " Jean " sur le premier axe factoriel :

On a la première ligne de $X$ est :

$X_1(-3.67 \quad -3.83 \quad -5.22 \quad -4.56)$

Le vecteur directeur unitaire $a_1$ de $\Delta_1$ est : $\begin{pmatrix} 0.515 \\ 0.507 \\ 0.492 \\ 0.485 \end{pmatrix}$

Donc $\quad \cos^2(\alpha_{U_1,\Delta_1}) = \dfrac{(X_1.a_1)^2}{\|X_1\|^2} = \dfrac{(-8.61)^2}{8.46^2} = 0.97$

( $U_1$ : " Jean " )

De même l'indice ponctuel de la représentation de " Jean " sur le eeuxième axe factoriel :
On a la première ligne de $X$ est :
$X_1(-3.67 \quad -3.83 \quad -5.22 \quad -4.56)$

De même l'indice ponctuel de la représentation de " Jean " sur le eeuxième axe factoriel :
On a la première ligne de $X$ est :
$X_1(-3.67 \quad -3.83 \quad -5.22 \quad -4.56)$

Le vecteur directeur unitaire $a_2$ de $\Delta_2$ est : $\begin{pmatrix} -0.567 \\ -0.372 \\ 0.650 \\ 0.323 \end{pmatrix}$

De même l'indice ponctuel de la représentation de " Jean " sur le eeuxième axe factoriel :
On a la première ligne de $X$ est :
$X_1(-3.67 \quad -3.83 \quad -5.22 \quad -4.56)$

Le vecteur directeur unitaire $a_2$ de $\Delta_2$ est : $\begin{pmatrix} -0.567 \\ -0.372 \\ 0.650 \\ 0.323 \end{pmatrix}$

Donc $\quad \cos^2(\alpha_{U_1,\Delta_2}) = \dfrac{(X_1.a_2)^2}{\|X_1\|^2} =$

De même l'indice ponctuel de la représentation de " Jean " sur le eeuxième axe factoriel :
On a la première ligne de $X$ est :
$X_1(-3.67 \quad -3.83 \quad -5.22 \quad -4.56)$

Le vecteur directeur unitaire $a_2$ de $\Delta_2$ est : $\begin{pmatrix} -0.567 \\ -0.372 \\ 0.650 \\ 0.323 \end{pmatrix}$

Donc $\quad \cos^2(\alpha_{U_1,\Delta_2}) = \dfrac{(X_1.a_2)^2}{\|X_1\|^2} = \dfrac{(-1.41)^2}{8.46^2} = 0.026$

De même l'indice ponctuel de la représentation de " Jean " sur le eeuxième axe factoriel :
On a la première ligne de $X$ est :
$X_1(-3.67 \quad -3.83 \quad -5.22 \quad -4.56)$

Le vecteur directeur unitaire $a_2$ de $\Delta_2$ est : $\begin{pmatrix} -0.567 \\ -0.372 \\ 0.650 \\ 0.323 \end{pmatrix}$

Donc $\quad \cos^2(\alpha_{U_1,\Delta_2}) = \dfrac{(X_1.a_2)^2}{\|X_1\|^2} = \dfrac{(-1.41)^2}{8.46^2} = 0.026$L'indice ponctuel de la représentation de " Jean " sur le plan des deux premiers facteurs :

$$\cos^2(\alpha_{U_1,\Delta_1 \bigoplus \Delta_2})$$

De même l'indice ponctuel de la représentation de " Jean " sur le eeuxième axe factoriel :
On a la première ligne de $X$ est :
$X_1(-3.67 \quad -3.83 \quad -5.22 \quad -4.56)$

Le vecteur directeur unitaire $a_2$ de $\Delta_2$ est : $\begin{pmatrix} -0.567 \\ -0.372 \\ 0.650 \\ 0.323 \end{pmatrix}$

Donc $\quad \cos^2(\alpha_{U_1,\Delta_2}) = \dfrac{(X_1.a_2)^2}{\|X_1\|^2} = \dfrac{(-1.41)^2}{8.46^2} = 0.026$L'indice ponctuel de la représentation de " Jean " sur le plan des deux premiers facteurs :

$$\cos^2(\alpha_{U_1,\Delta_1 \bigoplus \Delta_2}) = \cos^2(\alpha_{U_1,\Delta_1}) + \cos^2(\alpha_{U_1,\Delta_2})$$

De même l'indice ponctuel de la représentation de " Jean " sur le eeuxième axe factoriel :
On a la première ligne de $X$ est :
$X_1(-3.67 \quad -3.83 \quad -5.22 \quad -4.56)$

Le vecteur directeur unitaire $a_2$ de $\Delta_2$ est : $\begin{pmatrix} -0.567 \\ -0.372 \\ 0.650 \\ 0.323 \end{pmatrix}$

Donc $\cos^2(\alpha_{U_1,\Delta_2}) = \dfrac{(X_1.a_2)^2}{\|X_1\|^2} = \dfrac{(-1.41)^2}{8.46^2} = 0.026$L'indice ponctuel de la représentation de " Jean " sur le plan des deux premiers facteurs :

$$\cos^2(\alpha_{U_1,\Delta_1 \bigoplus \Delta_2}) = \cos^2(\alpha_{U_1,\Delta_1}) + \cos^2(\alpha_{U_1,\Delta_2}) = 0.999$$

On a $\cos^2(\alpha_{U_1,\Delta_1 \bigoplus \Delta_2}) \simeq 1$

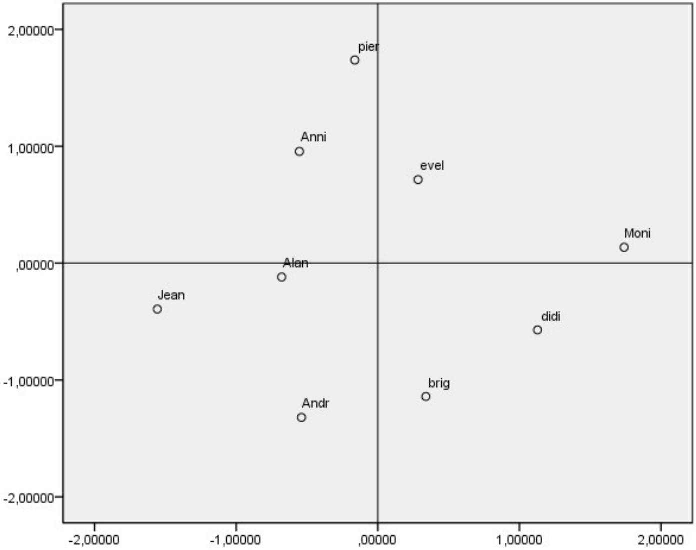
De même l'indice ponctuel de la représentation de " Jean " sur le eeuxième axe factoriel :
On a la première ligne de $X$ est :
$X_1(-3.67 \quad -3.83 \quad -5.22 \quad -4.56)$

Le vecteur directeur unitaire $a_2$ de $\Delta_2$ est : $\begin{pmatrix} -0.567 \\ -0.372 \\ 0.650 \\ 0.323 \end{pmatrix}$

Donc $\quad \cos^2(\alpha_{U_1,\Delta_2}) = \dfrac{(X_1.a_2)^2}{\|X_1\|^2} = \dfrac{(-1.41)^2}{8.46^2} = 0.026$L'indice ponctuel de la représentation de " Jean " sur le plan des deux premiers facteurs :

$$\cos^2(\alpha_{U_1,\Delta_1 \bigoplus \Delta_2}) = \cos^2(\alpha_{U_1,\Delta_1}) + \cos^2(\alpha_{U_1,\Delta_2}) = 0.999$$

On a $\cos^2(\alpha_{U_1,\Delta_1 \bigoplus \Delta_2}) \simeq 1$donc " Jean " est bien représenté dans le plan des deux premiers axes.


2,00000
1,00000
,00000
-1,00000
-2,00000
-2,00000
-1,00000
,00000
1,00000
2,00000
pier
Anni
evel
Moni
Alan
Jean
didi
brig
Andr