UNIVERSITE MOHAMMED PREMIER
ECOLE NATIONALE DES SCIENCES APPLIQUEES
OUJDA-MAROC

Filière : STPI-CP2 | Année universitaire : 2019 - 2020
Module : Analyse IV | Enseignant : M. Derouich

Fiche TD $N°$: 4

Exercice 1. :
Calculer les intégrales suivantes :

1) $\int\int_\Delta xye^{-x^2+y}dxdy;\quad \Delta=[0,1]\times[1,2]$.

2) $\int\int\int_\Delta xyzdxdydz;\quad \Delta=\{(x,y,z)\,/\,x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0,\ x+y+z\leq 1\}$.

3) $\int\int_\Delta (x+2y)^2\,dxdy$ $\quad\Delta$ est le compact délimité par le triangle de sommets $A(0,0)$, $B(1,1)$ et $C(2,-1)$.

Exercice 2. :
Calculer $\int\int_K (x-y)\,dxdy$ où K est le compact plan délimité par les droites d'é quations

$$x=0,\ y=x+2,\ y=-x.$$

Exercice 3. :
Déterminer l'aire du compact plan délimité par les courbes d'équation,

$$y=x,\ \ y^2=x.$$

Exercice 4. :
Calculer les intégrales suivantes :

1) $\int\int_\Delta \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}dxdy;\quad \Delta=\left\{(x,y)\,/\,\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leq 1,\ a>0,\ b>0\right\}$.

2) $\int\int_\Delta \frac{dxdy}{\sqrt[4]{x}\sqrt{y}};\quad \Delta=\left\{(x,y)\,/\,0<x\leq 1,\ 1\leq y\leq \frac{1}{x}\right\}$.
Poser $x=u$, $y=\frac{v}{u}$.

3) $\int\int_\Delta \frac{x-y}{x^2+y^2}dxdy;\quad \Delta=\{(x,y)\,/\,y\geq 0,\ x^2+y^2-x\geq 0,\ x^2+y^2-2x\leq 0\}$.

4) $\int\int_\Delta (x+y)^2 e^{x^2-y^2}dxdy;\quad \Delta=\{(x,y)\,/\,x\geq 0,\ y\geq 0,\ x+y\leq 1\}$.

Exercice 5. :
Calculer l'aire du compact Δ délimité par les droites d'équation $y=ax$ et $y=\frac{1}{a}x$,
et par les hyperboles d'équation $y=\frac{b}{x}$ et $y=\frac{1}{bx}$.

Exercice 6. :
Calculer le volume du solide S défini par :

$$S=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/\ x^2+y^2\leq 1;\ x^2+y^2\leq z\leq 4-3\left(x^2+y^2\right)\right\}.$$

Exercice 7. :

Calculer les intégrales suivantes :

1) $\int\int\int_{\Delta} xyz dxdydz;\qquad \Delta = \left\{(x,y,z)\,/\,x \geq 0,\ y \geq 0,\ 0 \leq z \leq 1,\ x^2+y^2 \leq z^2\right\}.$

2) $\int\int\int_{\Delta} \dfrac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}};\quad \Delta = \left\{\begin{array}{l} (x,y,z)\,/\,x \geq 0, y \geq 0, 0 \leq z \leq 1, \\ R_1^2 \leq x^2+y^2+z^2 \leq R_2^2,\ 0 \leq R_1 < R_2 \end{array}\right\}.$

Exercice 8. :

On se propose de calculer l'intégrale généralisée $I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$.

1) Montrer que I est convergente.

2) Soit $r > 0$. On note C_r le carré de centre 0 et de côté $2r$ et D_r le disque de centre 0 et de rayon r.

a) Montrer que,

$$\int\int_{D_r} e^{-x^2-y^2} dxdy \leq \int\int_{C_r} e^{-x^2-y^2} dxdy \leq \int\int_{D_{r\sqrt{2}}} e^{-x^2-y^2} dxdy.$$

b) Calculer

$$\int\int_{D_r} e^{-x^2-y^2} dxdy.$$

3) Déduire des questions précédentes la valeur des intégrales I et

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Corrigé

Exercice 1. Calculer les intégrales suivantes :

1) $\int\int_\Delta xye^{-x^2+y}dxdy; \quad \Delta = [0,1]\times[1,2]$.

2) $\int\int\int_\Delta xyzdxdydz; \quad \Delta = \{(x,y,z)\,/\,x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0,\ x+y+z\leq 1\}$.

3) $\int\int_\Delta (x+2y)^2\,dxdy$ — Δ est le compact délimité par le triangle de sommets $A(0,0)$, $B(1,1)$ et $C(2,-1)$.

Corrigé

1) $\int\int_\Delta xye^{-x^2+y}dxdy = \left(\int_0^1 xe^{-x^2}dx\right)\left(\int_1^2 ye^y dy\right) = \dfrac{e(e-1)}{2}$.

2) $\int\int\int_\Delta xyzdxdydz$. On met Δ sous forme hiérarchique

$$\Delta = \Big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/0\leq z\leq 1; 0\leq y\leq 1-z; 0\leq x\leq 1-y-z\Big\}.$$

D'où,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 z\left[\int_0^{1-z} y\left(\int_0^{1-y-z} xdx\right)dy\right]dz &= \int_0^1 z\left[\int_0^{1-z} y\left(\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{1-y-z}\right)dy\right]dz\\
&= \int_0^1 z\left[\int_0^{1-z} y\left(\frac{(1-y-z)^2}{2}\right)dy\right]dz\\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 z\left[\int_0^{1-z} y\left(y^2-2y(1-z)+(1-z)^2\right)dy\right]dz\\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 z\left[\int_0^{1-z}\left(y^3-2y^2(1-z)+y(1-z)^2\right)dy\right]dz\\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 z\left[\frac{y^4}{4}-2\frac{y^3}{3}(1-z)+\frac{y^2}{2}(1-z)^2\right]_0^{1-z}dz\\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 z\left[\frac{(1-z)^4}{4}-2\frac{(1-z)^4}{3}+\frac{(1-z)^4}{2}\right]dz\\
&= \frac{1}{24}\int_0^1 z(1-z)^4dz\\
&= 0+\frac{1}{120}\int_0^1(1-z)^5dz \quad \text{(intégration par parties)}\\
&= \frac{1}{720}.
\end{aligned}$$

3)

• La droite AB a pour équation $y = x$,

• La droite BC a pour équation $y = -2x + 3$,

• La droite AC a pour équation $y = -\dfrac{x}{2}$.

Nous partageons notre domaine Δ en deux domaines Δ_1 et Δ_2. Doù,

$$\begin{aligned}
I &= \int_{x=0}^{x=1} \left(\int_{y=\frac{-x}{2}}^{y=x} (x+2y)^2 \, dy \right) dx + \int_{x=0}^{x=1} \left(\int_{y=\frac{-x}{2}}^{y=2x+3} (x+2y)^2 \, dy \right) dx \\
&= \frac{9}{2} \left[\int_{x=0}^{x=1} x^3 dx - \int_{x=1}^{x=2} (x-2)^3 \, dx \right] \\
&= \frac{9}{4}
\end{aligned}$$

Exercice 2. Calculer $\int\int_K (x-y)\, dxdy$ où K est le compact plan délimité par les droites d'équations

$$x = 0, \; y = x + 2, \; y = -x.$$

Corrigé

Une description hiérarchique du compact K est

$$K = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \in [-1, 0], y \in [-x, x+2] \right\}.$$

D'où,

$$\begin{aligned}
\int\int_K (x-y) dxdy &= \int_{-1}^{0} \left[\int_{-x}^{x+2} (x-y)\, dy \right] dx \\
&= \int_{-1}^{0} \left[xy - \frac{y^2}{2} \right]_{-x}^{x+2} dx \\
&= 2 \int_{-1}^{0} \left(x^2 - 1 \right) dx = -\frac{4}{3}.
\end{aligned}$$

Exercice 3. Déterminer l'aire du compact plan délimité par les courbes d'équation,

$$y = x, \;\; y^2 = x.$$

Corrigé

Une description hiérarchique du compact K est

$$K=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/x\in[0,1],y\in\left[x,\sqrt{x}\right]\right\}.$$

D'où,

$$\begin{aligned}\text{Aire}(K) &= \int\int_K dxdy=\int_0^1\left(\int_x^{\sqrt{x}}dy\right)dx\\ &= \int_0^1\left(\sqrt{x}-x\right)dx=\frac{1}{6}.\end{aligned}$$

Exercice 4. Calculer les intégrales suivantes :

1) $\int\int_\Delta\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}dxdy;\quad \Delta=\left\{(x,y)\,/\,\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1,\ a>0,\ b>0\right\}.$

2) $\int\int_\Delta\frac{dxdy}{\sqrt[4]{x}\sqrt{y}};\quad \Delta=\left\{(x,y)\,/\,0<x\le 1,\ 1\le y\le\frac{1}{x}\right\}.$
Poser $x=u,\ y=\frac{v}{u}$.

3) $\int\int_\Delta\frac{x-y}{x^2+y^2}dxdy;\quad \Delta=\left\{(x,y)\,/\,y\ge 0,\ x^2+y^2-x\ge 0,\ x^2+y^2-2x\le 0\right\}.$

4) $\int\int_\Delta(x+y)^2e^{x^2-y^2}dxdy;\quad \Delta=\left\{(x,y)\,/\,x\ge 0,\ y\ge 0,\ x+y\le 1\right\}.$

Corrigé

1) Faisons le changement de variable en coordonnées elliptique

$$\begin{cases} x=ar\cos\theta\\ y=br\sin\theta,\theta\in[0,2\pi],r\in[0,1].\end{cases}$$

Ce changement de variable transforme Δ au compact plan K défini par :

$$K=\left\{(r,\theta)\in\mathbb{R}^2/\theta\in[0,2\pi],r\in[0,1]\right\}.$$

Le jacobien de cette transfoemation est abr. D'où,

$$\begin{aligned}\int\int_\Delta\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}dxdy &= ab\int\int_K r\sqrt{1-r^2}drd\theta\\ &= ab\int_{r=0}^{r=1}r\sqrt{1-r^2}dr\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}d\theta\\ &= \frac{2\pi ab}{3}\left[\left(1-r^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_{r=0}^{r=1}=\frac{2\pi ab}{3}.\end{aligned}$$

2) Posons
$$\begin{cases} x = u \\ y = \dfrac{v}{u}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = x \\ v = xy. \end{cases}$$
Ce changement de variable transforme le domaine Δ au domaine plan D défini par :
$$K = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 / 0 < u \leq 1;\ u < v \leq 1\right\}.$$
La matrice jacobienne est donnée par :
$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{v}{u^2} & \dfrac{1}{u} \end{pmatrix},$$
Le Iacobien est donc $\dfrac{1}{u}$. D'où,
$$\begin{aligned} \int\int_\Delta \frac{dxdy}{\sqrt[4]{x}\sqrt{y}} &= \int\int_D \frac{dudv}{u^{\frac{3}{4}} v^{\frac{1}{2}}} = \left(\int_{u=0}^{u=1} \frac{du}{u^{\frac{3}{4}}}\right)\left(\int_{v=u}^{v=1} \frac{dv}{v^{\frac{1}{2}}}\right) \\ &= \int_{u=0}^{u=1} u^{-\frac{-3}{4}} \left[2v^{\frac{1}{2}}\right]_{v=u}^{v=1} du = \int_{u=0}^{u=1} u^{-\frac{-3}{4}} \left(2 - 2u^{\frac{1}{2}}\right) du \\ &= 2\int_{u=0}^{u=1} \left(u^{-\frac{-3}{4}} - u^{\frac{-1}{4}}\right) du = 2\left[4u^{\frac{1}{4}} - \frac{4}{3}u^{\frac{3}{4}}\right]_0^1 = \frac{16}{3}. \end{aligned}$$

3) Faisons le changement en coordonnées polaires
$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta. \end{cases}$$
Cherchons les bornes de r et θ.

On a $y \geq 0 \Rightarrow \sin(\theta) \geq 0$ et $x^2 + y^2 - 2x \leq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 \leq 2x \Rightarrow x \geq 0 \Rightarrow \cos(\theta) \geq 0$
Donc $\sin(\theta) \geq 0$ et $\cos(\theta) \geq 0 \Longrightarrow \theta \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$
Les inéquations
$$x^2 + y^2 - x \geq 0,\ x^2 + y^2 - 2x \leq 0,$$
sont équivalentes à
$$r - \cos\theta \geq 0 \text{ et } r - 2\cos\theta \leq 0.$$
Donc, le compact Δ est transformé au compact plan
$$K = \left\{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 / \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],\ r \in [\cos\theta, 2\cos\theta]\right\}.$$
La matrice jacobienne en r et θ est donc donnée par :
$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}.$$

La valeur absolue du jacobien est r. Donc

$$\begin{aligned}
\int\int_{\Delta} \frac{x-y}{x^2+y^2} dxdy &= \int\int_K (\cos\theta - \sin\theta)\, drd\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[(\cos\theta - \sin\theta) \left(\int_{r=\cos\theta}^{r=2\cos\theta} dr \right) \right] d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos^2\theta - \sin\theta\cos\theta \right) d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1+\cos 2\theta}{2} - \frac{1}{2}\sin 2\theta \right) d\theta \\
&= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

4) Posons

$$\begin{cases} u = x+y \\ v = x-y, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{u+v}{2} \\ y = \dfrac{u-v}{2}. \end{cases}$$

Le changement de variable transforme le compact Δ au compact plan K défini par :

$$K = \left\{ (u,v) \in \mathbb{R}^2 / u \in [0,1]\,,\ v \in [-u,u] \right\}.$$

La matrice jacobienne en u et v est donc donnée par :

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

La valeur absolue du jacobien est $\frac{1}{2}$. Donc

$$\begin{aligned}
\int\int_{\Delta} (x+y)^2 e^{x^2-y^2} dxdy &= \frac{1}{2} \int\int_K u^2 e^{uv} dudv \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 u^2 \left(\int_{v=-u}^{v=u} e^{uv} dv \right) du \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 u \left(e^{u^2} - e^{-u^2} \right) = \frac{1}{4} \left[e^{u^2} + e^{-u^2} \right]_0^1 \\
&= \frac{1}{2} \left(e + e^{-1} - 1 \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(ch(1) - 1 \right).
\end{aligned}$$

Exercice 5. Calculer l'aire du compact Δ délimité par les droites d'équation $y = ax$ et $y = \frac{1}{a}x$, et par les hyperboles d'équation $y = \frac{b}{x}$ et $y = \frac{1}{bx}$.

Corrigé

Nous avons

$$(x,y) \in \Delta \Leftrightarrow \frac{1}{b} \leq xy \leq b \text{ et } \frac{1}{a} \leq \frac{y}{x} \leq a.$$

Posons

$$u = xy \text{ et } v = \frac{y}{x}.$$

D'où,

$$(x,y) \in \Delta \Leftrightarrow (u,v) \in \left[\frac{1}{b}, b\right] \times \left[\frac{1}{a}, a\right].$$

On a

$$x = \sqrt{\frac{u}{v}} \text{ et } y = \sqrt{uv}.$$

la matrice jacobienne en u et v est donc donnée par :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{uv}} & -\frac{\sqrt{u}}{2v\sqrt{v}} \\ \frac{\sqrt{v}}{2\sqrt{u}} & \frac{\sqrt{u}}{2\sqrt{v}} \end{pmatrix}.$$

La valeur absolue du jacobien est $\frac{1}{2v}$. Donc l'aire de Δ est

$$Aire\ (\Delta) = \int_{u=\frac{1}{b}}^{b} \int_{v=\frac{1}{a}}^{a} \frac{dudv}{2v} = \left(b - \frac{1}{b}\right)\ln(a).$$

Exercice 6. Calculer le volume du solide S défini par :

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \ x^2 + y^2 \leq 1;\ x^2 + y^2 \leq z \leq 4 - 3\left(x^2 + y^2\right)\right\}.$$

Corrigé

Méthode 1 :
Le volume V du solide S est défini par :

$$\begin{aligned} V &= \int\int\int_S dxdydz = \int_{-1}^{1}\left(\left[\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\left(\int_{(x^2+y^2)}^{4-3(x^2+y^2)} dz\right)\right] dy\right) dx \\ &= 4\int_{-1}^{1}\left(\left[\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\left(1 - \left(x^2+y^2\right)\right)\right] dy\right) dx = 4\int\int_{x^2+y^2\leq 1}\left(1 - \left(x^2+y^2\right)\right) dxdy. \end{aligned}$$

Le passage en coordonnées polaires donne

$$V = 4\int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(1 - r^2\right) rdrd\theta = 4\left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\int_0^1 r\left(1 - r^2\right) dr = 2\pi.$$

Méthode 2 :
Faisons le changement de variable en coordonnées cylindriques

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z. \end{cases}$$

Le changement de variable transforme le compact S au compact K défini par :

$$K = \left\{(r,\theta,z) \in \mathbb{R}^3 / r \in [0,1]\,,\ \theta \in [0,2\pi]\,,\ z \in \left[r^2, 4-3r^2\right]\right\}.$$

La matrice jacobienne en r, θ et z est donc donnée par :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La valeur absolue du jacobien est r.
Donc le volume V du solide S est défini par :

$$\begin{aligned} V &= \int\int\int_S dxdydz = \int_0^1 \left(\left[\int_0^{2\pi} \left(\int_{r^2}^{4-3r^2} rdz\right)\right] d\theta\right) dr \\ &= 2\pi \int_0^1 \left(r\,[z]_{r^2}^{4-3r^2}\right) dr \\ &= 2\pi \int_0^1 \left(4r - 4r^3\right) dr \\ &= 2\pi \left[2r^2 - r^4\right]_0^1 dr \\ &= 2\pi \end{aligned}$$

Exercice 7. Calculer les intégrales suivantes :

1) $\int\int\int_\Delta xyzdxdydz;$ $\qquad \Delta = \left\{(x,y,z)\ /\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ 0 \leq z \leq 1,\ x^2+y^2 \leq z^2\right\}.$

2) $\int\int\int_\Delta \dfrac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}};$ $\quad \Delta = \left\{ \begin{array}{l} (x,y,z)\ /\ x \geq 0, y \geq 0, 0 \leq z \leq 1, \\ R_1^2 \leq x^2+y^2+z^2 \leq R_2^2,\ 0 \leq R_1 < R_2 \end{array} \right\}.$

Corrigé

1) Faisons le changement de variable en coordonnées cylindriques

$$\left\{ \begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z. \end{array} \right.$$

Le changement de variable transforme le compact Δ au compact K défini par :

$$K = \left\{(r,\theta,z) \in \mathbb{R}^3 / r \in [0,z]\,,\ \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\,,\ z \in [0,1]\right\}.$$

La matrice jacobienne en r, θ et z est donc donnée par :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La valeur absolue du jacobien est r. Donc

$$\begin{aligned}
\int\int\int_{\Delta} xyzdxdydz &= \int\int\int_{K} zr^3\cos\theta\sin\theta drd\theta dz \\
&= \frac{1}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\theta\right)\left[\int_0^1 z\left(\int_0^z r^3dr\right)dz\right] \\
&= \frac{1}{16}\left([-\cos 2\theta]_0^{\frac{\pi}{2}}\right)\left[\frac{z^6}{5}\right]_0^1 = \frac{1}{48}.
\end{aligned}$$

2) Faisons le changement de variable en coordonnées sphériques

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\phi \\ y = r\sin\theta\sin\phi \\ z = r\cos\theta. \end{cases}$$

Le changement de variable en coordonnées sphériques transforme le compact Δ en compact K de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$K = \left\{(r,\theta,\phi) \in \mathbb{R}^3 / r \in [R_1, R_2]\,,\ \theta \in [0,\pi/2]\,,\ \phi \in [0,\pi/2]\right\}.$$

L'application φ définie par :

$$(x,y,z) = \varphi\,(r,\theta,\phi)\,,$$

est un difféomorphisme de $\overset{o}{K}$ sur $\overset{o}{\Delta}$. Donc,

$$\begin{aligned}
\int\int\int_{\Delta}\frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} &= \int\int\int_{K} r\sin\theta drd\theta d\phi \\
&= \left(\int_{R_1}^{R_2} rdr\right)\left(\int_0^{\pi/2}\sin\theta d\theta\right)\left(\int_0^{\pi/2} d\phi\right) \\
&= \frac{\pi}{2}\left(R_2^2 - R_1^2\right).
\end{aligned}$$

Exercice 8. On se propose de calculer l'intégrale généralisée $I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx$.

1) Montrer que I est convergente.

2) Soit $r > 0$. On note C_r le carré de centre 0 et de côté $2r$ et D_r le disque de centre 0 et de rayon r.

a) Montrer que,

$$\int\int_{D_r} e^{-x^2-y^2}dxdy \leq \int\int_{C_r} e^{-x^2-y^2}dxdy \leq \int\int_{D_{r\sqrt{2}}} e^{-x^2-y^2}dxdy.$$

b) Calculer

$$\int\int_{D_r} e^{-x^2-y^2}dxdy.$$

3) Déduire des questions précédentes la valeur des intégrales I et $J = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx$.

Corrigé

1) La fonction $x \longmapsto e^{-x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$. Donc, localement intégrable sur $\mathbb{R}$. Au voisinage de $\pm\infty$, nous avons

$$e^{-x^2} = o(\frac{1}{x^2}).$$

Donc, l'intégrale est convergente.

2)

a) Puisque

$$D_r \subset C_r \subset D_{r\sqrt{2}},$$

et f est positive sur $\mathbb{R}$, alors on a

$$\int_{D_r} e^{-x^2-y^2} dxdy \leq \int_{C_r} e^{-x^2-y^2} dxdy \leq \int_{D_{r\sqrt{2}}} e^{-x^2-y^2} dxdy.$$

On a,

$$\int_{C_r} e^{-x^2-y^2} dxdy = \int_{x=-r}^{x=r} \int_{y=-r}^{y=r} e^{-x^2-y^2} dxdy = \left(\int_{x=-r}^{x=r} e^{-x^2} dx \right)^2.$$

b) En faisant le changement de variable en coordonnées polaires, $x = R\cos\theta$, $y = R\sin\theta$, $R \in [0, r]$, $\theta \in [0, 2\pi]$, on obtient

$$\int_{D_r} e^{-x^2-y^2} dxdy = \int_{R=0}^{R=r} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} e^{-R^2} R dR d\theta = \pi \left(1 - e^{-r^2}\right).$$

3) Des questions a) et b), on obtient,

$$\pi \left(1 - e^{-r^2}\right) \leq \left(\int_{x=-r}^{x=r} e^{-x^2} dx \right)^2 \leq \pi \left(1 - e^{-2r^2}\right).$$

En faisant tendre r vers $+\infty$, on déduit que

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \right)^2 = \pi.$$

Le changement de variable $x = \dfrac{y}{\sqrt{2}}$ donne

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \right)^2 = \pi.$$

Donc,

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \sqrt{\pi}.$$