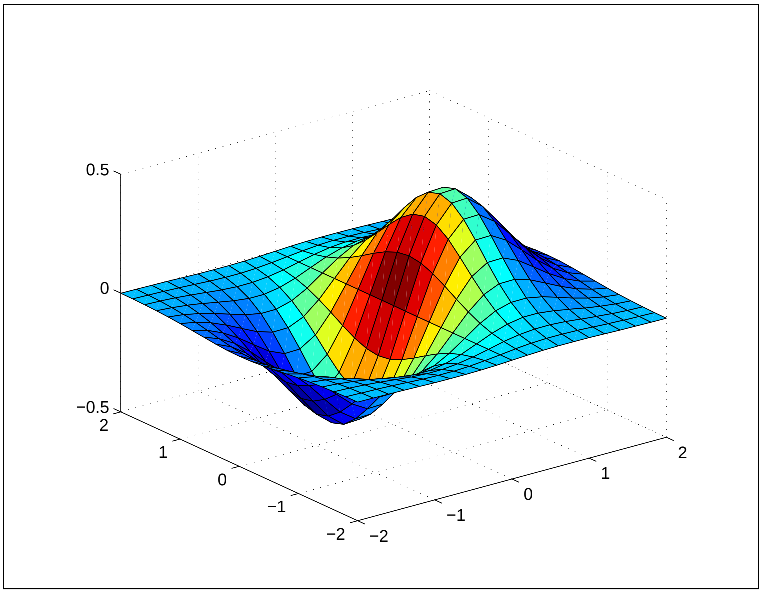
UNIVERSITE MOHAMMED PREMIER
ECOLE NATIONALE DES SCIENCES APPLIQUEES
OUJDA-MAROC

ANALYSE IV : EXERCICES

STPI-CP2



Année universitaire : 2016 - 2017

Table des matières

Chapitre 1

L'ESPACE $\mathbb{R}^p$:PROPRIETES METRIQUES ET TOPOLOGIQUES de $\mathbb{R}^n$

Exercice 1.1 *Les fonctions suivantes sont-elles des distances sur* $\mathbb{R}$*?*

$$d_1(x,y) = (x-y)^2\ ;\ \ d_2(x,y) = \sqrt{|y-x|};\ \ d_3(x,y) = |y^3 - x^3|\ ;$$
$$d_4(x,y) = |y^2 - x^2|\ ;\ \ d_5(x,y) = |y-2x|\ .$$

Exercice 1.2 (Normes sur $\mathbb{R}^p$.)

1. *Montrer les applications* $\mathbf{N}_1$, $\mathbf{N}_2$ *et* $\mathbf{N}_\infty$ *définies sur* $\mathbb{R}^p$ *par :*

$$\begin{aligned}
\mathbf{N}_1(x) &= \sum_{k=1}^{p} |x_k|\ ,\\
\mathbf{N}_2(x) &= \sqrt{\sum_{k=1}^{p} |x_k|^2} \quad \textit{(norme euclidienne)},\\
\mathbf{N}_\infty(x) &= \sup_{k=1,\ldots,p} |x_k| \quad \textit{(norme sup)}.
\end{aligned}$$

   sont des normes sur $\mathbb{R}^p$.

2. *Montrer que les trois normes* $\mathbf{N}_1$, $\mathbf{N}_2$ *et* $\mathbf{N}_\infty$ *définies sur* $\mathbb{R}^p$ *sont équivalentes et on a*

$$\forall x \in \mathbb{R}^p, \quad \mathbf{N}_\infty(x) \leq \mathbf{N}_1(x) \leq \sqrt{p}\mathbf{N}_2(x) \leq p\mathbf{N}_\infty(x)\ .$$

Exercice 1.3 *Soit* Φ *une fonction numérique définie sur* $\mathbb{R}^+$, *strictement croissante, vérifiant* $\Phi(0) = 0$ *et qui est sous-additive ie.,* $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^+)^2$,

$$\Phi(x+y) \leq \Phi(x) + \Phi(y)\ .$$

1) Montrer que si d est une distance sur un ensemble E, $d_* = \Phi o d$ en est aussi une.

2) Montrer que si d est une distance sur E,

$$d_1 = \frac{d}{1+d}; \quad d_2 = \ln(1+d),$$

sont des distances sur E.

Exercice 1.4 *Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction strictement croissante. On définit d de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^+$ par :*

$$d(x,y) = |f(y) - f(x)|,$$

1) Montrer que d est une distance sur $\mathbb{R}$.

2) On prend $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$; la distance d correspondante est-elle équivalente à la distance d_1 définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $d_1(x,y) = |y - x|$?

Exercice 1.5 *Soit d la distance usuelle sur $\mathbb{R}$ définie par : $d(x,y) = |y - x|$ et d_1 l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $d_1(x,y) = |\arctan(y) - \arctan(x)|$.*

1) Montrer que d_1 est une distance sur $\mathbb{R}$. $\mathbb{R}$ est-il borné pour la distance d_1?

2) Décrire et représenter la boule ouverte $B(0,1)$ relativement à d_1.

3) Les distances d et d_1 sont-elles équivalentes ?

Exercice 1.6 *Soit a et b deux réels strictement positifs. On pose*

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \ \mathbf{N}(x,y) = \sqrt{a^2x^2 + b^2y^2}.$$

On rappelle que la norme $\mathbf{N}_2$ est définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $\mathbf{N}_2(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

1) Prouver que $\mathbf{N}$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$. Que peut-on dire des normes $\mathbf{N}$ et $\mathbf{N}_2$?

2) Déterminer et dessiner la boule fermée de centre 0 et de rayon 1 pour les deux normes $\mathbf{N}$ et $\mathbf{N}_2$.

3) Déterminer p et q tel que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \ p\ \mathbf{N}_2(x,y) \leq \mathbf{N}(x,y) \leq q\ \mathbf{N}_2(x,y).$$

Exercice 1.7 *Soit* $\mathbb{R}^n$ *muni d'une norme* $\| \, . \, \|$.

1) Montrer que pour tous x, y *éléments de* $\mathbb{R}^n$, *on a*

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\| \, .$$

2) Si $x \neq 0$ *et* $y \neq 0$, *montrer que*

$$\|x\| \left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\| \leq 2 \|x - y\| \, ,$$
$$\|x - y\| \geq \frac{1}{2} \sup \left[\|x\| \, , \|y\| \right] \cdot \left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\| .$$

Exercice 1.8 *Montrer que*

1) Toute intersection d'ensembles fermés de E *est fermée dans* E.

2) Toute réunion finie d'ensembles fermés de E *est fermée dans* E.

Exercice 1.9 *Soit* $a \in E$.

Montrer que la sphère $S(a, r)$, *de centre* a *et de rayon* r, *de* E *est un ensemble fermé dans* E.

Exercice 1.10 *Montrer que tout sous-ensemble fini de* E *est fermé dans* E.

Exercice 1.11 *Les ensembles suivants sont-ils compacts ? Justifier votre réponse.*

a) $\mathbb{Z}$ *; b)* $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$ *; c)* $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \ldots \times [a_p, b_p]$.

d) Une union finie de réels.

e) Une union infinie de réels distincts.

f) La boule fermée de centre a *et de rayon* $r > 0$ *dans* $\mathbb{R}^p$.

Exercice 1.12 *Soit* (a_n) *une suite d'éléments de* $\mathbb{R}^p$ *de limite* $a \in \mathbb{R}^p$. *Le sous-ensemble* $A = \{a_n; n \in \mathbb{N}\} \cup \{a\}$ *est-il compact dans* $\mathbb{R}^p$?

Exercice 1.13 *a) Toute intersection de compacts de* $\mathbb{R}^p$ *est un compact de* $\mathbb{R}^p$.

b) Toute réunion finie de compacts de $\mathbb{R}^p$ *est un compact de* $\mathbb{R}^p$.

Chapitre 2

APPLICATIONS DE $\mathbb{R}^p$ DANS $\mathbb{R}^q$

Exercice 2.1 1. *Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :*
$f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$ *et* $g(x,y) = \ln(x-y^2)$.

2. *Déterminer et représenter les courbes de niveau de la fonction suivante :* $f(x,y) = x^2+y^2$.

Exercice 2.2 *Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie sur $\mathbb{R}^2$ par :*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|y|}{x^2}\exp\left(-\dfrac{|y|}{x^2}\right) & si \quad x \neq 0, \\ 0 & si \quad x = 0. \end{cases}$$

1) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et φ_λ la restriction de f à l'ensemble $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y = \lambda x\}$. Déterminer la limite de φ_λ au point $(0,0)$.

2) Soit ψ la restriction de f à l'ensemble $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y = x^2\}$. Calculer la limite de ψ au point $(0,0)$.

3) Conclure.

Exercice 2.3 *Etudier la limite à l'origine des fonctions suivantes :*

a) $f(x,y) = \dfrac{1-\cos(xy)}{x^2y^2}$; *b)* $g(x,y) = \dfrac{3x-y^2}{x^2+y^2}$; *c)* $h(x,y) = \dfrac{xy+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$,

d) $s(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$; *e)* $t(x,y) = \dfrac{x^2-y^2-1}{x}tgx$.

Exercice 2.4 *Etudier la limite à l'origine des fonctions suivantes :*

a) $f(x,y) = \dfrac{1-\cos(xy)}{y^2}$; *b)* $g(x,y) = \dfrac{1+x^2-y^2}{y}\sin(y)$; *c)* $h(x,y) = \dfrac{x+y^2}{x^2+y^2}$,

d) $s(x,y) = \dfrac{1+x+y}{x^2-y^2}$; *e)* $t(x,y) = (x^2-y^2)\sin(\dfrac{1}{xy})$.

Exercice 2.5 *Etudier la continuité au point* $(0,0)$ *des fonctions de* $\mathbb{R}^2$ *dans* $\mathbb{R}$ *définies pour chaque couple* (x,y) *de* $\mathbb{R}^2$ *par :*

$$a)\ f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x+y)^2}{x^2+y^2} & si \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0). \end{cases},$$

$$b)\ g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & si \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

$$c)\ h(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & si \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

$$e)\ t(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & si \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Exercice 2.6

1. *Peut-on prolonger par continuité au point* $(0,0)$ *les fonctions suivantes ?*

   1.1 $f(x,y) = \dfrac{1-\cos\sqrt{xy}}{y}$ *si* $(x,y) \in A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / xy > 0\}$.

   1.2 $g(x,y) = (x^2+y^2)^x$ *si* $(x,y) \neq (0,0)$.

   1.3 $h(x,y) = \dfrac{\sqrt{4-x^2-y^2}-2}{\sqrt{x^2+y^2}}$ *si* $(x,y) \neq (0,0)$.

2. *Peut-on prolonger par continuité au point* $(1,0)$ *la fonction suivante ?*

$$t(x,y) = \frac{y^3}{(x-1)^2+y^2} \ si \ (x,y) \neq (1,0).$$

Exercice 2.7 *Soit A un compact de $\mathbb{R}^n$ muni d'une distance d et $f : A \longrightarrow A$ telle que*

$$\forall (x, y) \in A^2, \ x \neq y : d(f(x), f(y)) < d(x, y).$$

1) Montrer que la fonction $x \mapsto d(x, f(x))$ est continue sur A et atteint sa borne inférieure en un pint $x_0 \in A$.

2) En déduire que $f(x_0) = x_0$ (théorème du pont fixe).

Exercice 2.8 *Soient f et g deux applications continues de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$. Montrer que*

1) $A = \{x \in \mathbb{R}^n / \ f(x) = g(x)\}$ est fermé.

2) $B = \{x \in \mathbb{R}^n / \ 1 < f(x) < 2\}$ est ouvert.

3) $C = \{x \in \mathbb{R}^n / \ f(x) \leq g(x)\}$ est fermé.

4) $D = \{x \in \mathbb{R}^n / \ f(x) \neq g(x)\}$ est fermé.

Exercice 2.9 *Que peut-on dire des ensembles suivants ?*

1) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / xy = 1\}$.

2) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 < x^2 + y^2 < 1\}$.

3) $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + xy + y^2 < e^{z+x}\}$.

Exercice 2.10 *Montrer que :*

1. *$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / xy = 1\}$. est fermé de $\mathbb{R}^2$.*
2. *$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / xy > 1\}$. est fermé de $\mathbb{R}^2$.*
3. *$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 < x^2 + y^2 < 1\}$ est ouvert de $\mathbb{R}^2$.*
4. *$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 - y^2 \geq 1$ et $x^2 + y^2 < 2\}$ montrer que la suite $\left(\sqrt{2} - \frac{1}{n}, 0\right) \in D$, en déduire que D n'est pas fermé de $\mathbb{R}^2$.*

Exercice 2.11 *Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}^n$ et $x \in \mathbb{R}^n$. On pose*

$$d(x, A) = \inf \{d(x, a), \ a \in A\}.$$

1) Montrer que l'application f definie de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ par : $f(x) = d(x, A)$ est uniformément continue.

2) On pose

$$\begin{aligned} V(A, r) &= \{x \in \mathbb{R}^n / d(x, A) < r\}, \\ V'(A, r) &= \{x \in \mathbb{R}^n / d(x, A) \leq r\}. \end{aligned}$$

Montrer que $V(A, r)$ est ouvert, $V'(A, r)$ est fermé et que $\bigcap_{r>0} V(A, r) = \overline{A}$.

Exercice 2.12 *Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}^n$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on pose $d(x, A) = \inf\limits_{y \in A} d(x, y)$.*

1) Montrer que $d(x, A) = 0 \Leftrightarrow x \in \overline{A}$.

2) Montrer que pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$, on a $|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$. En déduire que la fonction $x \longrightarrow d(x, A)$ est continue.

3) On suppose que A est compact et $x \notin A$. Montrer que $d(x, A) > 0$ et qu'il existe $a \in A$ tel que $d(x, A) = d(x, a)$.

4) Soit B une partie non vide de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $F = \{x \in \mathbb{R}^n / d(x, A) = d(x, B)\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^n$.

Chapitre 3

FONCTIONS DIFFERENTIABLES

Exercice 3.1 *Etudier la différentiabilité à l'origine de l'application* $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *qui est définie par* $f(0;0) = 0$ *et par* $f(x;y) = \dfrac{|xy|}{\sqrt{x^2+3y^2}}$ *si* $(x;y) \neq (0;0)$.

Exercice 3.2 *Etudier la différentiablilité des fonctions suivantes :*
1) $f(x,y) = x^2 + y^2$; *2)* $g(x,y,z) = \sin(x^2+y) + \cos yz$; *3)* $h(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$;
4) $t(x;y) = y^2 \sin \dfrac{x}{y}$ *si* $y \neq 0$ *et* $t(x;0) = 0$ *si* $y = 0$.

Exercice 3.3 *Montrer que la fonction* f *définie sur* $\mathbb{R}^2$ *par :* $f(x,y) = xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ *si* $(x;y) \neq (0;0)$ *et* $f(0;0) = 0$ *admet des dérivées partielles d'ordre 2 en tout point mais que* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.

Exercice 3.4 *: Soit* $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *une application de classe* C^2 *et* $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par :*

$$f(x,y) = \frac{g(x)-g(y)}{x-y} \quad si\ x \neq y; \quad f(x;x) = g'(x).$$

Montrer que f *est de classe* C^1 *en tout point de* $\mathbb{R}^2$ *et calculer sa différentielle.*

Exercice 3.5 *: Soit* f *la fonction définie sur* $\mathbb{R}^2$ *par :*

$$f(x;y) = (x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \quad si\ (x;y) \neq (0;0) \quad et \quad f(0;0) = 0.$$

1) Déterminer les fonctions $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ *et* $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

2) Montrer que f *est de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ *et calculer la différentielle de* f *au point* $(x,y) \neq (0,0)$.

3) Montrer que les fonctions $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ *et* $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ *ne sont pas continues en* $(0,0)$ *mais* f *est différentiable en* $(0;0)$.

Exercice 3.6 *1) Soit* $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *la fonction définie par :*

$f(x;y) = (\cos x + \sin y, -\sin x + \cos y, 2\sin x \cos y)$.

1) Déterminer la matrice Jacobienne $J_{(x,y)}(f)$ *de* f *au point* (x,y).

2) Soit $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ *la fonction définie par :* $g(u,v,w) = u^2 + v^2 + w$. *Déterminer la matrice Jacobienne* $J_{(u,v,w)}(g)$ *de* g *au point* (u,v,w).

3) Calculer la matrice Jacobienne $J_{(x,y)}(gof)$ *de* gof *au point* (x,y)

a) En explicitant gof. *b) Au moyen d'un produit de matrices.*

Exercice 3.7 *Soit* f *la fonction de* $\mathbb{R}^2$ *vers* $\mathbb{R}$ *définie par :*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & si \ \ (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & si \ \ (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1) Montrer que f *est continue en* $(0,0)$.

2) Calculer en tout point $(x,y) \neq (0,0)$ $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ *et* $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.

3) Etudier l'existance des dérivées partielles en $(0,0)$. f *est-elle différentiable en* $(0,0)$?

Exercice 3.8 *Soient les fonctions* $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *et* $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *définies par :*

$$f(x,y) = (x^2+y, x^2-y^2, 1); \ \ g(x,y) = (e^{x-y}, 2xy).$$

1) Rappeler la définition d'une fonction de classe C^k *sur un ouvert* U *de* $\mathbb{R}^n$.

2) Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

a) Déterminer les matrices jacobiennes $J_f(x,y)$ *et* $J_g(x,y)$ *respectives de* f *et* g.

b) Calculer de deux manières différentes la matrice jacobienne $J_{(fog)}(x,y)$ *de* fog.

c) Donner $d(fog)_{(x,y)}(h,k)$, $(h,k) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 3.9 *Soit* $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *définie par :*

$$f(x,y,z) = (x^2 - y - z, x^2 + y^2 + e^{zx}).$$

1) Montrer que f *est de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}^3$.

2) Calculer en tout point $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ *la matrice jacobienne de* f *notée* $J_f\,(x,y,z)$ *et donner l'expression de* $df_{(x,y,z)}\,(h,k,l)\,,\ (h,k,l) \in \mathbb{R}^3$.

3) Montrer qu'il existe $r > 0$ *tel que pour tout* $(x;y) \in \overline{B_r}((0,0,0))$ *(la boule fermée de centre* $(0,0,0)$ *et de rayon* r*) on a* $\left\|df_{(x;y,z)}\right\| \leq 1$.

Exercice 3.10 *Soit* f *et* g *les fonctions définies sur* $\mathbb{R}^2$ *par :*

$$f\,(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} & si \qquad (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 & sinon. \end{cases} \quad ; \quad g\,(x,y) = (x+y, xy)\,.$$

1. *Montrer qu'il existe* $K > 0$ *tel que* $\forall x \in V\,(0,0)\,,\ |f(x,y)| \leq K\,\|(x,y)\|\,.$
   En déduire le domaine de continuité de f.
2. *Montrer que* f *admet des dérivées partielles en tout point* (x,y) *de* $\mathbb{R}^2$.
3. *Montrer que* f *est différentiable sur* $\mathbb{R}^2\backslash\,\{(0,0)\}$
4. f *est-elle différentiable au point* $(0,0)$?
5. f *est-elle de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}^2$?
6. *Donner l'expression de* $df_{(1,1)}\,(h,k)$ *et* $dg_{(1,1)}\,(h,k)\,.$
7. *Ecrire les matrices jacobiennes de* f, g, *et* fog.

Exercice 3.11 ***: Soit*** f *etg les foncions définies sur* $O = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3/x > 0, x+y > 0\}$ *par :*

$$f\,(x,y) = \left(x + y, \frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right); \quad g\,(x,y,z) = \left(x + y + z, xy - z^2\right).$$

1) L'ensemble O *est-il ouvert, et pourquoi ?*

2) Ecrire les matrices jacobiennes de f, g, *et* fog.

3) $df_{(x,y,z)}$ *désigne la différentielle de* f *au point* (x,y,z). *Donner l'expression de* $df_{(x,y,z)}\,(h,k,l)\,.$

Exercice 3.12 *On considère le sous -ensemble* $X = \{(x,y)\,/x^3 + y^3 - 3xy = 1\}\,.$

1) Montrer que X *est au voisinage de* $(0,1)$ *le graphe d'une fonction* $x \hookleftarrow \Phi\,(x)$ *de classe* C^2 *telle que* $\Phi\,(0) = 1$.

2) Donner un développement limité de Φ *à l'ordre 2 en 0.*

Exercice 3.13 *Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x-1)y^2}{(x-1)^2+y^2} & \textit{pour} \quad (x,y) \neq (1,0), \\ 0 & \textit{si} \quad (x,y) = (1,0). \end{cases}$$

1. *montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$;*
2. *calculer les dérivées partielles de f pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$;*
3. *montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus (1,0)$;*
4. *que peut-on conclure sur la différentiabilité de f sur $\mathbb{R}^2 \setminus (1,0)$*
5. *montrer que f n'est pas différentiable en $(1,0)$;*
6. *f est-elle de classe C^1 en $(1,0)$?*

Exercice 3.14 *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ une constante et $f_\alpha : \mathbb{R}^2 \longrightarrow R$ la fonction ainsi définie*

$$f_\alpha(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{x^2+y^2}-1}{x^2+y^2} & \textit{si} \qquad (x,y) \neq (0,0), \\ \alpha & \textit{sinon.} \end{cases}$$

1. *Étude de la fonction sur $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$.*
   1.1 *Calculer le gradient de f_α pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$.*
   1.2 *Montrer que f_α est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$; que peut-on conclure sur la différentiabilité de f_α ?*
2. *Étude de la fonction en (0,0).*
   2.1 *Calculer $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f_\alpha(x,\ y)$ et en déduire qu'il existe une valeur α_0 de α (à préciser) pour laquelle f_α est continue en (0, 0).*
   2.2 *Montrer que f_α admet des dérivées partielles en (0,0) si et seulement si $\alpha = \alpha_0$ et calculer ∇f_{α_0} en $(0,0)$.*
   2.3 *En utilisant la définition, prouver que f_{α_0} est différentiable en $(0,0)$.*
   2.4 *Montrer que f_{α_0} est de classe C^1 en $(0,0)$.*

Exercice 3.15 *Montrer que l'´equation $z^3 + 2z + e^{z-x-y^2} = cos(x-y+z)$ définit implicitement z comme fonction C^∞ de x et y au voisinage de 0 qui s'annule en 0. Calculer les dérivées partielles de z à l'ordre 2 en 0.*

Exercice 3.16 *Soit f la fonction définie par $f(x,y) = 3x^2 + 2y^3 - 6y$*

1. *Montrer qu'on peut appliquer le théorème des fonctions implicites à la fonction f au voisinage de $(0,0)$. Soit φ cette fonction implicite.*
2. *Etablir la relation $x + (\varphi^2(x) - 1)\varphi'(x) = 0$, calculer $\varphi'(0)$*

3. *Montrer que* φ *admet au voisinage de* 0 *un développement limité d'ordre* n*, dont la partie régulière pour* $n \geq 2$ *est de la forme* $\sum_{i=1}^{n} a_i x^i$.
4. *Calculer les* a_i *dans le cas* $n = 6$*. En déduire* $\varphi^{(i)}(0)$ *pour* $i = 2, 3, \cdots, 6$

Exercice 3.17 *Soit* $f(x, y) = y^5 + x^4 y^3 + x^2 y + 1$

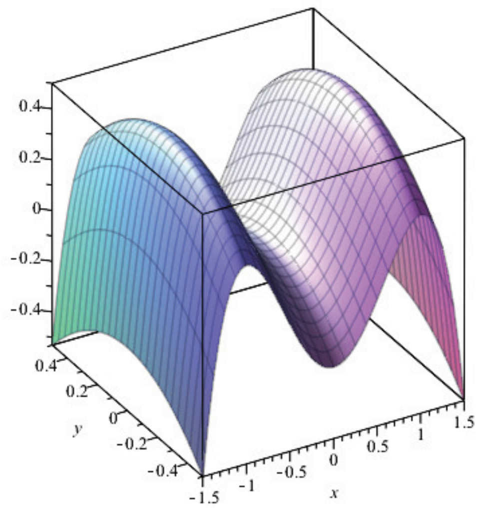
1. *Montrer que pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *, l'équation en* y*,* $f(x, y) = 0$ *admet un solution unique.*
2. *Calculer* $f(0, -1)$ *puis montrer qu'on peut appliquer le théorème des fonctions implicites à la fonction* f *au voisinage de* $(0, -1)$*.*
3. *Soit* $y = \varphi(x)$ *cette fonction implicite. Donner le tableau de variation de* $\varphi(x)$ *et tracer sa courbe.*

Exercice 3.18 *: Déterminer les extrema de* f *et préciser leur nature.*

1. $f(x, y) = (x^2 + y^2)\, e^{x^2 - y^2}$.
2. $f(x, y) = xe^y + y \ln(x)$.

Exercice 3.19 *On pose* $f(x, y) = x^2 - y^2 - \dfrac{x^4}{2}$ *;*

1. *Tracer la représentation graphique avec Matlab ou Maple de la fonction* f *,* $x \in [-1.5, 1.5], y \in [-0.5, 0.5]$*.*
2. *Déterminer les points critiques de* f*.*
3. *Étudier les extrema locaux de* f*.*



Chapitre 4

Intégrales doubles et triples

Exercice 4.1 *Calculer les intégrales suivantes :*

1) $\int\int_\Delta xye^{-x^2+y}dxdy;$ $\qquad \Delta = [0,1]\times[1,2]$.

2) $\int\int_\Delta \sqrt{x^2+y^2}dxdy;$ $\qquad \Delta = \{(x,y)\in\mathbb{R}^+/x^2+y^2-1\le 0, x^2+y^2\ge 2y\}$.

3) $\int\int_\Delta \ln(1+x+y)dxdy;$ $\qquad \Delta = \{(x,y)\,/\ x\ge 0,\ y\ge 0, x+y\le 1\}$.

4) $\int\int_\Delta \sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}}dxdy;$ $\qquad \Delta = \left\{(x,y)\,/\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\le 1,\ a>0,\ b>0\right\}$.

5) $\int\int_\Delta \dfrac{dxdy}{\sqrt[4]{x}\sqrt{y}};$ $\qquad \Delta = \left\{(x,y)\,/\ 0<x\le 1,\ 1\le y\le \dfrac{1}{x}\right\}$.
Poser $x=u,\ y=\dfrac{v}{u}$.

6) $\int\int_\Delta \dfrac{x-y}{x^2+y^2}dxdy;$ $\qquad \Delta = \{(x,y)\,/\ y\ge 0,\ x^2+y^2-x\ge 0,\ x^2+y^2-2x\le 0\}$.

7) $\int\int_\Delta (x+y)^2 e^{x^2-y^2}dxdy;$ $\qquad \Delta = \{(x,y)\,/\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ x+y\le 1\}$.

8) $\int\int_\Delta (x+2y)^2\,dxdy$ $\qquad$ Δ *est le compact délimité par le triangle de sommets* $A(0,0),\ B(1,1)$ *et* $C(2,-1)$.

9) $\int\int_\Delta xydxdy$ $\qquad$ Δ *est le compact délimité par le triangle de sommets* $A(0,0),\ B(a,0)$ *et* $C(0,b)\quad a>0, b>0$.

10) $\int\int_\Delta |x+y|dxdy;$ $\qquad \Delta = \{(x,y)\,/\ |x|\ge 1,\ |y|\ge 1\}$.

11) $\int\int_\Delta (x+y)\cos(x+y)dxdy;$ $\quad \Delta$ $\quad$ Δ *est le compact délimité par le triangle de sommets* $A(0,0), B(a,a)$ *et* $C(a,-a)$

12) $\int\int\int_\Delta xyzdxdydz;$ $\qquad \Delta = \{(x,y,z)\,/\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0,\ x+y+z\le 1\}$.

13) $\int\int\int_\Delta xyzdxdydz;$ $\qquad \Delta = \{(x,y,z)\,/\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ 0\le z\le 1,\ x^2+y^2\le z^2\}$.

14) $\int\int\int_\Delta zdxdydz;$ $\qquad \Delta = \{(x,y,z)\,/\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 1,\ x+y+z\le 1\}$.

15) $\int\int\int_\Delta z^2dxdydz;$ $\qquad \Delta = \{(x,y,z)\,/x^2+y^2+z^2\le R^2\}$.

16) $\int\int\int_\Delta \dfrac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}};$ $\qquad \Delta = \left\{\begin{array}{l}(x,y,z)\,/\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ 0\le z\le 1,\\ R_1^2\le x^2+y^2+z^2\le R_2^2,\ \ 0\le R_1<R_2\end{array}\right\}$.

Exercice 4.2 *Calculer* $\int\int_K (x-y)\,dxdy$ *où* K *est le compact plan délimité* *par les droites d'équations*

$$x = 0, \; y = x + 2, \; y = -x.$$

Exercice 4.3 *Déterminer l'aire du compact plan délimité par les courbes d'équation,*

$$y = x, \quad y^2 = x.$$

Exercice 4.4 *Calculer l'aire du compact* Δ *délimité par les droites d'équation* $y = ax$ *et* $y = \dfrac{1}{a}x$*, et par les hyperboles d'équation* $y = \dfrac{b}{x}$ *et* $y = \dfrac{1}{bx}$.

Exercice 4.5 *Calculer le volume du solide* S *défini par :*

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \; x^2 + y^2 \leq 1; \; x^2 + y^2 \leq z \leq 4 - 3\left(x^2 + y^2\right) \right\}.$$

Exercice 4.6 *On se propose de calculer l'intégrale généralisée* $I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$.

1) Montrer que I *est convergente.*

2) Soit $r > 0$*. On note* C_r *le carré de centre 0 et de côté* $2r$ *et* D_r *le disque de centre* 0 *et de rayon* r.

a) Montrer que,

$$\int\int_{D_r} e^{-x^2-y^2} dxdy \leq \int\int_{C_r} e^{-x^2-y^2} dxdy \leq \int\int_{D_{r\sqrt{2}}} e^{-x^2-y^2} dxdy.$$

b) Calculer

$$\int\int_{D_r} e^{-x^2-y^2} dxdy.$$

3) Déduire des questions précédentes la valeur des intégrales I *et* $J = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$.