UNIVERSITE MOHAMMED PREMIER
ECOLE NATIONALE DES SCIENCES APPLIQUEES
OUJDA-MAROC

Filière : GIndus3 — Année universitaire : 2020-2021
Module : Méthodes Numériques — Enseignant : M. Derouich

Fiche TD N° : 1

Exercice 1. :
En arithmétique flottante illustrer la non-validité de :

1. La loi d'associativité pour $x = 0,23371258 \times 10^{-4}$, $y = 0,33678429 \times 10^{2}$ et $z = -0,33677811 \times 10^{2}$ avec 8 chiffres significatifs
2. La loi de distributivité $x = 122, y = 333$ et $z = 395$
avec 3 chiffres significatifs et arrondi

Exercice 2. :
Soit l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a \neq 0$.
On suppose que le discriminant $\Delta > 0$

1. Vérifier que $x_1 \times x_2 = \dfrac{c}{a}$
2. Supposons que les calculs soient effectués avec 10 chiffres significatifs ($t = 10$), trouver les racines de $x^2 - 1634x + 2 = 0$
3. Calculer x_2 on fonction de x_1.
4. Que remarquez-vous ?

Exercice 3. :
On considère la fonction à valeurs réelles $f(x) = 1 - 3e^{-x}$

1. Montrer que f possède une seule racine réelle θ
2. Par un procédé de dichotomie, trouver un intervalle de longueur 1 contenant cette racine.
3. Pour l'approcher, on propose les schémas suivants :
   $i)$ $x_0 \in [1;2], x_{n+1} = x_n + f(x_n)$.
   Cette suite converge-t-elle vers θ ? Pourquoi ?
   $ii)$ Trouver une valeur de $\lambda \in \mathbb{R}$ qui assure la convergence de la suite
   $$x_{n+1} = x_n + \lambda f(x_n)$$
   $iii)$ Appliquer à $f(x)$ la méthode de Newton pour trouver θ.
   - Sur quelle fonction définit-on les itérations de point fixe ?
   - Dans quel intervalle doit-on choisir la valeur de départ pour que la convergence soit assurée ?

Exercice 4. :
On considère la fonction à valeurs réelles $f(x) = 4e^{x/4} - 6$ dans l'intervalle $]0;4[$.

1. Montrer qu'il existe un zéro θ pour la fonction f dans l'intervalle $]0;4[$ et trouver θ de façon analytique.
2. Peut-on appliquer la méthode de dichotomie pour calculer θ ? Justifiez votre réponse.
3. Pour approcher le zéro θ on considère les méthodes de point fixe $x_{n+1} = g_i(x_n)$, $i = 1, 2, 3$, avec
$g_1(x) = x + 4e^{x/4} - 6$; $g_2(x) = x - 4 + 6e^{-x/4}$; $g_3(x) = x - \dfrac{e^{x/4}}{16} + \dfrac{3}{32}$
Établir si les trois méthodes sont convergentes et, en cas affirmatif, en établir l'ordre de convergence.
4. Pour la méthode de fonction g_3 , montrer que dans $]0;4[$ on a la relation suivante :
$$|x_{n+1} - \theta| \leq C|x_n - \theta|; C < 1$$
et proposer une estimation pour la constante C.
5. Finalement, pour la méthode de fonction g_3 , déterminer le nombre minimal d'itérations nécessaires pour avoir une erreur inferieure à 10^{-6} , lorsqu'on a choisi x_0 tel que $|x_0 - \theta| < 2$.

Exercice 5. :
On considère l'équation $f(x) = 0$, avec $f(x) = \ln(x) - x + 2$

1. *i*) Écrire l'équation $f(x) = 0$ sous la forme $g_1(x) = g_2(x)$ avec $g_1(x) = \ln(x)$.
ii) Tracer les graphes de g_1 et g_2 et déduire le nombre de racines de $f(x) = 0$
2. *i*) Faire 4 itérations de la méthode de dichotomie à partir de l'intervalle $[3, 4]$
ii) Quelle itération a donné le meilleur résultat ? Conclure.
iii) Déterminer le nombre d'itération n à faire pour avoir $\Delta x \leq 10^{-4}$
iv) Donner une estimation de l'erreur après 25 itérations.
3. Faire 4 itérations de la méthode de fausse position à partir de l'intervalle $[3, 4]$
4. Approcher la racine à 10^{-4} près par la méthode de Newton en posant $x_0 = 3$
5. D'après les résultats des question 2.*ii*) et 3., comparer les deux méthodes.

Corrigé

Exercice 1. :

1. On a $x = 0,23371258 \times 10^{-4}$; $y = 0,33678429 \times 10^{2}$ $z = -0,33677811 \times 10^{2}$

$$\begin{aligned} fl(x+y) &= fl(0,23371258 \times 10^{-4} + 0,33678429 \times 10^{2}) \\ &= fl(0,00000023371258 \times 10^{2} + 0,33678429 \times 10^{2}) \\ &= 0,33678452 \times 10^{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} fl(x+y)+z &= fl(0,33678452 \times 10^{2} - 0,33677811 \times 10^{2}) \\ &= fl(0,00000641 \times 10^{2}) \\ &= 0,641 \times 10^{-3}. \end{aligned}$$

Par ailleurs :

$$\begin{aligned} fl(y+z) &= fl(0,33678429 \times 10^{2} - 0,33677811 \times 10^{2}) \\ &= fl(0,00000618 \times 10^{2}) \\ &= 0,618 \times 10^{-3} \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} fl(x+(y+z)) &= fl(0,023371258 \times 10^{-3} + 0,61800000 \times 10^{-3}) \\ &= 0,64137126 \times 10^{-3} \end{aligned}$$

2. Pour $t = 3$ (trois chiffres significatifs), considérons l'opération

$$\begin{aligned}
fl(122 \times (333+695)) &= fl(0.122 \times 10^3) \\
&\quad \times fl((0.333 \times 10^3 + 0.695 \times 10^3)) \\
&= fl(0.122 \times 10^3) \times fl((1.028 \times 10^3)) \\
&= fl(0.122 \times 10^3) \times fl((0.103 \times 10^4)) \\
&= fl(0.012566 \times 10^7) \\
&= fl(0.12566 \times 10^6) \\
&= 0.126 \times 10^6 \\
fl(122 \times 333 + 122 \times 695)) &= fl(0.122 \times 10^3 \times 0.333 \times 10^3) \\
&\quad + fl(0.122 \times 10^3 \times 0.695 \times 10^3) \\
&= fl(0,040626 \times 10^6) + fl(0,08479 \times 10^6) \\
&= fl(0,40626 \times 10^5) + fl(0,8479 \times 10^5) \\
&= fl(0.406 \times 10^5) + fl(0.848 \times 10^5) \\
&= fl(1,254 \times 10^5) \\
&= 0.125 \times 10^6
\end{aligned}$$

Exercice 2. :

1. On suppose que le discriminant $\Delta > 0$ donc
$x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
$$\Longrightarrow x_1.x_2 = \frac{(-b+\sqrt{b^2-4ac})(-b-\sqrt{b^2-4ac})}{4a^2} = \frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2} = \frac{c}{a}$$
2. on a $\Delta' = 817^2 - 2 = 667487 \Longrightarrow \sqrt{\Delta'} = 816;9987760$ d'où les solutions : $x_1 = 817 + 816,9987760 = 1633,998776$ et $x_2 = 817 - 816,9987760 = 0,0012240$
3. On a $x_1 x_2 = \dfrac{c}{a} = 2 \Longrightarrow x_2 = \dfrac{2}{x_1} = \dfrac{2}{1633,998776} = 0,001223991125$
4. Dans la méthode de la question 2 on a perte de 5 chiffres significatifs sur x_2

Exercice 3. :

1. On a $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 1, \quad f'(x) = 3e^{-x} > 0 \ \forall x.$
   f est donc continue, strictement croissante sur $]-\infty, 1[$ donc il existe une unique racine $\theta \in \mathbb{R}$
2. on a $f(1) = 1 - 3/e < 0, \quad f(2) = 1 - 3/e^2 > 0$, donc $\theta \in [1; 2]$.
3. $i)$ La fonction d'itération est $g(x) = x + f(x)$.
   On a bien $g(x) = x \Longleftrightarrow f(x) = 0$,
   mais $g'(x) = |1 + 3e^{-x}| > 1 \quad \forall x \in [1, 2]$
   Donc la suite récurrente $x_{n+1} = g(x_n)$ ne converge pas vers θ

   $ii)$ On a $g_\lambda(x) = x + \lambda f(x)$. Pour $\lambda \neq 0$ on a bien $g_\lambda(x) = x \Longleftrightarrow f(x) = 0$.
   On cherche λ tel que $|g'_\lambda(x)| = |1 + 3\lambda e^{-x}| < 1 \quad \forall x \in [1, 2]$
   Donc il suffit de choisir $\lambda \in]-\frac{3}{2}e, 0[$.

   $iii)$ La méthode de Newton donne la suite

$$x_{n+1} = x_n + 1 - \frac{1}{3}e^{x_n}$$

   Pour le choix de l'intervalle on a $f'(x) > 0 \ \forall x, f''(x) < 0 \ \forall x$,
   donc $[1, 2]$ satisfait les conditions de convergence de la méthode de Newton.
   On peut prendre $x_0 = 1$.

Exercice 4. :

1. On a $f(0) = -2 < 0, f(4) = 4e - 6 > 0$; f étant continue, $\exists \theta \in]0, 4[$ tel que $f(a) = 0$.
   On a $f'(x) = e^{x/4}$ (f est croissante) donc le zéro est unique , et son expression explicite est $\theta = 4\ln(3/2)$
2. Vu que $f(0)f(4) < 0$, on peut bien appliquer la méthode de bissection pour calculer le zéro θ.
3. Il est facile de prouver que θ est un point fixe de g_i , pour $i = 1, 2, 3$.
   La méthode i est localement convergente si $|g'_i(\theta)| < 1$
   donc, vu que $|g'_1(\theta)| = 5/2 > 1$, $|g'_2(\theta)| = 0 < 1$, $|g'_3(\theta)| = 125/128 < 1$
   donc la méthode 1 n'est pas convergente, tandis que les méthodes 2 et 3 sont convergente ;

   $i)$ la méthode 2 est d'ordre 2 car $g'_2(\theta) = 0$ et $g''_2(\theta) = 1 + \frac{3}{8}e^{-\theta/4} \neq 0$,

$ii)$ la méthode 3 est d'ordre 1 car $g_3'(\theta) \neq 0$.

De plus : Grâce à

$$g_2'(x) = 1 - \frac{3}{2}e^{-x/4}, \ \ g_3'(x) = 1 - \frac{1}{64}e^{x/4}$$

on peut vérifier que pour $i = 2, 3$ on a $\max_{x \in [0,4]} |g_i'(x)| < 1$, donc les méthodes 2 et 3 sont globalement convergentes sur $]0, 4[$.

4. On a :

$$|x_{n+1} - \theta| = |g_3(x_n) - g_3(\theta)| = |g_3'(c)(x_n - \theta)| \leq K|x_n - \theta|.$$

avec $c \in]0, 4[$ et $K = \max_{x \in [0,4]} |g_3'(x)| = 63/64$

5. Comme $|x_n - \theta| \leq K^n |x_0 - \theta| < 2K^n$
on veut trouver le plus petit des n tels que $2K^n < 10^{-6}$. Donc

$$n > \frac{\ln 2 + 6 \ln 10}{-\ln K} = \frac{\ln 2 + 6 \ln 10}{\ln(64/63)}$$

d'où $n \geq 921$.

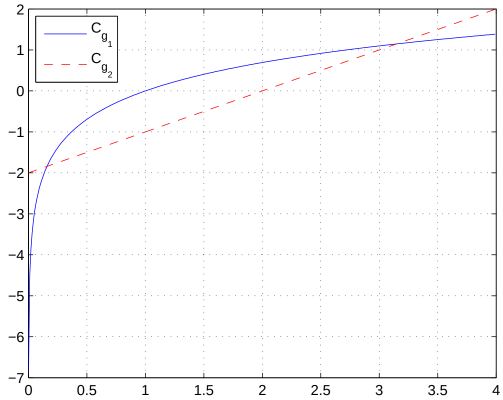
Exercice 5. :
On considère l'équation $f(x) = 0$, avec $f(x) = ln(x) - x + 2$

1. **a)**

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Leftrightarrow ln(x) - x + 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow ln(x) = x - 2 \\ &\Leftrightarrow g1(x) = g2(x) \end{aligned}$$

avec $g_1(x) = ln(x)$ et $g_2(x) = x - 2$

b) les graphes de g_1 et g_2 possède 2 points d'intersection, donc l'équation $f(x) = 0$ possède 2 racines $\theta_1 \in [0, 1]$ et $\theta_2 \in [3, 4]$



2. **a)** les 4 itérations de la méthodes de dichotomie à partir de l'intervalle $[3;4]$

n	a	b	x_k	$f(a)$	$f(b)$	$f(x_k)$	$(a-b)/2$
1	3.00000	4.00000	3.50000	0.09861	-0.61370	-0.24723	0.50000
2	3.00000	3.50000	3.25000	0.09861	-0.24723	-0.07134	0.25000
3	3.00000	3.25000	3.12500	0.09861	-0.07134	0.01443	0.12500
4	3.12500	3.25000	3.18750	0.01443	-0.07134	-0.02826	0.06250
5	3.12500	3.18750	3.15625	0.01443	-0.02826	-0.00686	0.03125
6	3.12500	3.15625	3.14062	0.01443	-0.00686	0.00379	0.01562

$x_3 = 3.125$ ($3^{ème}$ itération) est le meilleur résultat obtenu (même par rapport à x_4) car $f(x_3) = 0.0144$ est le plus proche de 0. On conclut que même si la convergence de la méthode de Dichotomie vers la racine est sûre, elle n'est pas monotone.

b) Nombre d'itérations n à faire pour avoir $\Delta x \leq 10^{-4}$
on a $\Delta x = |c_n - \theta|$ et $b - a = 3 - 4 = 1$ alors :

$$|c_n - \theta| \leq \frac{1}{2^{n+1}} \leq 10^{-4}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2^{n+1}} \leq 10^{-4} &\iff 10^4 \leq 2^{n+1} \\
&\iff 4\log(10) \leq (n+1)\log(2) \\
&\iff \frac{4\log(10)}{\log(2)} - 1 \leq n \\
&\implies 12,28771238 \leq n \\
&\implies n = 13
\end{aligned}$$

c) Estimation de l'erreur après 25 itérations on a $\Delta x = |c_n - \theta|$, et $b - a = 3 - 4 = 1$ et $n = 25$ alors :

$$|c_n - \theta| \leq \frac{1}{2^{26}}$$

Donc

$$\Delta x = |c_n - \theta| \leq 1,49012 \times 10^{-08}$$

3. les 4 itérations de la méthodes de fausse position à partir de l'intervalle $[3;4]$

n	a	b	x_k	$f(a)$	$f(b)$	$f(x_k)$	Δx
1	3.00000	4.00000	3.13844	0.09861	-0.61371	0.00529	1.00000
2	4.00000	3.13844	3.14580	-0.61371	0.00529	0.00027	0.86156
3	3.13844	3.14580	3.14619	0.00529	0.00027	-0.00000	0.00736
4	3.14580	3.14619	3.14619	0.00027	-0.00000	0.00000	0.00040
5	3.14619	3.14619	3.14619	-0.00000	0.00000	0.00000	0.00000

4. Approche de la racine à 10^{-4} près par la méthode de newton avec $x_0 = 3$
$\underline{AlgorithmedeNewton}$:

$$x_0 = 3; \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n(\ln(x_n) - x_n + 2}{1 + x_n}$$

x_k	$f(x_k)$	$f'(x_k)$	$\|x_{k+1} - x_k\|$
3.00000	0.09861	-0.66667	
3.14792	-0.00118	-0.68233	0.14792
3.14619	-0.00000	-0.68216	0.00172
3.14619	-0.00000	-0.68216	0.00000

5. Comparaison des deux méthodes
Pour atteindre une précision de 10^{-4} il faudrait faire 14 itérations de la méthode de dichotomie alors que la méthode de Newton ne nécessite que 3 itération. La méthode de Newton converge beaucoup plus rapidement que la méthode de dichromie.