UNIVERSITE MOHAMMED PREMIER
ECOLE NATIONALE DES SCIENCES APPLIQUEES
OUJDA-MAROC

Filière : GIndus3 — Année universitaire : 2020-2021

Module : Méthodes Numériques — Enseignant : M. Derouich

Fiche TD $N°$: 2

Exercice 1 (Interpolation de Newton)**.** :

On interpole $f(x) = ln(x)$ par un polynôme aux points d'interpolation

$$x_0 = 1, x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = 4, x_4 = 5.$$

1. Trouver une expression algébrique de ce polynôme en utilisant la méthode de Newton.
2. Estimer la valeur de $f(6, 32)$ avec le polynôme trouvé en 1.
3. Calculer l'erreur absolue.
4. Combien de points d'interpolation à intervalle régulier de 0,5 faudrait-il ajouter, en partant de $x_5 = 5, 5$, afin que l'erreur absolue de l'estimé de $f(6, 32)$ obtenu en 2. diminue d'un facteur 100.
5. Sur l'intervalle $[3, 4]$, le graphe du polynôme trouvé en 1. est-il au-dessus de celui de $f(x)$, en dessous, ou se croisent-ils ?

Exercice 2 (Interpolation de Lagrange)**.**

Soit les trois points $(0, 1)$, $(\pi/16, \cos(\pi/16)$ et $(\pi/8, \cos(\pi/8))$ de la fonction $f(x) = \cos(x)$.

1. Obtenir à l'aide de l'interpolation de Lagrange, le polynôme de degré 2 qui passe par les 3 points et en déduire une approximation de $cos(\pi/32)$.
2. Calculer le développement de Taylor de degré 2 de la fonction f(x)= cos(x) autour de $x_0 = 0$ et en déduire une approximation de $cos(\pi/32)$.
3. Sachant que $f'(0) = 0$, calculer le polynôme de degré 2, passant par les points $(0, 1)$ et $(\pi/8, \cos(\pi/8)$ et dont la dérivée en $x = 0$ est égale à 0 et en déduire une approximation de $cos(\pi/32)$.
4. Des trois approximations $cos(\pi/32)$. que vous avez obtenues, qu'elle est la plus précise ? Pourquoi ?

Exercice 3. :

En relevant toutes les 10 secondes la vitesse d'écoulement de l'eau dans une conduite cylindrique, on a obtenu

t	0	10	20	30
v	2	1.89	1.72	1.44

1. Trouver une approximation de la vitesse en $t = 15$ via un polynôme interpolant de degré 2 ;
2. Répéter l'opération avec un polynôme de degré 3.

Corrigé

Exercice 1. :

On interpole $f(x) = \ln x$ par un polynôme, aux points d'interpolation $1, 2, 3, 4, 5$.

1. Il y a 5 points d'interpolation, donc le degré du polynôme est 4. Le polynôme de Newton est donné par :

$$P_n(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1]N_1(x) + ... + f[x_0, ..., x_n]N_n(x)$$

Avec $N_0(x) = 1,\ N_1(x) = (x - x_0), \cdots,\ N_n(x) = (x - x_0)\cdots(x - x_{n-1})$
Donc on construit la table des différences divisées comme suit :

i	x_i	$f[x_i]$	$f[x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-2}, x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-3}, x_{i-2}, x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-4}, x_{i-3}, \cdots, x_i]$
0	1	0				
1	2	0,693 147 1806	0,693 147 1806			
2	3	1,098 612 289	0,405 465 1084	-0,143 841 0361		
3	4	1,386 294 361	0,287 682 072	-0,058 891 5182	0,028 316 505 97	
4	5	1,609 437 912	0,223 143 551	-0,032 269 2605	0,008 874 085 90	-0,004 860 605 018

Le polynôme de Newton de degré 4 est donc :
$P_4(x) = D_0 + D_1N_1(x) + D_2N_2(x) + D_3N_3(x) + D_4N_4(x)$
$D_0 = f[x_0] = 0,$
$D_1 = f[x_0, x_1] = 0,6931471806,$
$D_2 = f[x_0, x_1, x_2] = -0,1438410361,$
$D_3 = f[x_0, x_1, x_2, x_3] = 0,02831650597,$
$D_4 = f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4] = -0,004860605018.$

$$\begin{aligned}\Longrightarrow P_4(x) = {} & 0,6931471806(x-1) - 0,1438410361(x-1)(x-2) \\ & +0,02831650597(x-1)(x-2)(x-3) \\ & -0,004860605018(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P_4(x) = {} & -0.004860605018x^4 + 0.07692255615x^3 - .4838612475x^2 \\ & +1.679182105x - 1.267382809\end{aligned}$$

2. Pour l'estimation, il suffit d'évaluer le polynôme P_4 en $x = 6,32$.
On obtient alors $P_4(6,32) = 1,68190203$. Or $f(6,32) = \ln(6,32) \simeq 1,843719208$.
L'erreur absolue est donc $E = |1,68190203 - 1,843719208| \simeq 0.161817178$.

3. On veut maintenant diminuer cette erreur d'un facteur 100 et donc obtenir une erreur absolue de $0,001618$.

Le polynôme de Newton de degré 5 obtenu en ajoutant le nœud $x_5 = 5,5$ est :

$$\begin{aligned} P_5(x) &= P_4(x) + f[x_0, \cdots, x_5](x-1)(x-2)\cdots(x-5) \\ &= P_4(x) + 0,78558 \times 10^3 (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5) \end{aligned}$$

de sorte que $P_5(6,32) = 1,681902 + 0,183563 = 1,865465$.
L'erreur absolue est alors $E = |ln(6,32) - 1,865465| = 0,021746$
et il faut encore ajouter un nœud ($x_6 = 6,0$) pour obtenir :

$$\begin{aligned} P_6(x) &= P_5(x) + f[x_0, \cdots, x_6](x-1)(x-2)\cdots(x-5)(x-5,5) \\ &= P_5(x) - 0,11905 \times 10^{-3} (x-1)(x-2)\cdots(x-5,5) \end{aligned}$$

On a alors $P_6(6,32) = 1,865465 - 0,2281 = 1,842654$ et l'erreur absolue est donnée par $E = |1,842654 - \ln(6,32)| = 0,001065$,
ce qui est mieux que la précision requise.

4. On sait que l'erreur exacte peut s'écrire

$$E = \frac{1}{5!} f^{(5)}(\xi(x))(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5); \xi \in [1;5]$$

et nous sommes intéressés au signe de l'erreur.
Or la fonction $f^{(5)}(t) = \dfrac{24}{t^5} \left(\text{car} \quad \ln^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n} \right)$
et donc le signe de l'erreur ne dépend que de celui de

$$(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)$$

Si $x \in [3,4]$, alors trois des facteurs sont positifs et deux sont négatifs. Par conséquent, l'erreur est positive et le graphe de $\ln(x)$ est au dessus de celui de $P_4(x)$.

Exercice 2. :

1. Rappelons que le polynôme de Lagrange basé sur les points d'interpolation d'abscisses $x_0, x_1, ..., x_n$ est de degré n et s'écrit :
$P_n(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + ... + L_n(x)f(x_n)$
avec $L_i(x) = \displaystyle\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{j=n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$
On a les points d'interpolation donnés par :
$x_0 = 0, \quad x_1 = \pi/16 \quad \text{et} \quad x_2 = \pi/8$,
$f(x_0) = 1$, $\quad f(x_1) = \cos(\pi/16)$, $f(x_2) = \cos(\pi/8)$, détermineront donc un polynôme de Lagrange de degré 2, celui-ci s'écrit :

$$P_2(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + L_2(x)f(x_2)$$

Avec $L_0(x) = \dfrac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \dfrac{(x-\pi/16)(x-\pi/8)}{(-\pi/16)\times(-\pi/8)} = \dfrac{(x-\pi/16)(x-\pi/8)}{\pi^2/128}$

$L_1(x) = \dfrac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \dfrac{x(x-\pi/8)}{\pi/16(\pi/16-\pi/8)} = \dfrac{-x(x-\pi/8)}{\pi^2/256}$

$L_2(x) = \dfrac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \dfrac{x(x-\pi/16)}{\pi/8(\pi/8-\pi/16)} = \dfrac{x(x-\pi/16)}{\pi^2/128}$

finalement

$$\begin{aligned}
P_2(x) &= L_0(x)f(x_0)+L_1(x)f(x_1)+L_2(x)f(x_2)\\
&= \frac{(x-\pi/16)(x-\pi/8)}{\pi^2/128} + \frac{-x(x-\pi/8)}{\pi^2/256}\cos(\pi/16) + \frac{x(x-\pi/16)}{\pi^2/128}\cos(\pi/8)\\
&= 128\left(\frac{(x-\pi/16)(x-\pi/8)}{\pi^2} + 2\frac{-x(x-\pi/8)}{\pi^2}\cos(\pi/16)\right)\\
&\qquad +128\frac{x(x-\pi/16)}{\pi^2}\cos(\pi/8)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos(\pi/32) &\simeq P_2(\pi/32)\\
&\simeq 128\left(\frac{(\pi/32-\pi/16)(\pi/32-\pi/8)}{\pi^2} + 2\frac{-\pi/32(\pi/32-\pi/8)}{\pi^2}\cos(\pi/16)\right)\\
&\qquad +128\frac{\pi/32(\pi/32-\pi/16)}{\pi^2}\cos(\pi/8)\\
&\simeq \frac{128\pi^2}{32^2}\left(\frac{(1-2)(1-4)}{\pi^2} + 2\frac{-(1-4)}{\pi^2}\cos(\pi/16) + \frac{(1-2)}{\pi^2}\cos(\pi/8)\right)\\
&\simeq \frac{1}{8}\left(3+6\cos(\pi/16)-\cos(\pi/8)\right)\\
&\simeq \frac{3}{8}+\frac{3}{4}\cos(\pi/16)-\frac{1}{8}\cos(\pi/8)\\
&\simeq 0.995104018738512
\end{aligned}$$

2. On a $\cos(x) = 1-\dfrac{1}{2}x^2+o(x^2)$ ce qui donne

   $\cos(\pi/32) \simeq 1-\dfrac{1}{2}(\pi/32)^2 \simeq 0.995180857226031$

3. on a $P_2(x) = \alpha x^2+\beta x+\gamma$ donc

$$\left\{\begin{array}{rcl} P_2(0) &=& 1\\ P_2(\pi/8) &=& \cos(\pi/8)\\ P_2'(0) &=& 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} \gamma &=& 1\\ \alpha(\frac{\pi}{8})^2+\beta\frac{\pi}{8}+\gamma &=& \cos(\frac{\pi}{8})\\ \beta &=& 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} \gamma &=& 1\\ \alpha &=& \frac{64}{\pi^2}\left(-1+\cos(\frac{\pi}{8})\right)\\ \beta &=& 0 \end{array}\right.$$

$\Longrightarrow P_2(x) = \dfrac{64}{\pi^2}\left(-1+\cos(\dfrac{\pi}{8})\right)x^2+1$

$\Longrightarrow P_2(\dfrac{\pi}{32}) = \dfrac{64}{\pi^2}\left(-1+\cos(\dfrac{\pi}{8})\right)\dfrac{\pi^2}{32^2}+1 = \dfrac{15}{16}+\dfrac{1}{16}\cos(\dfrac{\pi}{8})$

$\Longrightarrow \cos(\pi/32) \simeq P_2(\dfrac{\pi}{32}) = 0.995242470781955$

4. on a $\cos(\pi/32) = 0.995184726672197$ Le développement de Taylor de dégré 2 donne la meilleure approximation. Cela s'explique par le fait que $\pi/32$ soit proche de 0 et que le polynôme de Taylor utilise les valeurs exactes de $f(0)$, $f'(0)$ et $f''(0)$.

Exercice 3. :

i	x_i	$f[x_i]$	$f[x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-2}, x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-3}, x_{i-2}, x_{i-1}, x_i]$
0	0	2			
1	10	1.89	-0.011		
2	20	1.72	-0.017	-0.0003	
3	30	1.44	-0.028	-0.00055	-0.00000833333

1. Pour avoir un polynôme de degré 2 on va prendre trois points d'interpolation, le polynôme de Newton de degré 2 est donné par :

$$P_2(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)$$

$\Longrightarrow P_2(x) = 2 - 0.011x - 0.0003x(x - 10)$
$\Longrightarrow P_2(15) = 1.8125$

2. Pour avoir un polynôme de degré 3 on va prendre quatre points d'interpolation, le polynôme de Newton de degré 2 est donné par :

$$P_3(x) = P_2(x) + f[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

$\Longrightarrow P_3(15) = 1.8125 + -0.833333 \times 10^{-5}x(x - 10)(x - 10)$
$\qquad = 1.8125 + 0.0031125$
$\Longrightarrow P_3(15) = 1.815625$