CHAPITRE III : Méthodes directes de résolution numérique de systèmes linéaires $AX = B$

1. Résoudre(S) : $\left\{\begin{array}{ll} x_1 - x_2 = 0 & L_1 \\ x_1 + x_2 = 2 & L_2 \end{array}\right.$

✓ Par substitution

$L_1 \rightarrow x_1 = x_2$

$L_2 \rightarrow 2x_1 = 2 \Rightarrow x_1 = 1 \Rightarrow x_2 = x_1 = 1$

✓ Par combinaison de lignes

$L_1 \rightarrow x_1 - x_2 = 0$

$L_2' \leftarrow L_2 - L_1 \Rightarrow 2x_2 = 2 - 0 = 2 \Rightarrow x_2 = 1 = x_1$

✓ Par inversion de la matrice

Le système (S) s'écrit sous la forme $AX = B$ avec :

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\det A = 2,\ A^{-1} = \frac{1}{\det A}\,{}^t comA = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

Si A^{-1} existe alors $X = A^{-1}B$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

✓ Par méthode de Cramer

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$$

où $\det(A_i)$ désigne le déterminant de la matrice obtenue en remplaçant la i^{eme} colonne de A par le vecteur b.

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = 1$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = 1$$

2. Résoudre

$$(S') : \begin{cases} 4x_1 + 15x_2 + 3x_3 - 17x_4 &= -18 & L_1 \\ +13x_2 + 5x_3 + 4x_4 &= 0 & L_2 \\ -2x_3 + 5x_4 &= 8 & L_3 \\ 7x_4 &= 14 & L_4 \end{cases}$$

$$(S) \begin{pmatrix} 4 & 15 & 3 & -17 \\ 0 & 13 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 \\ 0 \\ 8 \\ 14 \end{pmatrix}$$

Résolution par remontée (en commençant par x_4)

$$L_4 \to x_4 = \frac{14}{7} = 2$$

$$L_3 \to x_3 = \frac{(8 - 5 \times 2)}{-2} = 1$$

$$L_2 \to x_2 = \frac{(0 - 4 \times 2 - 5 \times 1)}{13} = -1$$

$$L_1 \to x_1 = \frac{(-18 + 17 \times 2 - 3 \times 1 + 15 \times 1)}{4} = 7$$

2. Résoudre

$$(S') : \left\{\begin{array}{rcll} 4x_1 + 15x_2 + 3x_3 - 17x_4 & = & -18 & L_1 \\ +13x_2 + 5x_3 + 4x_4 & = & 0 & L_2 \\ -2x_3 + 5x_4 & = & 8 & L_3 \\ 7x_4 & = & 14 & L_4 \end{array}\right.$$

$$(S) \begin{pmatrix} 4 & 15 & 3 & -17 \\ 0 & 13 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 \\ 0 \\ 8 \\ 14 \end{pmatrix}$$

Résolution par remontée (en commençant par x_4)

$$L_4 \to x_4 = \frac{14}{7} = 2$$

$$L_3 \to x_3 = \frac{(8 - 5 \times 2)}{-2} = 1$$

$$L_2 \to x_2 = \frac{(0 - 4 \times 2 - 5 \times 1)}{13} = -1$$

$$L_1 \to x_1 = \frac{(-18 + 17 \times 2 - 3 \times 1 + 15 \times 1)}{4} = 7$$

2. Résoudre

$$(S') : \left\{ \begin{array}{rcll} 4x_1 + 15x_2 + 3x_3 - 17x_4 & = & -18 & L_1 \\ +13x_2 + 5x_3 + 4x_4 & = & 0 & L_2 \\ -2x_3 + 5x_4 & = & 8 & L_3 \\ 7x_4 & = & 14 & L_4 \end{array} \right.$$

$$(S) \begin{pmatrix} 4 & 15 & 3 & -17 \\ 0 & 13 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 \\ 0 \\ 8 \\ 14 \end{pmatrix}$$

Résolution par remontée (en commençant par x_4)

$$L_4 \rightarrow x_4 = \frac{14}{7} = 2$$

$$L_3 \rightarrow x_3 = \frac{(8 - 5 \times 2)}{-2} = 1$$

$$L_2 \rightarrow x_2 = \frac{(0 - 4 \times 2 - 5 \times 1)}{13} = -1$$

$$L_1 \rightarrow x_1 = \frac{(-18 + 17 \times 2 - 3 \times 1 + 15 \times 1)}{4} = 7$$

2. Résoudre

$$(S') : \left\{\begin{array}{rcll} 4x_1 + 15x_2 + 3x_3 - 17x_4 & = & -18 & L_1 \\ +13x_2 + 5x_3 + 4x_4 & = & 0 & L_2 \\ -2x_3 + 5x_4 & = & 8 & L_3 \\ 7x_4 & = & 14 & L_4 \end{array}\right.$$

$$(S) \begin{pmatrix} 4 & 15 & 3 & -17 \\ 0 & 13 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 \\ 0 \\ 8 \\ 14 \end{pmatrix}$$

Résolution par remontée (en commençant par x_4)

$$L_4 \rightarrow x_4 = \frac{14}{7} = 2$$

$$L_3 \rightarrow x_3 = \frac{(8 - 5 \times 2)}{-2} = 1$$

$$L_2 \rightarrow x_2 = \frac{(0 - 4 \times 2 - 5 \times 1)}{13} = -1$$

$$L_1 \rightarrow x_1 = \frac{(-18 + 17 \times 2 - 3 \times 1 + 15 \times 1)}{4} = 7$$

2. Résoudre

$$(S') : \left\{ \begin{array}{rcll} 4x_1 + 15x_2 + 3x_3 - 17x_4 & = & -18 & L_1 \\ +13x_2 + 5x_3 + 4x_4 & = & 0 & L_2 \\ -2x_3 + 5x_4 & = & 8 & L_3 \\ 7x_4 & = & 14 & L_4 \end{array} \right.$$

$$(S) \begin{pmatrix} 4 & 15 & 3 & -17 \\ 0 & 13 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 \\ 0 \\ 8 \\ 14 \end{pmatrix}$$

Résolution par remontée (en commençant par x_4)

$$L_4 \to x_4 = \frac{14}{7} = 2$$

$$L_3 \to x_3 = \frac{(8 - 5 \times 2)}{-2} = 1$$

$$L_2 \to x_2 = \frac{(0 - 4 \times 2 - 5 \times 1)}{13} = -1$$

$$L_1 \to x_1 = \frac{(-18 + 17 \times 2 - 3 \times 1 + 15 \times 1)}{4} = 7$$

2. Résoudre

$$(S') : \left\{ \begin{array}{rcll} 4x_1 + 15x_2 + 3x_3 - 17x_4 & = & -18 & L_1 \\ +13x_2 + 5x_3 + 4x_4 & = & 0 & L_2 \\ -2x_3 + 5x_4 & = & 8 & L_3 \\ 7x_4 & = & 14 & L_4 \end{array} \right.$$

$$(S) \begin{pmatrix} 4 & 15 & 3 & -17 \\ 0 & 13 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 \\ 0 \\ 8 \\ 14 \end{pmatrix}$$

Résolution par remontée (en commençant par x_4)

$$L_4 \to x_4 = \frac{14}{7} = 2$$

$$L_3 \to x_3 = \frac{(8 - 5 \times 2)}{-2} = 1$$

$$L_2 \to x_2 = \frac{(0 - 4 \times 2 - 5 \times 1)}{13} = -1$$

$$L_1 \to x_1 = \frac{(-18 + 17 \times 2 - 3 \times 1 + 15 \times 1)}{4} = 7$$

3. Système triangulaire : cas général

$$(ST') : \begin{cases} u_{11}x_1 + u_{12}x_2 + \cdots + u_{1n}x_n & = & b_1 & L_1 \\ \qquad\quad u_{22}x_2 + \cdots + u_{2n}x_n & = & b_2 & L_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{nn}x_n & = & b_n & L_n \end{cases}$$

Le système (ST') s'écrit sous la forme $UX = B$

On suppose que $u_{kk} \neq 0 \; k = 1, \cdots, n$

$x_n = \dfrac{b_n}{u_{nn}}$

$x_{n-1} = (b_{n-1} \quad - u_{n-1n}x_n) / u_{n-1n-1}$

$x_i = (b_i \quad - \sum_{j=i+1}^{j=n} u_{ij}x_j) / u_{ii} \quad i = n-1, \ldots .1$

Algorithme de résolution pour $UX = B$

$$x_n = \frac{b_n}{u_{nn}}$$

Pour $i = n - 1$ à 1

$x_i = b_i$

Pour $j = i + 1$ à n

$$x_i = \frac{1}{u_{ii}}(x_i - u_{ij}x_j)$$

Fin j

Fin i

Remarques

1. La matrice U est dite triangulaire supérieure.
   Elle est inversible si tous les termes diagonaux sont non nuls et

$$\det U = u_{11} \times u_{22} \times \cdots \times u_{nn}$$

2. La matrice triangulaire inférieure se traite de façon similaire
3. le nombre d'opérations nécéssaires est :
   $\dfrac{n(n-1)}{2}$ multiplications, $\dfrac{n(n-1)}{2}$ additions et n divisions
   soit au total n^2opérations

Elle consiste à ramener un système linéaire de la forme $AX = B$ (avec A est une matrice pleine)
à un système de la forme $UX = D$ (avec U est dite triangulaire supérieure) puis à résoudre ce dernier.

Exemple

Résoudre

$$(S') : \begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 8 & L_1 \\ 0x_1 + 8x_2 + 2x_3 = -7 & L_2 \\ 6x_1 + 2x_2 + 8x_3 = 26 & L_3 \end{cases}$$

Exemple (Suite)

Etape1: $$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 8 & L_1^{(1)} \leftarrow L_1 \\ 0 + 8x_2 + 2x_3 = -7 & L_2^{(1)} \leftarrow L_2 \\ 0 - 8x_2 + 4x_3 = 10 & L_3^{(1)} \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{cases}$$

Etape2: $$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 8 & L_1^{(1)} \leftarrow L_1 \\ 0 + 8x_2 + 2x_3 = -7 & L_2^{(1)} \leftarrow L_2 \\ 0 + 0 + 6x_3 = 3 & L_3^{(2)} \leftarrow L_3^{(1)} + L_2^{(1)} \end{cases}$$

D'où :

$$x_3 = \frac{1}{2}$$

$$x_2 = (-7 - 2x_3)/8 = -1$$

$$x_1 = (8 - 2x_3 - 5x_2)/3 = 4$$

Exemple (Suite)

Etape1: $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 8 & L_1^{(1)} \leftarrow L_1 \\ 0 + 8x_2 + 2x_3 = -7 & L_2^{(1)} \leftarrow L_2 \\ 0 - 8x_2 + 4x_3 = 10 & L_3^{(1)} \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{cases}$

Etape2: $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 8 & L_1^{(1)} \leftarrow L_1 \\ 0 + 8x_2 + 2x_3 = -7 & L_2^{(1)} \leftarrow L_2 \\ 0 + 0 + 6x_3 = 3 & L_3^{(2)} \leftarrow L_3^{(1)} + L_2^{(1)} \end{cases}$

D'où :

$$x_3 = \frac{1}{2}$$

$$x_2 = (-7 - 2x_3)/8 = -1$$

$$x_1 = (8 - 2x_3 - 5x_2)/3 = 4$$

Exemple (Suite)

Etape1: $$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 8 & L_1^{(1)} \leftarrow L_1 \\ 0 + 8x_2 + 2x_3 = -7 & L_2^{(1)} \leftarrow L_2 \\ 0 - 8x_2 + 4x_3 = 10 & L_3^{(1)} \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{cases}$$

Etape2: $$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 8 & L_1^{(1)} \leftarrow L_1 \\ 0 + 8x_2 + 2x_3 = -7 & L_2^{(1)} \leftarrow L_2 \\ 0 + 0 + 6x_3 = 3 & L_3^{(2)} \leftarrow L_3^{(1)} + L_2^{(1)} \end{cases}$$

D'où :

$$x_3 = \frac{1}{2}$$

$$x_2 = (-7 - 2x_3)/8 = -1$$

$$x_1 = (8 - 2x_3 - 5x_2)/3 = 4$$

Exemple (Suite)

Etape1: $\left\{\begin{array}{rl} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 8 & L_1^{(1)} \leftarrow L_1 \\ 0 + 8x_2 + 2x_3 = -7 & L_2^{(1)} \leftarrow L_2 \\ 0 - 8x_2 + 4x_3 = 10 & L_3^{(1)} \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{array}\right.$

Etape2: $\left\{\begin{array}{rl} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 8 & L_1^{(1)} \leftarrow L_1 \\ 0 + 8x_2 + 2x_3 = -7 & L_2^{(1)} \leftarrow L_2 \\ 0 + 0 + 6x_3 = 3 & L_3^{(2)} \leftarrow L_3^{(1)} + L_2^{(1)} \end{array}\right.$

D'où :

$$x_3 = \frac{1}{2}$$

$$x_2 = (-7 - 2x_3)/8 = -1$$

$$x_1 = (8 - 2x_3 - 5x_2)/3 = 4$$

Exemple (Suite)

Etape1: $$\left\{\begin{array}{ll} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 8 & L_1^{(1)} \leftarrow L_1 \\ 0 + 8x_2 + 2x_3 = -7 & L_2^{(1)} \leftarrow L_2 \\ 0 - 8x_2 + 4x_3 = 10 & L_3^{(1)} \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{array}\right.$$

Etape2: $$\left\{\begin{array}{ll} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 8 & L_1^{(1)} \leftarrow L_1 \\ 0 + 8x_2 + 2x_3 = -7 & L_2^{(1)} \leftarrow L_2 \\ 0 + 0 + 6x_3 = 3 & L_3^{(2)} \leftarrow L_3^{(1)} + L_2^{(1)} \end{array}\right.$$

D'où :

$$x_3 = \frac{1}{2}$$

$$x_2 = (-7 - 2x_3)/8 = -1$$

$$x_1 = (8 - 2x_3 - 5x_2)/3 = 4$$

2.1 Méthode de Gauss sans pivot (cas général)

$$(S_0)\begin{cases} a_{11}^{(0)}x_1 + a_{12}^{(0)}x_2 + a_{13}^{(0)}x_3 + \cdots + a_{1n}^{(0)}x_n & = & b_1^{(0)} \\ a_{21}^{(0)}x_1 + a_{22}^{(0)}x_2 + a_{23}^{(0)}x_3 + \cdots + a_{2n}^{(0)}x_n & = & b_2^{(0)} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}^{(0)}x_1 + a_{n2}^{(0)}x_2 + a_{n3}^{(0)}x_3 + \cdots + a_{nn}^{(0)}x_n & = & b_n^{(0)} \end{cases}$$

Etape1 : On suppose $a_{11}^{(0)} \neq 0$ et on pose $m_{i1} = \dfrac{a_{i1}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}}$

On remplace la ligne $L_i^{(0)}$ par

$$L_i^{(1)} \leftarrow L_i^{(0)} - m_{i1}L_1^{(0)} \quad \text{pour} \quad i = 2, 3, \cdots, n$$

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij}^{(0)} - m_{i1}a_{1j}^{(0)} \quad \text{pour} \quad i, j = 2, 3, \cdots; n$$

et

$$b_i^{(1)} = b_i^{(0)} - m_{i1}b_1^{(0)} \quad \text{pour} \quad i = 2, 3, \cdots; n$$

$$
(S_0)\begin{cases}
a_{11}^{(0)}x_1 + a_{12}^{(0)}x_2 + a_{13}^{(0)}x_3 + \cdots + a_{1n}^{(0)}x_n & = & b_1^{(0)}\\
a_{21}^{(0)}x_1 + a_{22}^{(0)}x_2 + a_{23}^{(0)}x_3 + \cdots + a_{2n}^{(0)}x_n & = & b_2^{(0)}\\
\vdots & \vdots & \vdots\\
a_{n1}^{(0)}x_1 + a_{n2}^{(0)}x_2 + a_{n3}^{(0)}x_3 + \cdots + a_{nn}^{(0)}x_n & = & b_n^{(0)}
\end{cases}
$$

Etape1 : On suppose $a_{11}^{(0)} \neq 0$ et on pose $m_{i1} = \dfrac{a_{i1}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}}$

On remplace la ligne $L_i^{(0)}$ par

$$L_i^{(1)} \leftarrow L_i^{(0)} - m_{i1}L_1^{(0)} \quad \text{pour} \quad i = 2, 3, \cdots, n$$

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij}^{(0)} - m_{i1}a_{1j}^{(0)} \quad \text{pour} \quad i, j = 2, 3, \cdots; n$$

et

$$b_i^{(1)} = b_i^{(0)} - m_{i1}b_1^{(0)} \quad \text{pour} \quad i = 2, 3, \cdots; n$$

On obtient alors le système (S_1) suivant :

$$(S_1)\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}^{(0)}x_1 + a_{12}^{(0)}x_2 + a_{13}^{(0)}x_3 + \cdots + a_{1n}^{(0)}x_n & = & b_1^{(0)} \\ 0 + a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \cdots + a_{2n}^{(1)}x_n & = & b_2^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 + a_{n2}^{(1)}x_2 + a_{n3}^{(1)}x_3 + \cdots + a_{nn}^{(1)}x_n & = & b_n^{(1)} \end{array}\right.$$

Etape2 : A nouveau, on suppose $a_{22}^{(1)} \neq 0$ et on pose $m_{i2} = \frac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}$

On remplace la ligne $L_i^{(1)}$ par

$$L_i^{(2)} \leftarrow L_i^{(1)} - m_{i2}L_2^{(1)} \quad \text{pour} \quad i = 3, \cdots, n$$

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - m_{i2}a_{2j}^{(1)} \quad \text{pour} \quad i, j = 3, \cdots, n$$

et

$$b_i^{(2)} = b_i^{(1)} - m_{i2}b_2^{(1)} \quad \text{pour} \quad i = 3, \cdots, n$$

On obtient alors le système (S_1) suivant :

$$
(S_1) \left\{ \begin{array}{rcl}
a_{11}^{(0)} x_1 + a_{12}^{(0)} x_2 + a_{13}^{(0)} x_3 + \cdots + a_{1n}^{(0)} x_n & = & b_1^{(0)} \\
0 + a_{22}^{(1)} x_2 + a_{23}^{(1)} x_3 + \cdots + a_{2n}^{(1)} x_n & = & b_2^{(1)} \\
\vdots \qquad\qquad & \vdots & \vdots \\
0 + a_{n2}^{(1)} x_2 + a_{n3}^{(1)} x_3 + \cdots + a_{nn}^{(1)} x_n & = & b_n^{(1)}
\end{array} \right.
$$

Etape2 : A nouveau, on suppose $a_{22}^{(1)} \neq 0$ et on pose $m_{i2} = \dfrac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}$

On remplace la ligne $L_i^{(1)}$ par

$$L_i^{(2)} \leftarrow L_i^{(1)} - m_{i2} L_2^{(1)} \quad \text{pour} \quad i = 3, \cdots, n$$

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - m_{i2} a_{2j}^{(1)} \quad \text{pour} \quad i, j = 3, \cdots, n$$

et

$$b_i^{(2)} = b_i^{(1)} - m_{i2} b_2^{(1)} \quad \text{pour} \quad i = 3, \cdots, n$$

On obtient alors le système (S_2) suivant :

$$(S_2) : \left\{ \begin{array}{rcl} a_{11}^{(0)}x_1 + a_{12}^{(0)}x_2 + a_{13}^{(0)}x_3 + \cdots + a_{1n}^{(0)}x_n & = & b_1^{(0)} \\ 0 + a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \cdots + a_{2n}^{(1)}x_n & = & b_2^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 + 0 + a_{n3}^{(2)}x_3 + \cdots + a_{nn}^{(2)}x_n & = & b_n^{(2)} \end{array} \right.$$

En supposant qu'à chaque étape on a $a_{kk}^{(1)} \neq 0$, on poursuit la la transformation jusq'à l'obtention d'un système triangulaire :

$$(S_{n-1}) : \left\{ \begin{array}{rcl} a_{11}^{(0)}x_1 + a_{12}^{(0)}x_2 + \cdots + a_{1n}^{(0)}x_n & = & b_1^{(0)} \\ 0 + a_{22}^{(1)}x_2 + \cdots + a_{2n}^{(1)}x_n & = & b_2^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 + 0 + 0 + \cdots + 0 + a_{nn}^{(n-1)}x_n & = & b_n^{(n-1)} \end{array} \right.$$

On obtient alors la solution en commençant par : $x_n = \dfrac{b_n^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}}$,

$x_{n-1}, x_{n-2}, \cdots ,x_2, x_1$

On obtient alors le système (S_2) suivant :

$$(S_2) : \left\{ \begin{array}{rcl} a_{11}^{(0)} x_1 + a_{12}^{(0)} x_2 + a_{13}^{(0)} x_3 + \cdots + a_{1n}^{(0)} x_n & = & b_1^{(0)} \\ 0 + a_{22}^{(1)} x_2 + a_{23}^{(1)} x_3 + \cdots + a_{2n}^{(1)} x_n & = & b_2^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 + 0 + a_{n3}^{(2)} x_3 + \cdots + a_{nn}^{(2)} x_n & = & b_n^{(2)} \end{array} \right.$$

En supposant qu'à chaque étape on a $a_{kk}^{(1)} \neq 0$, on poursuit la la transformation jusq'à l'obtention d'un système triangulaire :

$$(S_{n-1}) : \left\{ \begin{array}{rcl} a_{11}^{(0)} x_1 + a_{12}^{(0)} x_2 + \cdots + a_{1n}^{(0)} x_n & = & b_1^{(0)} \\ 0 + a_{22}^{(1)} x_2 + \cdots + a_{2n}^{(1)} x_n & = & b_2^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 + 0 + 0 + \cdots + 0 + a_{nn}^{(n-1)} x_n & = & b_n^{(n-1)} \end{array} \right.$$

On obtient alors la solution en commençant par : $x_n = \dfrac{b_n^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}}$,

$x_{n-1}, x_{n-2}, \cdots ,x_2, x_1$

On obtient alors le système (S_2) suivant :

$$(S_2) : \left\{ \begin{array}{rcl} a_{11}^{(0)}x_1 + a_{12}^{(0)}x_2 + a_{13}^{(0)}x_3 + \cdots + a_{1n}^{(0)}x_n & = & b_1^{(0)} \\ 0 + a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \cdots + a_{2n}^{(1)}x_n & = & b_2^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 + 0 + a_{n3}^{(2)}x_3 + \cdots + a_{nn}^{(2)}x_n & = & b_n^{(2)} \end{array} \right.$$

En supposant qu'à chaque étape on a $a_{kk}^{(1)} \neq 0$, on poursuit la la transformation jusq'à l'obtention d'un système triangulaire :

$$(S_{n-1}) : \left\{ \begin{array}{rcl} a_{11}^{(0)}x_1 + a_{12}^{(0)}x_2 + \cdots + a_{1n}^{(0)}x_n & = & b_1^{(0)} \\ 0 + a_{22}^{(1)}x_2 + \cdots + a_{2n}^{(1)}x_n & = & b_2^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 + 0 + 0 + \cdots + 0 + a_{nn}^{(n-1)}x_n & = & b_n^{(n-1)} \end{array} \right.$$

On obtient alors la solution en commençant par : $x_n = \dfrac{b_n^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}}$,

$x_{n-1}, x_{n-2}, \cdots ,x_2, x_1$

2.2 Ecriture matricielle :

$$\text{ètape } 0 : A^{(0)} = A = \begin{pmatrix} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & \cdots & \cdots & a_{1n}^{(0)} & b_1^{(0)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n}^{(0)} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{nn}^{(0)} & b_n^{(0)} \end{pmatrix}$$

$$\text{ètape } 1 : A^{(1)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & \cdots & \cdots & a_{1n}^{(0)} & b_1^{(0)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \cdots & \cdots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & \cdots & \cdots & a_{nn}^{(1)} & b_n^{(1)} \end{pmatrix}$$

$$\text{ètape n-1 } : A^{(n-1)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & \cdots & \cdots & a_{1n}^{(0)} & b_1^{(0)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \cdots & \cdots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn}^{(n-1)} & b_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

Matrices élementaires de Gauss

Soient les matrices

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ -m_{21} & 1 & 0 & \\ \vdots & 0 & \ddots & \\ -m_{n1} & & & 1 \end{pmatrix}$$

,

$$M_k = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccccc} & & k & & & \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ 0 & \ddots & & & 0 & \\ 0 & & 1 & & & \\ \vdots & & -m_{k+1k} & \ddots & & \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & \\ 0 & & -m_{k+1k} & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ k \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

en posant $e_k = (0, \cdots, 1, 0, \cdots, 0)^\top$ et
$m_k = (0, \cdots, 0, -m_{k+1k}, \cdots, -m_{nk})^\top$,
on obtient $M_k = I - m_k e_k^\top$ et on vérifie facilement que M_k est inversible et que $M_k^{-1} = I + m_k e_k^\top$.
On montre alors que :
Etape 1 : $A^{(1)} = M_1 \; A^{(0)}$
Etape k : $A^{(k)} = M_k A^{(k-1)} = M_k M_{k-1} \cdots M_2 M_1 \; A^{(0)}$
Etape n-1 :$U = A^{(n-1)} = M_{n-1} \cdots M_2 M_1 \; A^{(0)}$

Remarque

Le procédé suppose que tous les $a_{kk}^{(k-1)} \neq 0$.
Si à une étape k on a $a_{kk}^{(k-1)} = 0$ et s'il ya au moins un des $a_{ik}^{(k-1)} \neq 0$ $(i = k+1, \cdots .n)$ on permute les lignes k et i et on continue.
Sinon ça voudrait dire que la matrice A n'est pas inversible.

En utilisant la méthode de Gauss sans pivot, le nombre d'opérations nécéssaires au calcul de la solution de $AX = B$ est égal à :

$$\frac{2}{3}n^3 + \frac{3}{2}n^2 - \frac{7}{6}n$$

dont $\frac{n(n-1)(2n+5)}{6}$ additions , $\frac{n(n-1)(2n+5)}{6}$ multiplications et $\frac{n(n+1)}{2}$ divisions.

La méthode de Cramer nécéssite environ $n(n+1)!$ opérations.

Par exemple

N	4	5	10
Gauss	62	115	805
Cramer	480	3600	399168000

Les matrices élémentaires de permutation sont de la forme

$$I_{k,l} = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccccccc} & & & k & l & & & \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ 0 & 1 & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & 0 & 1 & & & \\ & & & 1 & 0 & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \\ k \\ l \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

Remarque

$I_{k,l}A$ échange les lignes k et l de A alors que $AI_{k,l}$ échange les colonnes k et l de A . On a encore $I_{k,l} = I_{k,l}^{-1} = I_{k,l}^{\top}$.

Exemple

Soit A la matrice donnée par : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ et $I_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

alors $I_{13}A = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $AI_{13} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \\ 9 & 8 & 7 \end{pmatrix}$.

Définition

Une matrice de permutation est un produit de matrices élémentaires de permutation.

Exemple

Soit à résoudre le système

$$\begin{cases} 10^{-10}x_1 + x_2 & = 1 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

La solution théorique est $x_1 = x_2 = 1/(1+10^{-10}) \simeq 1$. Cependant, la résolution du système par la méthode de Gauss donne des résultats différents selon qu'on l'applique avec ou sans pivot.

i) Si on applique la méthode de Gauss sans pivot on obtient

$$m_{21} = \frac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = \frac{1}{10^{-10}} = 10^{10}$$

Exemple

$$\text{et } (S_2) \begin{cases} 10^{-10}x_1 + x_2 & = 1 \\ \quad (-1 - 10^{10})x_2 & = -10^{10} \end{cases}$$

qui donne pour solution approchée $\quad x_2 = \dfrac{10^{10}}{1 + 10^{10}} \simeq 1$ et $x_1 \simeq 0$.

ii) Si on adopte la stratégie du pivot partiel qui consiste à mettre en première ligne celle dont le coefficient de x_1 est le plus grand en module alors on permute les lignes pour obtenir le système

$$(S_1) \begin{cases} x_1 - x_2 & = 0 \\ 10^{-10}x_1 + x_2 & = 1 \end{cases}$$

Pour lequel $m_{21} = \dfrac{10^{-10}}{1} = 10^{-10}$ et qui conduit à la solution approchée : $x_2 \simeq 1$ et $x_1 = x_2 \simeq 1$.

A travers cet exemple simple, on voit donc le problème que peut poser un pivot trop petit (a cause des erreurs d'arrondi).

Pour éviter de diviser par des pivots trop petits pouvant conduire à des solutions absurdes, on peut adopter automatiquement une stratégie du pivot

- Stratégie du pivot partiel (La méthode de Gauss avec pivot partiel) : A chaque étape k : on choisit $a_{kk}^{(k)}$ tel que :

$$a_{kk}^{(k)} = \max_{i \geq k} \left| a_{ik}^{(k)} \right|.$$

On permute alors les lignes d'indices i et k pour amener en position de pivot l'élément $a_{ik}^{(k)}$
Matriciellement, cette opération revient à multiplier la matrice $A^{(k)}$ par une matrice de permutation I_{kl} avant d'appliquer l'élimination de Gauss.
La méthode de Gauss avec pivot partiel s'écrit donc :

$$A^{(2)} = M_1 I_{1i} A^{(1)}, \; \cdots\cdots, \; A^{(n)} = M_{n-1} I_{n-1i} \cdots M_1 I_{1i} A^{(1)} = U$$

où les M_i sont des matrices élémentaires de Gauss et les I_{ki} des matrices de permutation pour $i \geq k$.

Si à une étape k on n'a pas besoin de pivoter, l'écriture reste valable avec $I_{ki} = I$ où I désigne la matrice identité.

- Stratégie du pivot total (La méthode de Gauss avec pivot total) :
  A chaque étape k, on prend $a_{kk}^{(k)}$ tel que :

$$a_{kk}^{(k)} = \max_{\substack{i \geq k \\ j \geq k}} \left| a_{ij}^{(k)} \right|.$$

  On effectue alors des permutations de lignes et de colonnes pour amener en position de pivot l'élément a_{ij}^{k}.
  Ce qui reviendrait à multiplier la matrice $A^{(k)}$ par deux matrices de permutation P et Q, l'une à droite pour permuter les lignes et l'autre à gauche pour permuter les colonnes .

$$\begin{aligned} A^{(2)} &= M_1 I_{1i} A^{(1)} I_{1j} \\ \vdots &= \vdots \\ A^{(n)} &= M_{n-1} I_{n-1i} \cdots M_1 I_{1i} A^{(1)} I_{1j} \cdots I_{n-1j}. \end{aligned}$$

Théorème

Si tous les $a_{kk}^{(k-1)} \neq 0$ *alors la matrice* A *peut-etre décomposée sous la forme* $A = LU$
où $U = A^{(n-1)}$ *est une matrice triangulaire supérieure et*

$$
\begin{aligned}
L &= M_1^{-1} M_2^{-1} \cdots M_{n-1}^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 & \cdots & \cdots \\ m_{31} & m_{32} & 1 & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & 1 & 0 \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{nn-1} & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

est une matrice triangulaire inférieure

Preuve :

1. M_k est inversible car $\det M_k = 1$ pour $k = 1, \cdots, n-1$
2. M_k^{-1}est de la forme de M_k en changeant les les termes $-m_{ik}$ en m_{ik} , $i = k+1, \cdots, n$
3. $(M_{n-1}M_{n-2}\cdots M_1)^{-1} = M_1^{-1}M_2^{-1}\cdots M_{n-1}^{-1}$
4. Le produit $M_1^{-1}M_2^{-1}\cdots M_{n-1}^{-1}$ est une matrice triangulaire inférieure
5. $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 & \cdots & \cdots \\ m_{31} & m_{32} & 1 & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & 1 & 0 \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{nn-1} & 1 \end{pmatrix}$

Théorème (Condition suffisante de la factorisation LU)

Soit A une matrice carrée d'ordre n telle que toutes les sous-matrices d'ordre k $(k \leq n)$

$$B_k = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix}$$

soient inversibles, alors il existe une matrice triangulaire inférieure L avec $l_{ii} = 1$ et une matrice triangulaire supérieure U telles que $A = LU$.
De plus, cette factorisation est unique.

Preuve :

On a $B_1 = a_{11}$ comme $\det(B1) \neq 0 \Longrightarrow a_{11} \neq 0$
a_{11} non nul, donc on peut appliquer la méthode d'élimination de Gauss sans pivot on obtient

$$A^{(2)} = M_1 A^{(1)} \quad (P_1 = I)$$

Supposons que nous ayons pu appliquer la méthode de Gauss sans pivot jusqu'à l'étape k c.à. d $P_1 = P_2 = \cdots P_{k-1} = I$
il s'ensuit que

$$A^{(k)} = M_{k-1} M_{k-2} \cdots M_1 A = \prod_{i=k-1}^{i=1} M_i A.$$

Avec

$$A_k = \begin{pmatrix} a_{11}^{(k)} & & & & \\ 0 & \ddots & & & \\ & & a_{kk}^{(k)} & \cdots & a_{kn}^{(k)} \\ & 0 & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & a_{nk}^{(k)} & \cdots & a_{nn}^{(k)} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ ** & \ddots & & & \\ ** & * & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ ** & * & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11}^{(k)} & \cdots & a_{1k}^{(k)} & & \\ \vdots & B_k & & & \\ a_{k1}^{(k)} & \cdots & a_{kk}^{(k)} & \cdots & a_{kn}^{(k)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}^{(k)} & \cdots & a_{nk}^{(k)} & \cdots & a_{nn}^{(k)} \end{pmatrix}$$

en écrivant A sous forme de blocs et en effectuant le produit matriciel par blocs, on obtient

$$a_{11}^{(1)} \times \cdots \times a_{kk}^{(k)} = \det(B_k).$$

Comme $\det(B_k) \neq 0 \Longrightarrow a_{kk}^{(k)} \neq 0$
Donc nous pouvons appliquer la méthode d'élimination de Gauss sans pivot à l'étape k ($P_k = I$)
Ce qui implique qu'on peut prendre $P_1 = \cdots = P_{n-1} = I$
Et avoir $MA = U$ et donc $A = M^{-1}U$

Unicité

Supposons qu'il existe L_1, L_2, U_1 et U_2 telles que $A = L_1U_1 = L_2U_2$, comme L_2 et U_1 sont inversibles alors $L_2^{-1}L_1 = U_2U_1^{-1}$.
L_1 est triangulaire inférieure $\Longrightarrow L_1^{-1}$ est triangulaire inférieure
U_1 est triangulaire supérieure $\Longrightarrow U_1^{-1}$ est triangulaire supérieure
L_1^{-1} et L_2 sont triangulaires inférieures $\Longrightarrow L_2L_1^{-1}$ est triangulaire inférieure
U_1 et U_2^{-1} sont triangulaires supérieures $\Longrightarrow U_1U_2^{-1}$ est triangulaire supérieure
$L_2^{-1}L_1 = U_2U_1^{-1}$, ce qui impose $L_2^{-1}L_1 = U_2U_1^{-1} = I$
et donc

$$L_1 = L_2 \quad \text{et} \quad U_1 = U_2$$

Exemple

Résoudre (S') : $\begin{cases} -x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 6 \\ -x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 4 \end{cases}$

Donc $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

on a $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Longrightarrow M_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

On a $M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \Longrightarrow M_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Exemple (suite)

Donc $U = M_2 M_1 A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ et

$L = M_1^{-1} M_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Résoudre $AX = B$ revient à résoudre $LUX = B$ qu'on résoud en 2 étapes :

1. $LY = B$ donne $y_1 = 2$; $y_2 = 6 + 3\ y_1 = 12$ et $y_3 = 4 -\ y_1 - y_2 = -10$
2. $UX = Y$ donne $x_3 = \dfrac{-10}{-5} = 2$; $x_2 = \dfrac{12 - 14}{2} = -1$; $x_1 = -(2 - 4 + 1) = 1$

Définition

Une matrice A est dite symétrique si elle est égale à sa transposée, c.à.d, $A^t = A$.

Définition

Le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$ est défini comme l'application

$$\langle .,. \rangle : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (u, v) & \mapsto & \sum_{i=1}^{n} u_i v_i \end{array}$$

$$\sum_{i=1}^{n} u_i v_i = \langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle = v^t u = u^t v$$

Définition

Une matrice A est dite définie positive, (resp. semi définie positive) si pour tout $x \in \mathbb{R}^{n*}$, on a $\langle Ax, x\rangle > 0$, (resp. $\langle Ax, x\rangle \geq 0$).

Propriétés

- Une matrice définie positive est inversible ;
- Si A est inversible, alors $A^t A$ est symétrique et définie positive ;
- Si A est définie positive, alors toutes les sous-matrices B_k d'ordre $k(k \leq n)$ sont définies positives. En particulier tous les éléments diagonaux sont positifs.

Théorème

Si A est une matrice symétrique, définie positive, il existe (au moins) une matrice réelle triangulaire inférieure L telle que $A = LL^\top$.
Si de plus on impose aux éléments diagonaux de L d'être strictement positifs, alors la factorisation est unique.

Preuve :

Remarquons d'abord que si A est définie positive, alors toutes les sous-matrices d'ordre k sont inversibles. Le théorème 3.2 permet d'affirmer l'existence de deux matrices L et U telles que $A = LU$. Ce que nous cherchons ici c'est de factoriser en utilisant une seule matrice L.
Raisonnons par récurrence sur k.
Si $k = 1$, $\quad A = a_{11} > 0$ donc $a_{11} = \sqrt{a_{11}}.\sqrt{a_{11}}$.
Supposons qu'on ait pu factoriser jusqu'à l'ordre $k-1$ c.à.d
$A_{k-1} = L_{k-1}L_{k-1}^t$.
Soit A_k une matrice d'ordre k alors A_k peut s'écrire :

$$A_k = \left(\begin{array}{c|c} A_{k-1} & v \\ \hline v^t & a_{kk} \end{array}\right) \quad \text{avec } v = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{k-1k} \end{pmatrix}.$$

Considérons alors la matrice L_k obtenue à partir de L_{k-1} et telle que :

$$L_k = \left(\begin{array}{c|c} L_{k-1} & 0 \\ \hline l^t & l_{kk} \end{array}\right) \quad \text{avec } l = \begin{pmatrix} l_{1k} \\ \vdots \\ l_{k-1k} \end{pmatrix}.$$

Le produit matriciel $L_k L_k^t$ donne :

$$L_k L_k^t = \left(\begin{array}{c|c} L_{k-1} L_{k-1}^t & L_{k-1} l \\ \hline l^t L_{k-1}^t & l^t l + l_{kk}^2 \end{array}\right)$$

Par identification on obtient :

$$\begin{aligned} L_{k-1} L_{k-1}^t &= A_{k-1} && (4.1) \\ L_{k-1} l &= v && (4.2) \\ l^t l + l_{kk}^2 &= a_{kk} && (4.3) \end{aligned}$$

i) L'équation (4.2) permet alors de résoudre un système et d'obtenir la solution qui est le vecteur l.

ii) L'équation (4.3) permet d'obtenir la dernière inconnue du problème, à savoir
$l_{kk} = \sqrt{a_{kk} - l^t l}$ et on peut choisir $l_{kk} > 0$.

Détermination pratique de L

On a $A = LL^t$ donc

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} l_{ik} l_{kj}^t \\ &= \sum_{k=1}^{n} l_{ik} l_{jk} \end{aligned}$$

Comme L est triangulaire inferieure on a : $\quad a_{ij} = \sum_{k=1}^{j} l_{ik} l_{jk}$ avec $i \geq j$

$\underline{La 1^{re} colonne}$

$$\begin{cases} a_{11} &= l_{11}^2 \\ a_{i1} &= l_{i1} l_{11} \text{ pour } i = 2, \cdots, n \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} l_{11} &= \sqrt{a_{11}} \\ l_{i1} &= \dfrac{a_{i1}}{l_{11}} \text{ pour } i = 2, \cdots, n \end{cases}$$

$\underline{La k^{i\grave{e}me} colonne}$

$$\begin{cases} a_{kk} & = & \sum_{k=1}^{j} l_{kj} = l_{kk}^2 \sum_{k=1}^{j-1} l_{kj}^2 \\ a_{ik} & = & \sum_{k=1}^{k} l_{ij} l_{kj} \text{ pour } i = k+1, \cdots, n \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} l_{kk} & = & \sqrt{a_{kk} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{kj}^2} \\ l_{ik} & = & \dfrac{a_{ik} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{ij} l_{kj}}{l_{kk}} \text{ pour } i = k+1, \cdots, n \end{cases}$$

Exercice (1)

Soit le système linéaire

$$(S_1) : \begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + x_3 = 11 & L_1 \\ -2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = -16 & L_2 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 17 & L_3 \end{cases}$$

1. Résoudre le système (S_1) par la méthode d'élimination de GAUSS.
2. Ecrire le système (S_1) sous forme $AX = b$.
3. Ecrire le système triangulaire supérieur (S_2) sous forme $UX = \beta$ obtenu par la méthode d'élimination de Gauss.
4. Déduire le déterminant de A.

Corrigé

Exercice (1)

1. $$(S_1) : \begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + x_3 & = & 11 & L_1 \\ -2x_1 + 4x_2 - 2x_3 & = & -16 & L_2 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 & = & 17 & L_3 \end{cases}$$

Etape1: $m_{21} = \dfrac{a_{21}}{a_{11}} = \dfrac{-2}{4} = -0.5$ et $m_{31} = \dfrac{a_{31}}{a_{11}} = \dfrac{1}{4} = 0.25$ donc

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + x_3 & = & 11 & L_1^{(1)} \leftarrow L_1 \\ 3x_2 - 1.5x_3 & = & -10.5 & L_2^{(1)} \leftarrow L_2 - (-0.5)L_1 \\ -1.5x_2 + 3.75x_3 & = & 14.25 & L_3^{(1)} \leftarrow L_3 - 0.25L_1 \end{cases}$$

Etape2: $m_{32} = \dfrac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} = \dfrac{-1.5}{3} = -0.5$

$$(S_2) \begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + x_3 & = & 11 & L_1^{(2)} \leftarrow L_1^{(1)} \\ 3x_2 - 1.5x_3 & = & -10.5 & L_2^{(2)} \leftarrow L_2^{(1)} \\ 3x_3 & = & 9 & L_3^{(2)} \leftarrow L_3^{(2)} - (-0.5)L_2^{(1)} \end{cases}$$

Corrigé

Exercice (1)

1. $$(S_1) : \begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + x_3 & = & 11 & L_1 \\ -2x_1 + 4x_2 - 2x_3 & = & -16 & L_2 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 & = & 17 & L_3 \end{cases}$$

Etape1: $m_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{-2}{4} = -0.5$ et $m_{31} = \frac{a_{31}}{a_{11}} = \frac{1}{4} = 0.25$ donc

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + x_3 & = & 11 & L_1^{(1)} \leftarrow L_1 \\ 3x_2 - 1.5x_3 & = & -10.5 & L_2^{(1)} \leftarrow L_2 - (-0.5) L_1 \\ -1.5x_2 + 3.75x_3 & = & 14.25 & L_3^{(1)} \leftarrow L_3 - 0.25 L_1 \end{cases}$$

Etape2: $m_{32} = \frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} = \frac{-1.5}{3} = -0.5$

$$(S_2) \begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + x_3 & = & 11 & L_1^{(2)} \leftarrow L_1^{(1)} \\ 3x_2 - 1.5x_3 & = & -10.5 & L_2^{(2)} \leftarrow L_2^{(1)} \\ 3x_3 & = & 9 & L_3^{(2)} \leftarrow L_3^{(2)} - (-0.5) L_2^{(1)} \end{cases}$$

Exercice (Suite)

D'où :

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{9}{3} = 3 \\ x_2 &= (-10.5 + 1.5x_3)/3 = -2 \\ x_1 &= (11 + 2x_2 - x_3)/4 = 1 \end{aligned}$$

2. le système (S_1) s'écrit sous forme matricielle $AX = b$ avec :
A= $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 11 \\ -16 \\ 17 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$
3. le système (S_2) s'écrit sous forme matricielle $UX = \beta$ avec :
U= $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -1.5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} 11 \\ -10.5 \\ 9 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$
4. On a $\dim(A) = \dim(U) = u_{11} \times u_{22} \times u_{33} = 4 \times 3 \times 3 = 36$

Exercice (Suite)

D'où :

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{9}{3} = 3 \\ x_2 &= (-10.5 + 1.5x_3)/3 = -2 \\ x_1 &= (11 + 2x_2 - x_3)/4 = 1 \end{aligned}$$

2. le système (S_1) s'écrit sous forme matricielle $AX = b$ avec :
   A= $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 11 \\ -16 \\ 17 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$
3. le système (S_2) s'écrit sous forme matricielle $UX = \beta$ avec :
   U= $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -1.5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} 11 \\ -10.5 \\ 9 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$
4. On a $\dim(A) = \dim(U) = u_{11} \times u_{22} \times u_{33} = 4 \times 3 \times 3 = 36$

Exercice (Suite)

D'où :

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{9}{3} = 3 \\ x_2 &= (-10.5 + 1.5x_3)/3 = -2 \\ x_1 &= (11 + 2x_2 - x_3)/4 = 1 \end{aligned}$$

2. le système (S_1) s'écrit sous forme matricielle $AX = b$ avec :
A=$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 11 \\ -16 \\ 17 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$
3. le système (S_2) s'écrit sous forme matricielle $UX = \beta$ avec :
U=$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -1.5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} 11 \\ -10.5 \\ 9 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$
4. On a $\dim(A) = \dim(U) = u_{11} \times u_{22} \times u_{33} = 4 \times 3 \times 3 = 36$

Exercice (Suite)

D'où :

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{9}{3} = 3 \\ x_2 &= (-10.5 + 1.5x_3)/3 = -2 \\ x_1 &= (11 + 2x_2 - x_3)/4 = 1 \end{aligned}$$

2. le système (S_1) s'écrit sous forme matricielle $AX = b$ avec :
A= $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 11 \\ -16 \\ 17 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$
3. le système (S_2) s'écrit sous forme matricielle $UX = \beta$ avec :
U= $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -1.5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} 11 \\ -10.5 \\ 9 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$
4. On a $\dim(A) = \dim(U) = u_{11} \times u_{22} \times u_{33} = 4 \times 3 \times 3 = 36$

Exercice (2)

Soit le système linéaire

$$(S_1) : \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 & L_1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 2 & L_2 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 & L_3 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 4 & L_3 \end{cases}$$

1. Ecrire le système (S_1) sous forme $AX = b$.
2. Calculer la factorisation LU de la matrice A.
3. Résoudre le système linéaire (S_1) en utilisant la factorisation LU.
4. Déduire le déterminant de A.
5. Calculer A^{-1}.

Corrigé

Exercice (2)

1. le système (S_1) s'écrit sous forme matricielle $AX = b$ avec :

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ et } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} (L_1) \\ (L_2) \\ (L_3) \\ (L_4) \end{matrix}$$

Etape1:

$$m_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{2}{1} = 2,\ m_{31} = \frac{a_{31}}{a_{11}} = \frac{3}{1} = 3 \text{ et } m_{41} = \frac{a_{41}}{a_{11}} = \frac{4}{1} = 4$$

Corrigé

Exercice (2)

1. le système (S_1) s'écrit sous forme matricielle $AX = b$ avec :

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ et } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} (L_1) \\ (L_2) \\ (L_3) \\ (L_4) \end{matrix}$$

Etape1:

$$m_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{2}{1} = 2,\ m_{31} = \frac{a_{31}}{a_{11}} = \frac{3}{1} = 3 \text{ et } m_{41} = \frac{a_{41}}{a_{11}} = \frac{4}{1} = 4$$

Exercice (Suite)

Donc

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & -2 & -8 & -10 \\ 0 & -7 & -10 & -13 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_1^{(1)} \leftarrow L_1 \\ L_2^{(1)} \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_2^{(1)} \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_2^{(1)} \leftarrow L_2 - 4L_1 \end{array}$$

Etape2: $m_{32} = \frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} = \frac{-2}{-1} = -2$ et $m_{32} = \frac{a_{42}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} = \frac{-7}{-1} = 7$

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 36 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_1^{(2)} \leftarrow L_1^{(1)} \\ L_2^{(2)} \leftarrow L_2^{(1)} \\ L_3^{(2)} \leftarrow L_3^{(1)} - 2L_2^{(1)} \\ L_4^{(2)} \leftarrow L_4^{(1)} - 7L_2^{(1)} \end{array}$$

Exercice (Suite)

Donc

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & -2 & -8 & -10 \\ 0 & -7 & -10 & -13 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_1^{(1)} \leftarrow L_1 \\ L_2^{(1)} \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_2^{(1)} \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_2^{(1)} \leftarrow L_2 - 4L_1 \end{array}$$

Etape2: $m_{32} = \dfrac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} = \dfrac{-2}{-1} = -2$ et $m_{32} = \dfrac{a_{42}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} = \dfrac{-7}{-1} = 7$

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 36 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_1^{(2)} \leftarrow L_1^{(1)} \\ L_2^{(2)} \leftarrow L_2^{(1)} \\ L_3^{(2)} \leftarrow L_3^{(1)} - 2L_2^{(1)} \\ L_4^{(2)} \leftarrow L_4^{(1)} - 7L_2^{(1)} \end{array}$$

Exercice (Suite)

Etape3: $$m_{43} = \frac{a_{43}^{(2)}}{a_{33}^{(2)}} = \frac{4}{-4} = -1$$

$$A^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 40 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1^{(3)} \leftarrow L_1^{(2)} \\ L_2^{(3)} \leftarrow L_2^{(2)} \\ L_3^{(3)} \leftarrow L_3^{(2)} \\ L_4^{(3)} \leftarrow L_4^{(2)} + L_3^{(2)} \end{array}$$

Donc $U = A^{(3)}$ et

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 1 & 0 \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice (Suite)

D'où : $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 7 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 40 \end{pmatrix}$

3. Pour résoudre le système linéaire (S_1) on résout d'abord le système $Ly = b$ et ensuite le système $Ux = y$.

$$Ly = b \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 7 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} y_1 = 1 \\ 2y_1 + y_2 = 2 \\ 3y_1 + 2y_2 + y_3 = 3 \\ 4y_1 + 7y_2 - y_3 + y_4 = 4 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y_1 = 1 \\ y_2 = 0 \\ y_3 = 0 \\ y_4 = 0 \end{cases}$$

Exercice (Suite)

$$Ux = y \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 40 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 & = & 1 \\ -x_2 - 2x_3 - 7x_4 & = & 0 \\ -4x_3 + 4x_4 & = & 0 \\ 40x_4 & = & 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{array} \right.$$

4. On a
$\dim(A) = \dim(LU) = \dim(L).\dim(U) = u_{11} \times u_{22} \times u_{33} \times u_{44} = 160$

Exercice (Suite)

5. Pour calculer A^{-1} on résout les quatre les systèmes linéaires suivants : $AX = e_1$, $AX = e_2$, $AX = e_3$ et $AX = e_4$ avec :

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

On a $Ax = e_1 \iff LUx = e_1$ donc pour résoudre le système linéaire $Ax = e_1$ on résout d'abord le système $Ly = e_1$ et ensuite le système $Ux = y$.

$$Ly = e_1 \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 7 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exercice (Suite)

$$\iff \begin{cases} y_1 = 1 \\ 2y_1 + y_2 = 0 \\ 3y_1 + 2y_2 + y_3 = 0 \\ 4y_1 + 7y_2 - y_3 + y_4 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y_1 = 1 \\ y_2 = -2 \\ y_3 = 1 \\ y_4 = 11 \end{cases}$$

$$Ux = y \iff \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 40 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 & = & 1 \\ -x_2 - 2x_3 - 7x_4 & = & -2 \\ -4x_3 + 4x_4 & = & 1 \\ 40x_4 & = & 11 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = -9/40 \\ x_2 = 1/40 \\ x_3 = 1/40 \\ x_4 = 11/40 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow X_1 = \begin{pmatrix} -9/40 \\ 1/40 \\ 1/40 \\ 11/40 \end{pmatrix}$$

Exercice (Suite)

Les autres systèmes seront résolus de la même manière :

$$AX_2 = e_2 \Longleftrightarrow X_2 = \begin{pmatrix} 1/40 \\ 1/40 \\ 11/40 \\ -9/40 \end{pmatrix}$$

$$AX_3 = e_3 \Longleftrightarrow X_3 = \begin{pmatrix} 1/40 \\ 11/40 \\ -9/40 \\ 1/40 \end{pmatrix}$$

$$AX_4 = e_4 \Longleftrightarrow X_4 = \begin{pmatrix} 11/40 \\ -9/40 \\ 1/40 \\ 1/40 \end{pmatrix}$$

Exercice (Suite)

D'où

$$A^{-1} = (X_1, X_2, X_3, X_4) = \frac{1}{40} \begin{pmatrix} -9 & 1 & 1 & 11 \\ 1 & 1 & 11 & -9 \\ 1 & 11 & -9 & 1 \\ 11 & -9 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice (3)

On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -4 \\ 2 & -4 & 11 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que la matrice A est symétrique définie positive
2. Calculer la factorisation de Cholesky de A

Corrigé

Exercice (3)

1. Montrons que A est symétrique définie positive

   On a $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -4 \\ 2 & -4 & 11 \end{pmatrix} = A^t$

   Donc A est symétrique.

   On a : $a_{11} = 4 > 0$, $\dim \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = 4 > 0$ et $\dim A = 4 > 0$

   Donc A est symétrique définie positive

2. $A = LL^t$ avec $L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix}$

Exercice (Suite)

Pour $k = 1$ on a

$$\begin{cases} l_{11} & = & \sqrt{a_{11}} \\ l_{i1} & = & \dfrac{a_{i1}}{l_{11}} \text{ pour } i = 2, \cdots, n \end{cases} \xRightarrow{k=1} \begin{cases} l_{11} & = & \sqrt{a_{11}} = 2 \\ l_{21} & = & \dfrac{a_{21}}{l_{11}} = \dfrac{-2}{2} = -1 \\ l_{31} & = & \dfrac{a_{31}}{l_{11}} = \dfrac{2}{2} = 1 \end{cases}$$

Pour $k > 1$ on a

$$\begin{cases} l_{kk} & = & \sqrt{a_{kk} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{kj}^2} \\ l_{ik} & = & \dfrac{a_{ik} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{ij} l_{kj}}{l_{kk}} \text{ pour } i = k+1, \cdots, n \end{cases}$$

$$\xRightarrow{k=2} \begin{cases} l_{22} & = & \sqrt{a_{22} - l_{21}^2} = \sqrt{2-1} = 1 \\ l_{32} & = & \dfrac{a_{32} - l_{31} l_{21}}{l_{22}} = \dfrac{-4 - (-1) \times 1}{1} = -3 \end{cases}$$

$$\xRightarrow{k=3} \left\{ l_{33} = \sqrt{a_{33} - l_{31}^2 - l_{32}^2} = \sqrt{11 - 1^2 - (-3)^2} = 1 \right.$$

Exercice (Suite)

$$L = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$