CHAPITRE V : Intégration numérique

1. Introduction

Dans le calcul d'intégrales, on n'est pas toujours en mesure d'obtenir des expressions exactes. Il se peut que l'obtention d'une primitive soit impossible ou trop compliquée.

Pour pallier à ce problème, on cherche une approximation de l'integrale $I(f) = \int_a^b f(x)dx$ par une somme de surfaces de rectangles, de trapèzes ou d'autres formes géométriques dont on sait calculer l'aire.

Considérons une subdivision uniforme de l'intervalle $[a, b]$ en n sous intervalles $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, ..., n$ de même longueur

$h = x_i - x_{i-1} = \dfrac{b-a}{n}$

On a donc : $x_0 = a < x_1 < \ ... \ x_i < x_{i+1} < \ ... \ < x_n = b$

où $x_i = a + ih$ pour $i = 0, 1, ..., n$, en particulier $x_0 = a$ et $x_n = b$

Soit f_i la restriction de la fonction f à chaque sous intervalle $[x_i, x_{i+1}]$.
En écrivant

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \int_a^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + ... + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f_i(x)dx\end{aligned}$$

on obtient alors des approximations de l'intégrale $I(f)$ en remplaçant $f_i(x)$ par une fonction $\Psi_i(x)$ facile à intégrer sur $[x_i, x_{i+1}]$.
Si Ψ_i est la fonction constante λ_i sur chaque sous intervale $[x_i, x_{i+1}]$ $(\Psi_i(x) = \lambda_i)$
on obtient une approximation par les sommes de Riemann :

$$I(f) \approx R^n(f) = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)\lambda_i$$

où $\lambda_i = f(x_i^*)$ avec x_i^* quelconque dans $[x_i, x_{i+1}]$

Théorème

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ alors :

$$\lim_{n\to\infty} R^n(f) = I(f) = \int_a^b f(x)dx$$

Preuve :

Remarquons d'abord que f est uniformément continue sur $[a, b]$ et par conséquent :

$\forall\varepsilon > 0, \ \exists\eta > 0$ tel que $\forall(x, y) \in [a, b]$ vérifiant: $|x - y| \leq \eta$

on ait : $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$

et plus particulièrement on a :

$\forall\varepsilon > 0, \ \exists\eta > 0$ tel que $\forall(x, y) \in [x_i, x_{i+1}]$ vérifiant: $|x - y| \leq \eta$

on ait : $|f(x) - f(y)| \leq \dfrac{\varepsilon}{b - a}$

Montrons maintenat que : $\forall\varepsilon > 0, \ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n > n_0$

on ait : $|I(f) - R^n(f)| \leq \varepsilon$

Soit $n_0 \ > \dfrac{b-a}{\eta}$ alors pour tout $n \geq n_0$ on a : $h = \dfrac{b-a}{n} \leq \dfrac{b-a}{n_0} < \eta$
Par ailleurs, pour $x_i^* \in [x_i, x_{i+1}]$ et tout $x \in [x_i, x_{i+1}]$ on a :
$|x - x_i^*| \leq h < \eta$ et ceci implique que $|f(x) - f(x_i^*)| \leq \dfrac{\varepsilon}{b-a}$
et par suite :

$$
\begin{aligned}
|I(f) - R^n(f)| &\leq \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} |f(x) - f(x_i^*)|\, dx \\
&\leq \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (\frac{\varepsilon}{b-a}) dx \\
&\leq \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} dx \\
&\leq \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) \\
&\leq \varepsilon
\end{aligned}
$$

Cas particulier de sommes de Riemann

En particulier, sur chaque sous intervalle $[x_i, x_{i+1}]$,on peut choisir x_i^* et prendre pour constante λ_i les valeurs $f(x_i^*)$ suivantes :

a) $x_i^* = x_i$ et $\lambda_i = f(x_i)$ donne

$$\int_a^b f(x)dx \approx I_g^n = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x_i)dx$$

(I_g^n ,l'indice g pour signifier gauche)

b) $x_i^* = x_{i+1}$ et $\lambda_i = f(x_{i+1})$ donne

$$\int_a^b f(x)dx \approx I_d^n = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x_{i+1})dx$$

(I_d^n , l'indice d pour signifier droit)

c) $x_i^* = \bar{x}_i = \frac{1}{2}(x_i + x_{i+1})$ (milieu de $[x_i, x_{i+1}]$) et $\lambda_i = f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)$ donne

$$\int_a^b f(x)dx \approx I_m^n = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) dx$$

(I_m^n, l'indice m pour signifier moyen ou médian)

2.1 Approximation par des rectangles à gauche

Soit $x_0 < x_1 < \ \dots \ x_i < x_{i+1} < \ \dots \ < x_n$ une subdivision uniforme de $[a, b]$

Si on prend $x_i^* = x_i$, on obtient une approximation de $\int_a^b f(x)dx$ comme suit : $\int_a^b f(x)dx \approx I_g^n$ où :

$$
\begin{aligned}
I_g^n &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x_i^*)dx \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) f(x_i) \\
&= h \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \\
&= \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)
\end{aligned}
$$

Théorème

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ alors :

1. *La suite (I_g^n) converge vers $I(f)$*
2. *Si la fonction f est de classe C^1 sur $[a, b]$ alors*

$$\left|I(f) - I_g^n\right| \leq M_1 \frac{(b-a)^2}{2n}$$

où $M_1 = \max\limits_{a \leq t \leq b} \left|f'(t)\right|$.

Preuve :

1. analogue à celle du théorème 1
2. Si f est de classe C^1 sur $[a, b]$ alors : $\exists M_1 \geq 0$ tel que :
   $M_1 = \max\limits_{a \leq t \leq b} \left|f'(t)\right|$
   Le théorème des accroissements finis appliqué à la fonction f sur $[x_i, x]$ où $x \in [x_i, x_{i+1}]$
   donne : $\exists c_i \in]x_i, x[$ tel que $f(x) - f(x_i) = (x - x_i) f'(c_i)$

d'où :

$$
\begin{aligned}
\left|I(f)-I_g^n\right| &\leq \sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}\left|(f(x)-f(x_i))\right|dx \\
&\leq \sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}\left|(x-x_i)f'(c_i)\right|dx
\end{aligned}
$$

soit encore :

$$
\begin{aligned}
\left|I(f)-I_g^n\right| &\leq M_1\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}(x-x_i)dx \\
&\leq M_1\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{2}[(x-x_i)^2]_{x_i}^{x_{i+1}} \\
&\leq M_1\sum_{i=0}^{n-1}\frac{h^2}{2} \\
&\leq M_1(b-a)\frac{h}{2}=M_1\frac{(b-a)^2}{2n}
\end{aligned}
$$

Corollaire

Pour obtenir une approximation avec précision de l'ordre de ε *, il suffit de prendre* $I_g^{n_0}$

où l'indice n_0 *est tel que :* $M_1 \dfrac{(b-a)^2}{2n_0} \leq \varepsilon$ *ou encore* $n_0 \geq M_1 \dfrac{(b-a)^2}{2\varepsilon}$

Exemple

L'approximation de l'intégrale $\int_0^1 e^{-x2} dx$ avec la méthode des rectangles à gauche, avec les précision $\varepsilon = 0.1$ et $\varepsilon = 0.05$

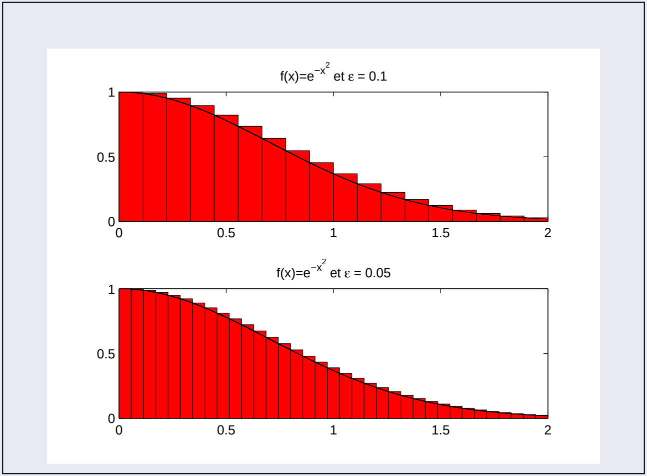

FIGURE – Approximation par des rectangles à gauche

2.2 Approximation par des rectangles à droite

Soit $x_0 < x_1 < \ \dots\ x_i < x_{i+1} < \ \dots\ < x_n$ une subdivision uniforme de $[a, b]$

Si on prend $x_i^* = x_{i+1}$, on obtient une approxiamtion de $\int_a^b f(x)dx$ comme suit : $\int_a^b f(x)dx \approx I_d^n$

Où :

$$
\begin{aligned}
I_d^n &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x_{i+1})dx \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) f(x_{i+1}) \\
&= \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{i=n} f(x_i)
\end{aligned}
$$

Théorème

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ alors :

1. *La suite (I_d^n) converge vers $I(f)$*
2. *Si la fonction f est de classe C^1 sur $[a, b]$ alors*

$$|I(f) - I_d^n| \leq M_1 \frac{(b-a)^2}{2n}$$

où $M_1 = \max_{a \leq t \leq b} |f'(t)|$

Preuve : analogue à celle du théorème 2

Corollaire

Pour obtenir une approximation avec précision de l'ordre de ε , il suffit de prendre $I_d^{n_0}$ où l'indice n_0 est tel que : $M_1 \dfrac{(b-a)^2}{2n_0} \leq \varepsilon$ *ou encore*

$$n_0 \geq M_1 \frac{(b-a)^2}{2\varepsilon}$$

Exemple

L'approximation de l'intégrale $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ avec la méthode des rectangles à droite, avec les précision $\varepsilon = 0.1$ et $\varepsilon = 0.05$

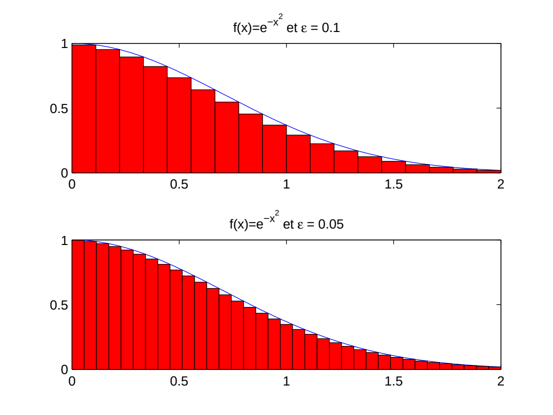

FIGURE – Approximation par des rectangles à droite

2.3 Approximation par des rectangles médians

Soit $x_0 < x_1 < \ \dots x_i < x_{i+1} < \ \dots \ < x_n$ une subdivision uniforme de $[a, b]$

Si on prend $x_i^* = \dfrac{x_i + x_{i+1}}{2}$, on obtient une approxiamtion de $\int_a^b f(x)dx$ comme suit : $\int_a^b f(x)dx \approx I_m^n$

où :

$$
\begin{aligned}
I_m^n &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) dx \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) \\
&= \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)
\end{aligned}
$$

Théorème

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ alors :

1. *La suite (I_m^n) converge vers $I(f)$*
2. *Si la fonction f est de classe C^2 sur $[a, b]$ alors*

$$|I(f) - I_m^n| \leq M_2 \frac{(b-a)^3}{24n^2} \text{ où } M_2 = \max_{a \leq t \leq b} |f''(t)|$$

Preuve :

1. analogue à celle du théorème 2
2. Ici, au lieu du théorème des accroissements finis, on utilise la formule de Taylor à l'ordre 2 sur l'intervalle $[\bar{x}_i, x]$ où $\bar{x}_i = \frac{1}{2}(x_i + x_{i+1})$ et $x \in [x_i, x_{i+1}]$.
   On obtient l'expression suivante :
   $$f(x) - f(\bar{x}_i) = (x - \bar{x}_i) f'(\bar{x}_i) + \frac{1}{2}(x - \bar{x}_i)^2 f''(c_i) \text{ avec } c_i \in [\bar{x}_i, x]$$

On a alors :

$$
\begin{aligned}
|I(f) - I_m^n| &= \left| \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (f(x) - f(\bar{x}_i))dx \right| \\
&\leq \left| \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x - \bar{x}_i) f'(\bar{x}_i) dx \right| + \left| \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{1}{2}(x - \bar{x}_i)^2 f''(c_i) dx \right| \\
&\leq A + B \\
\text{où} \quad A &= \left| \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x - \bar{x}_i) f'(\bar{x}_i) dx \right| \\
&= || \left| \sum_{i=0}^{n-1} f'(\bar{x}_i) \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x - \bar{x}_i) dx \right| \\
&= 0 \\
\text{et} \quad B &= \left| \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{1}{2}(x - \bar{x}_i)^2 f''(c_i) dx \right| \\
&\leq \frac{1}{2} M_2 \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x - \bar{x}_i)^2 dx
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
B &\leq \frac{1}{2} M_2 \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{3} \left[(x - \bar{x}_i)^3 \right]_{x_i}^{x_{i+1}} \\
&\leq \frac{1}{6} M_2 \sum_{i=0}^{n-1} 2 \left(\frac{x_{i+1} - x_i}{2} \right)^3 \\
&\leq M_2 \frac{(b-a)^3}{24 n^2}
\end{aligned}
$$

Corollaire

Pour obtenir une approximation avec précision de l'ordre de ε , il suffit de prendre $I_m^{n_0}$ où l'indice n_0 est tel que :

$$M_2 \frac{(b-a)^3}{24 n_0^2} \leq \varepsilon$$

c-à-d

$$n_0^2 \geq M_2 \frac{(b-a)^3}{24\varepsilon}$$

ou encore

$$n_0 \geq \sqrt{M_2 \frac{(b-a)^3}{24\varepsilon}}$$

Exemple

L'approximation de l'intégrale $\int_0^1 e^{-x2}dx$ avec la méthode des rectangles médians, avec les précision $\varepsilon = 0.01$ et $\varepsilon = 0.001$

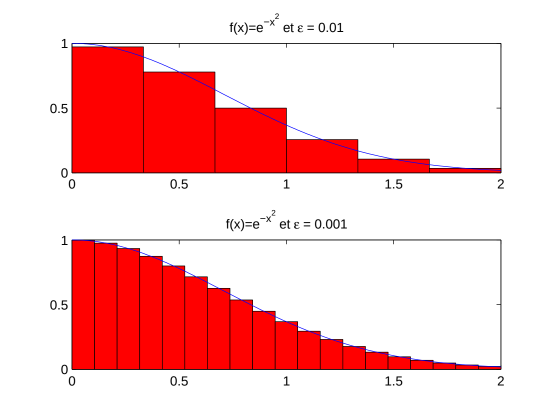

Figure – Approximation par des rectangles médians

2.4 Approximations par des trapèzes

Soit $x_0 < x_1 < \ \ldots\ x_i < x_{i+1} < \ \ldots\ < x_n$ une subdivision uniforme et $P\ _1(x)$ un polynôme de degré 1 interpolant f aux points x_i et x_{i+1} de chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$.
$[P_1(x_i) = f(x_i)$ et $P_1(x_{i+1}) = f(x_{i+1})]$
En approchant sur chaque sous intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, $f(x)$ par $P_1(x)$ on obtient :
$f(x) \simeq P_1(x) = f(x_i) + [f(x_i), f(x_{i+1})](x - x_i)$
$f(x) \simeq P_1(x) = f(x_i) + \dfrac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}(x - x_i)$
et en conséquences :

$$
\begin{aligned}
I(f) &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \\
&\simeq \int_{x_i}^{x_{i+1}} P_1(x)dx \\
&\simeq \frac{h}{2}[f(x_i) + f(x_{i+1})]
\end{aligned}
$$

2.5 Formule de Simpson

Théorème

Soit $P_2(x)$ *un polynôme de degré* 2 *vérifiant :*
$P_2(x_i) = f(x_i)$, $P_2(x_{i+1}) = f(x_{i+1})$ *et* $P_2(x_{i+2}) = f(x_{i+2})$
En approchant sur chaque sous intervalle $[x_i, x_{i+2}]$, $f(x)$ *par* $P_2(x)$ *on obtient :*

$$\begin{aligned} f(x) &\simeq P_2(x) \\ &\simeq f(x_0) + [f(x_i), f(x_{i+1})](x - x_i) \\ &\qquad + [f(x_i), f(x_{i+1}), f(x_{i+2})](x - x_i)(x - x_{i+1}) \end{aligned}$$

et en conséquences :

$$I(f) = \int_{x_i}^{x_{i+2}} f(x)dx \simeq \int_{x_i}^{x_{i+2}} P_2(x)dx = \frac{h}{3}[f(x_i) + 4f(x_{i+1}) + f(x_{i+2})]$$

Preuve :

On a $\int_{x_i}^{x_{i+2}} P_2(x)dx = I(P_2) + J(P_2) + K(P_2)$ avec :

$$\begin{aligned} I(P_2) &= \int_{x_i}^{x_{i+2}} f(x_i)dx \\ J(P_2) &= \int_{x_i}^{x_{i+2}} \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}(x - x_i)dx \\ K(P_2) &= \int_{x_i}^{x_{i+2}} [f(x_i), f(x_{i+1}), f(x_{i+2})](x - x_i)(x - x_{i+1})dx \end{aligned}$$

On fait le changement de variables suivant :

$(x - x_i) = ht \Rightarrow dx = hdt$ si $x = x_i \Rightarrow t = 0$ et si $x = x_{i+2} \Rightarrow t = 2$

$$\begin{aligned} I(P_2) &= \int_0^2 f(x_i)hdt \\ &= 2hf(x_i) \\ J(P_2) &= \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} \int_0^2 h^2 tdt \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
J(P_2) &= h[f(x_{i+1}) - f(x_i)]\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^2 \\
&= 2h[f(x_{i+1}) - f(x_i)]
\end{aligned}
$$

d'où on obtient successivement :

$$
\begin{aligned}
K(P_2) &= [f(x_i), f(x_{i+1}), f(x_{i+2})]\int_{x_i}^{x_{i+2}} (x - x_i)(x - x_{i+1})dx \\
&= [f(x_i), f(x_{i+1}), f(x_{i+2})]\int_0^2 h^3 t(t-1)dt \\
&= \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)}{2h^2} h^3 \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2}\right]_0^2 \\
&= [f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)]\frac{h}{3}
\end{aligned}
$$

Soit enfin :

$$
\int_{x_i}^{x_{i+2}} P_2(x)dx = I(P_2) + J(P_2) + K(P_2) = \frac{h}{3}[f(x_i) + 4f(x_{i+1}) + f(x_{i+2})]
$$

Définition

On appelle formule de quadrature de type interpolation la formule :

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \int_a^b P_n(x)dx$$

où P_n est le polynôme d'interpolation associé à f.

Degré d'exactitude :

Définition

On définit le degré de précision (ou d'exactitude) d'une formule de quadrature comme le plus grand entier $k \geq 0$ pour lequel la valeur approchée de l'intégrale (obtenue avec la formule de quadrature) d'un polynôme de degré k est égale à la valeur exacte,
Autrement dit, une formule de quadrature est dite d'ordre k si elle est exacte sur $\mathbb{R}_k[x]$ et inexacte pour au moins un polynôme de degré strictement supérieur à k .

Remarque

Pour vérifier qu'une formule de quadrature est d'ordre k il suffit de vérifier qu'elle est exacte sur une base de $\mathbb{R}_k[x]$ (par exemple la base canonique) et inexacte pour un polynôme de degré $k+1$ (par exemple le polynôme x^{k+1}).

Théorème

Toute formule de quadrature interpolatoire utilisant $n+1$ points distincts a un degré de précision au moins égale à n.

3.1 Interpolation linèaire et la formule du trapèze :

Soit $a = x_0 < x_1 < \ \ldots < x_n = b$, une subdivision uniforme de $[a, b]$ et $f \in C^2([a, b])$
Considérons d'abord le sous intervalle $[\ x_i, x_{i+1}]$, avec $h = x_{i+1} - x_i$,
Soit P_1 le polynôme de degré 1 interpolant f aux points x_i et x_{i+1}
Alors l'intégrale $I_i(f) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx$ peut être approchée par :

$$I_i(f) \simeq \int_{x_i}^{x_{i+1}} P_1(x)dx = \frac{h}{2}[f(x_i) + f(x_{i+1})]$$

On a $e_1(x) = f(x) - P_n(x) = \dfrac{f^{('')}(\theta_i)}{(2)!}\Pi_2(x)$

Donc l'erreur commise par cette approximation étant donnée par :

$$E_i(f) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} e_1(x)dx = \frac{1}{2}\int_{x_i}^{x_{i+1}}(x - x_i)(x - x_{i+1})f''(\theta_i)dx$$

$\Pi_2(x) = (x - x_i)(x - x_{i+1})$ garde un signe constant dans $[x_i, x_{i+1}]$
d'où, en appliquant la formule de la moyenne :

$$E_i(f) = \frac{f''(\eta_i)}{2}\int_{x_i}^{x_{i+1}}(x - x_i)(x - x_{i+1})dx = -\frac{h^3}{12}f''(\eta_i)\,;\ \eta_i \in [x_i, x_{i+1}]$$

3.2 Formule du trapèze composée

Pour chercher une approximation de l'intégrale sur tout l'intervalle $[a, b]$, il suffit d'écrire :

$$
\begin{aligned}
\int_{a=x_0}^{b=x_n} f(x)dx &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} [\frac{h}{2}[f(x_i) + f(x_{i+1})] + \sum_{i=0}^{n-1} -\frac{h^3}{12} f''(\eta_i) \\
&= \frac{h}{2}[f(x_0) + 2f(x_1) + ...2f(x_{n-1}) + f(x_n)] \\
&\quad -\frac{h^3}{12} \sum_{i=0}^{n-1} f''(\eta_i) \\
&= \frac{h}{2}[f(x_0) + 2f(x_1) + ...2f(x_{n-1}) + f(x_n)] \\
&\quad -\frac{(b-a)}{12} h^2 f''(\eta)
\end{aligned}
$$

avec $\eta \in [a, b]$

3.3 Formule de Simpson composée

Soit $a = x_0 < x_1 < \ \ldots < x_n = b$, une subdivision uniforme de $[a, b]$ en un nombre pair de sous-intervalles et $f \in C^4([a, b])$

Sur chaque sous-intervalle $[x_i, x_{i+2}]$, on a

$\int_{x_i}^{x_{i+2}} P_2(x)dx = \dfrac{h}{3}[f(x_i) + 4f(x_{i+1}) + f(x_{i+2})]$

avec $h = (b - a)/n$ est la longueur de ces sous-intervalles ;

$x_i = a + ih$ pour $i = 0, 1, \ldots, n-1, n$

Pour chercher une approximation de l'intégrale sur tout l'intervalle $[a, b]$, il suffit d'écrire :

$$\begin{aligned}
\int_{a=x_0}^{b=x_n} f(x)dx &= \sum_{i=0}^{n-2} \int_{x_i}^{x_{i+2}} f(x)dx \\
&\approx \sum_{i=0}^{n-2} \frac{h}{3}[f(x_i) + 4f(x_{i+1}) + f(x_{i+2})] \\
&\approx \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n/2-1} f(x_{2i}) + 4\sum_{i=1}^{n/2} f(x_{2i-1}) + f(x_n)\right]
\end{aligned}$$

3.4 Erreur de la formule de Simpson

En posant :

$$e_2(x) = f(x) - P_2(x)$$

et

$$E_2(f) = \int_a^b e_2(x)dx = \int_a^b [f(x) - P_2(x)]dx$$

- ✓ L'erreur commise par la méthode de Simpson simple est donnée par :

$$E_2(f) = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\theta); \quad \theta \in [a, b]$$

- ✓ L'erreur commise par la méthode de Simpson composée est donnée par :

$$E_2(f) = -\frac{(b-a)}{180} h^4 f^{(4)}(\theta); \quad \theta \in [a, b]$$

Exemple

On veut calculer une valeur approcher de $\ln 2$ pour cela on va calculer l'intégrale de la fonction f(x)=1/(x+1) sur un intervalle [0,1] par la méthode de Simpson la méthode des trapèzes, et la méthode des rectangles. Et on compare les résultats avec différentes valeurs de n (le nombre de subdivision de l'intervalle [0, 1]) alors on a le tableau suivant :

n	méthode de Simpson	méthode des trapèzes	méthode des rectangles
100	0.69314718057947511	0.6931534304818241	0.69565343048182404
200	0.69314718056116631	0.69314874305506269	0.69439874305506266
400	0.69314718056002178	0.69314757118464021	0.69377257118464031
800	0.69314718055995039	0.69314727821617628	0.69345977821617644
1600	0.69314718055994573	0.69314720497400739	0.69330345497400736
3200	0.6931471805599464	0.69314718666346065	0.69322531166346069
6400	0.69314718055994629	0.69314718208582515	0.69318624458582534
12800	0.69314718055994318	0.69314718094141725	0.69316671219141723
25600	0.69314718055994495	0.69314718065531489	0.69315694628031488
51200	0.69314718055994629	0.6931471805837861	0.69315206339628599

TABLE 4.1 – $Ln(2) \simeq 0,693147180559945309417232121458 18$

Exemple

n	méthode de Simpson	méthode des trapèzes	méthode des rectangles
100	0.6931471805794751	0.693153430481824	0.6956534304818240
200	0.6931471805611663	0.6931487430550626	0.6943987430550626
400	0.6931471805600217	0.6931475711846402	0.6937725711846403
800	0.6931471805599503	0.6931472782161762	0.6934597782161764
1600	0.6931471805599457	0.6931472049740073	0.6933034549740073
3200	0.693147180559946	0.6931471866634606	0.6932253116634606
6400	0.6931471805599462	0.6931471820858251	0.6931862445858253
12800	0.6931471805599431	0.6931471809414172	0.6931667121914172
25600	0.6931471805599449	0.6931471806553148	0.6931569462803148
51200	0.6931471805599462	0.693147180583786	0.6931520633962859

TABLE 4.1 – $Ln(2) \simeq 0,6931471805599453094172321214581$

Exercice (1)

Soit une fonction $f(x)$ connue seulement pour les valeurs de x suivantes :

x	0	$\pi/8$	$\pi/4$	$3\pi/8$	$\pi/2$
$f(x)$	0	0.382683	0.707107	0.923880	1

On désire évaluer $I = \int_0^{\pi/2} f(x)dx$.

1. Estimer la valeur de I à l'aide de la méthode des rectangles à gauche composite,
2. Estimer la valeur de I à l'aide de la méthode des trapèzes composite,
3. Estimer la valeur de I à l'aide de la méthode des Simpson composite,
4. Sachant que f est définie par $f(x) = sin(x)$, comparer alors les résultats obtenus avec la valeur exacte.

Exercice

5. Rappeler la formule de l'erreur de quadrature pour chaque méthode. Donnez une estimation de l'erreur pour la fonction f, et la comparer avec l'erreur calculée dans la question précédente.

Corrigé

Exercice (1)

1. La méthode des rectangles à gauche composite à $n+1$ points pour calculer l'intégrale d'une fonction f sur l'intervalle $[a, b]$ s'écrit

$$I_g^n = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{i=n} f(x_i) = \frac{b-a}{n}[f(x_1)+f(x_2)+....+f(x_{n-1})+f(x_n)]$$

Avec $a = 0$, $b = \pi/2$, $n = 4$ donc on obtient

$$\begin{aligned} I_g &\approx \int_{a=0}^{b=\pi/2} f(x)dx \\ &= \frac{\pi}{8}[f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+f(x_4)] \\ &= \frac{\pi}{8}[0.382683+0.707107+0.92388+1] \\ &= 1.183465442 \end{aligned}$$

Exercice

2. La méthode des trapèzes composite à $n+1$ points pour calculer l'intégrale d'une fonction f sur l'intervalle $[a, b]$ s'écrit

$$\int_{a=x_0}^{b=x_n} f(x)dx = \frac{h}{2}[f(x_0) + 2f(x_1) + \dots .2f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

Avec $a = 0, b = \pi/2, n = 4$ d'où $h = \dfrac{b-a}{n} = \dfrac{\pi}{8}$ et on obtient

$$\begin{aligned} I_T &= \int_{a=0}^{b=\pi/2} f(x)dx \\ &= \frac{h}{2}[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + 2f(x_3) + f(x_4)] \\ &= \frac{\pi}{16}[0 + 2(0.382683 + 0.707107 + 0.92388)) + 1] \\ &= 0.987116 \end{aligned}$$

Exercice

3. La méthode des Simpson composite à $n+1$ points pour calculer l'intégrale d'une fonction f sur l'intervalle $[a, b]$ s'écrit

$$\int_{a=x_0}^{b=x_n} f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n/2-1} f(x_{2i}) + 4\sum_{i=1}^{n/2} f(x_{2i-1}) + f(x_n)\right]$$

Avec $a = 0, b = \pi/2, n = 4$ d'où $h = \dfrac{b-a}{n} = \dfrac{\pi}{8}$ et on obtient

$$\begin{aligned} I_S &= \int_{a=0}^{b=\pi/2} f(x)dx \\ &= \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)] \\ &= \frac{\pi}{24}[0 + (4 \times 0.382683(+(2 \times 0.707107) + (4 \times 0.92388) + 1] \\ &= 1.000135 \end{aligned}$$

Exercice

4. On a $I = \int_{a=0}^{b=\pi/2} \sin(x)dx = 1$

$$|I_d - I| = 0.183465$$

$$|I_T - I| = 0.012884$$

$$|I_S - I| = 0.000135$$

Donc la meilleure approximation de I est celle de la méthode de Simpson.

5.

   ✓ L'erreur commise par la méthode des rectangles à gauche composée est donnée par :

$$|I(f) - I_g^n| \leq M_1 \frac{(b-a)^2}{2n}$$

   où $M_1 = \max_{a \leq t \leq b} |f'(t)|$.

Exercice

On a $a = 0$, $b = \pi/2$, $n = 4$ et $|f'(t)| \leq 1 \Longrightarrow M_1 = 1$.

$$\begin{aligned}
\left|I(f) - I_g^n\right| &\leq M_1 \frac{(b-a)^2}{2n} \\
&\leq \frac{(\pi/2)^2}{2 \times 4} \\
&\leq \frac{\pi^2}{32} \\
&\leq 0,30842513753404245683857784374613
\end{aligned}$$

Exercice

✓ L'erreur commise par la méthode des trapèzes composée est donnée par :

$$E_1(f) = -\frac{(b-a)}{12} h^2 f''(\eta)$$

avec $\eta \in [a, b]$
On a $a = 0, b = \pi/2, n = 4$, $h = \dfrac{b-a}{n} = \dfrac{\pi}{8}$ et $|f"(t)| \leq 1$. Donc

$$\begin{aligned} |E_1(f)| &\approx \frac{(b-a)}{12} h^2 \\ &\approx \frac{\pi^3}{1536} \\ &\approx 0,020186378047070195426742392621 81 \end{aligned}$$

Exercice

- ✓ L'erreur commise par la méthode de Simpson composée est donnée par :

$$E_2(f) = -\frac{(b-a)}{180} h^4 f^{(4)}(\theta); \qquad \theta \in [a, b]$$

On a $a = 0, b = \pi/2, n = 4$, $h = \dfrac{b-a}{n} = \dfrac{\pi}{8}$ et $\left| f^{(4)}(\theta) \right| \leq 1$. Donc

$$\begin{aligned} |E_2(f)| &\approx \frac{\pi}{360} \frac{\pi^4}{4096} \\ &\approx \frac{\pi^5}{1474560} \\ &\approx 0.6605976768 \times 10^{-4} \end{aligned}$$

Exercice (2)

Trouver le nombre n de subdivisions nécessaires de l'intervalle d'intégration $[-\pi, \pi]$, pour évaluer à 0.5×10^{-3} près, grâce à la méthode de Simpson, l'intégrale

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(x) dx$$

Corrigé

Exercice (2)

On a $a = -\pi, b = \pi$ d'où $h = \dfrac{b-a}{n} = \dfrac{2\pi}{n}$ et l'erreur commise par la méthode de Simpson composée est donnée par :

$$\begin{aligned} E_2 &= -\frac{(b-a)}{180} h^4 f^{(4)}(\xi) \qquad \xi \in [a, b] \\ &= -\frac{2\pi}{180} \left(\frac{2\pi}{n}\right)^4 \cos^{(4)}(\xi) \end{aligned}$$

Exercice

par conséquent,

$$|E_2| \leq \frac{16\pi^5}{90n^4};$$

Ainsi pour que $|E_2| \leq 0.5 \times 10^{-3}$ il suffit que n vérifie

$$\frac{16\pi^5}{90n^4} \leq 0.5 \times 10^{-3} \Longrightarrow n^4 \geq \frac{1}{0.5 \times 10^{-3}} \frac{16\pi^5}{90}$$

Donc n vérifie $n \geq 18.16$. On prendra par exemple $n = 20$, car pour la méthode de Simpson, le nombre de subdivisions de l'intervalle $[a, b]$ doit toujours être pair.

Exercice (3)

Soit α un nombre réel donné tel que $0 < \alpha \leq 1$ et soient $x_0 = -1, x_1 = 0, x_2 = \alpha$. Etant donnés ces trois points d'intégration, nous sommes intéressés à trouver trois nombres (poids) ω_0, ω_1 et ω_2 qui définiront la formule de quadrature

$$J(f) = \sum_{i=0}^{2} \omega_i f(x_i) = \omega_0 f(-1) + \omega_1 f(0) + \omega_2 f(\alpha),$$

où f est une fonction continue quelconque donnée sur $[-1, 1]$.

1. Trouver les poids ω_0, ω_1 et ω_2 en fonction de α tels que
$$J(P) = \int_{-1}^{1} P(x)dx$$
pour tout polynôme P de degré $m \leq 2$
2. Existe-t-il α tel que $J(P) = \int_{-1}^{1} P(x)dx$ pour tout polynôme P de degré $m \geq 3$? Si oui, quelle est la valeur maximale de m et que valent α, ω_0, ω_1 et ω_2 ?

Corrigé

Exercice (3)

1. On a :

   $i)$ pour $P_0(x) = 1$

$$\begin{aligned} \omega_0 P_0(-1) + \omega_1 P_0(0) + \omega_2 P_0(\alpha) &= \int_{-1}^{1} P_0(x)dx \\ \omega_0 + \omega_1 + \omega_2 &= 2 \end{aligned}$$

   $ii)$ pour $P_1(x) = x$

$$\begin{aligned} \omega_0 P_1(-1) + \omega_1 P_1(0) + \omega_2 P_1(\alpha) &= \int_{-1}^{1} P_1(x)dx \\ -\omega_0 + \alpha\omega_2 &= 0 \end{aligned}$$

Exercice

iii) pour $P_2(x) = x^2$

$$\begin{aligned} \omega_0 P_2(-1) + \omega_1 P_2(0) + \omega_2 P_2(\alpha) &= \int_{-1}^{1} P_2(x)dx \\ \omega_0 + \alpha^2\omega_2 &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

On obtient le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \omega_0 + \omega_1 + \omega_2 &=& 2 \\ -\omega_0 + \alpha\omega_2 &=& 0 \\ \omega_0 + \alpha^2\omega_2 &=& \frac{2}{3} \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \omega_1 &=& 2 - (\omega_0 + \omega_2) \\ \omega_0 &=& \alpha\omega_2 \\ \omega_0(1+\alpha) &=& \frac{2}{3} \end{array} \right.$$

On obtient donc

$$\omega_0 = \frac{2}{3(\alpha+1)}, \quad \omega_1 = \frac{6\alpha - 2}{3\alpha}, \quad \omega_2 = \frac{2}{3\alpha(\alpha+1)}.$$

Exercice

2. pour $P_3(x) = x^3$

$$\begin{aligned}
\omega_0 P_3(-1) + \omega_1 P_3(0) + \omega_2 P_3(\alpha) &= \int_{-1}^{1} P_3(x)dx \\
-\omega_0 + \alpha^3 \omega_2 &= 0 \\
\Longleftrightarrow \omega_0 &= \alpha^3 \omega_2 \\
\Longleftrightarrow \frac{2}{3(\alpha+1)} &= \alpha^3 \frac{2}{3\alpha(\alpha+1)} \\
\Longleftrightarrow \alpha^2 &= 1 \\
\Longrightarrow \alpha &= 1 \quad (0 < \alpha \leq 1)
\end{aligned}$$

Les poids deviennent alors $\omega_0 = \frac{1}{3}, \omega_1 = \frac{4}{3}$ et $\omega_2 = \frac{1}{3}$

Exercice

Pour $P_4(x) = x^4$, avec $\alpha = 1$, $\omega_0 = \frac{1}{3}, \omega_1 = \frac{4}{3}$ et $\omega_2 = \frac{1}{3}$, on obtient

$$J(x^4) = \frac{1}{3}P_4(-1) + \frac{4}{3}P_4(0) + \frac{1}{3}P_4(1) = \frac{2}{3}$$

et

$$\int_{-1}^{1} P_4(x)dx = \frac{2}{5}.$$

Donc

$$J(P_4) \neq \int_{-1}^{1} P_4(x)dx$$

Ainsi la valeur maximale de m telle que la formule de quadrature intègre exactement les polynômes de degré m est $m = 3$.