UNIVERSITE MOHAMMED PREMIER
ECOLE NATIONALE DES SCIENCES APPLIQUEES
OUJDA-MAROC

Filière : GIndus3 — Année universitaire : 2020-2021
Module : Méthodes Numériques — Enseignant : M. Derouich

Fiche TD $N°$: 3

Exercice 1. :
Soit le système linéaire

$$(S_1) : \begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + x_3 = 11 & (L_1) \\ -2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = -16 & (L_2) \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 17 & (L_3) \end{cases}$$

1. Résoudre le système (S_1) par la méthode d'élimination de GAUSS.
2. Ecrire le système (S_1) sous forme $AX = b$.
3. Ecrire le système triangulaire supérieur (S_2) sous forme $UX = \beta$ obtenu par la méthode d'élimination de Gauss.
4. Déduire le déterminant de A.

Exercice 2. :
Soit le système linéaire

$$(S_1) : \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 & (L_1) \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 2 & (L_2) \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 & (L_3) \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 4 & (L_3) \end{cases}$$

1. Ecrire le système (S_1) sous forme $AX = b$.
2. Calculer la factorisation LU de la matrice A.
3. Résoudre le système linéaire (S_1) en utilisant la factorisation LU.
4. Déduire le déterminant de A.
5. Calculer A^{-1}.

Exercice 3. :
On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -4 \\ 2 & -4 & 11 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que la matrice A est symétrique définie positive
2. Calculer la factorisation de Cholesky de A

Corrigé

Exercice 1. :
Soit le système linéaire

$$(S_1) : \begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + x_3 = 11 & L_1 \\ -2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = -16 & L_2 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 17 & L_3 \end{cases}$$

1. Résoudre le système (S_1) par la méthode d'élimination de GAUSS.
2. Ecrire le système (S_1) sous forme $AX = b$.
3. Ecrire le système triangulaire supérieur (S_2) sous forme $UX = \beta$ obtenu par la méthode d'élimination de Gauss.
4. Déduire le déterminant de A.

Corrigé

1. $$(S_1) : \begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + x_3 & = & 11 & L_1 \\ -2x_1 + 4x_2 - 2x_3 & = & -16 & L_2 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 & = & 17 & L_3 \end{cases}$$

   Etape1:

   $$m_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{-2}{4} = -0.5 \text{ et } m_{31} = \frac{a_{31}}{a_{11}} = \frac{1}{4} = 0.25$$

   Donc

   $$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + x_3 & = & 11 & L_1^{(1)} \leftarrow L_1 \\ 3x_2 - 1.5x_3 & = & -10.5 & L_2^{(1)} \leftarrow L_2 - (-0.5)L_1 \\ -1.5x_2 + 3.75x_3 & = & 14.25 & L_3^{(1)} \leftarrow L_3 - 0.25L_1 \end{cases}$$

   Etape2:

   $$m_{32} = \frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} = \frac{-1.5}{3} = -0.5$$

   $$(S_2) \begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + x_3 & = & 11 & L_1^{(2)} \leftarrow L_1^{(1)} \\ 3x_2 - 1.5x_3 & = & -10.5 & L_2^{(2)} \leftarrow L_2^{(1)} \\ 3x_3 & = & 9 & L_3^{(2)} \leftarrow L_3^{(2)} - (-0.5)L_2^{(1)} \end{cases}$$

D'où :

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{9}{3} = 3 \\ x_2 &= (-10.5 + 1.5x_3)/3 = -2 \\ x_1 &= (11 + 2x_2 - x_3)/4 = 1 \end{aligned}$$

2. le système (S_1) s'écrit sous forme matricielle $AX = b$ avec :
A=$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 11 \\ -16 \\ 17 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$
3. le système (S_2) s'écrit sous forme matricielle $UX = \beta$ avec :
U=$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -1.5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} 11 \\ -10.5 \\ 9 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$
4. On a $\dim(A) = \dim(U) = u_{11} \times u_{22} \times u_{33} = 4 \times 3 \times 3 = 36$

Exercice 2. :
Soit le système linéaire

$$(S_1) : \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 & L_1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 2 & L_2 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 & L_3 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 4 & L_3 \end{cases}$$

1. Ecrire le système (S_1) sous forme $AX = b$.
2. Calculer la factorisation LU de la matrice A.
3. Résoudre le système linéaire (S_1) en utilisant la factorisation LU.
4. Déduire le déterminant de A.
5. Calculer A^{-1}.

Corrigé

1. le système (S_1) s'écrit sous forme matricielle $AX = b$ avec :
A=$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$

2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} (L_1) \\ (L_2) \\ (L_3) \\ (L_4) \end{matrix}$$

Etape1:

$m_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{2}{1} = 2$, $m_{31} = \frac{a_{31}}{a_{11}} = \frac{3}{1} = 3$ et $m_{41} = \frac{a_{41}}{a_{11}} = \frac{4}{1} = 4$

Donc

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & -2 & -8 & -10 \\ 0 & -7 & -10 & -13 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1^{(1)} \leftarrow L_1 \\ L_2^{(1)} \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_2^{(1)} \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_2^{(1)} \leftarrow L_2 - 4L_1 \end{matrix}$$

Etape2: $m_{32} = \frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} = \frac{-2}{-1} = -2$ et $m_{32} = \frac{a_{42}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} = \frac{-7}{-1} = 7$

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 36 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1^{(2)} \leftarrow L_1^{(1)} \\ L_2^{(2)} \leftarrow L_2^{(1)} \\ L_3^{(2)} \leftarrow L_3^{(1)} - 2L_2^{(1)} \\ L_4^{(2)} \leftarrow L_4^{(1)} - 7L_2^{(1)} \end{matrix}$$

Etape3: $m_{43} = \frac{a_{43}^{(2)}}{a_{33}^{(2)}} = \frac{4}{-4} = -1$

$$A^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 40 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1^{(3)} \leftarrow L_1^{(2)} \\ L_2^{(3)} \leftarrow L_2^{(2)} \\ L_3^{(3)} \leftarrow L_3^{(2)} \\ L_4^{(3)} \leftarrow L_4^{(2)} + L_3^{(2)} \end{matrix}$$

Donc $U = A^{(3)}$ et

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 1 & 0 \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & 1 \end{pmatrix}$$

D'où : $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 7 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 40 \end{pmatrix}$

3. Pour résoudre le système linéaire (S_1) on résout d'abord le système $Ly = b$ et ensuite le système $Ux = y$.

$$Ly = b \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 7 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} y_1 = 1 \\ 2y_1 + y_2 = 2 \\ 3y_1 + 2y_2 + y_3 = 3 \\ 4y_1 + 7y_2 - y_3 + y_4 = 4 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y_1 = 1 \\ y_2 = 0 \\ y_3 = 0 \\ y_4 = 0 \end{cases}$$

$$Ux = y \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 40 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 1 \\ -x_2 - 2x_3 - 7x_4 &= 0 \\ -4x_3 + 4x_4 &= 0 \\ 40x_4 &= 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

4. On a $\dim(A) = \dim(LU) = \dim(L).\dim(U) = u_{11} \times u_{22} \times u_{33} \times u_{44} = 160$
5. Pour calculer A^{-1} on résout les quatre les systèmes linéaires suivants : $AX = e_1$, $AX = e_2$, $AX = e_3$ et $AX = e_4$ avec :

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

On a $Ax = e_1 \Longleftrightarrow LUx = e_1$ donc pour résoudre le système linéaire $Ax = e_1$ on résout d'abord le système $Ly = e_1$ et ensuite le système $Ux = y$.

$$Ly = e_1 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 7 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} y_1 = 1 \\ 2y_1 + y_2 = 0 \\ 3y_1 + 2y_2 + y_3 = 0 \\ 4y_1 + 7y_2 - y_3 + y_4 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y_1 = 1 \\ y_2 = -2 \\ y_3 = 1 \\ y_4 = 11 \end{cases}$$

$$Ux = y \iff \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 40 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 & = & 1 \\ -x_2 - 2x_3 - 7x_4 & = & -2 \\ -4x_3 + 4x_4 & = & 1 \\ 40x_4 & = & 11 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{r} x_1 = -9/40 \\ x_2 = 1/40 \\ x_3 = 1/40 \\ x_4 = 11/40 \end{array} \right.$$

$$\Longrightarrow X_1 = \begin{pmatrix} -9/40 \\ 1/40 \\ 1/40 \\ 11/40 \end{pmatrix}$$

Les autres systèmes seront résolus de la même manière :

$$AX_2 = e_2 \iff X_2 = \begin{pmatrix} 1/40 \\ 1/40 \\ 11/40 \\ -9/40 \end{pmatrix}$$

$$AX_3 = e_3 \iff X_3 = \begin{pmatrix} 1/40 \\ 11/40 \\ -9/40 \\ 1/40 \end{pmatrix}$$

$$AX_4 = e_4 \iff X_4 = \begin{pmatrix} 11/40 \\ -9/40 \\ 1/40 \\ 1/40 \end{pmatrix}$$

D'où

$$A^{-1} = (X_1, X_2, X_3, X_4) = \frac{1}{40} \begin{pmatrix} -9 & 1 & 1 & 11 \\ 1 & 1 & 11 & -9 \\ 1 & 11 & -9 & 1 \\ 11 & -9 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 3. :

On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -4 \\ 2 & -4 & 11 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que la matrice A est symétrique définie positive
2. Calculer la factorisation de Cholesky de A

Corrigé

1. Montrons que A est symétrique définie positive

   On a $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -4 \\ 2 & -4 & 11 \end{pmatrix} = A^t$

   Donc A est symétrique.

   On a : $a_{11} = 4 > 0$, $\dim \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = 4 > 0$ et $\dim A = 4 > 0$

   Donc A est symétrique définie positive

2. $A = LL^t$ avec $L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix}$

   Pour $k = 1$ on a $\left\{ \begin{array}{lcl} l_{11} & = & \sqrt{a_{11}} \\ l_{i1} & = & \dfrac{a_{i1}}{l_{11}} \text{ pour } i = 2, \cdots, n \end{array} \right. \overset{k=1}{\Longrightarrow} \left\{ \begin{array}{lcl} l_{11} & = & \sqrt{a_{11}} = 2 \\ l_{21} & = & \dfrac{a_{21}}{l_{11}} = \dfrac{-2}{2} = -1 \\ l_{31} & = & \dfrac{a_{31}}{l_{11}} = \dfrac{2}{2} = 1 \end{array} \right.$

   Pour $k > 1$ on a

$$\left\{ \begin{array}{lcl} l_{kk} & = & \sqrt{a_{kk} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{kj}^2} \\ l_{ik} & = & \dfrac{a_{ik} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{ij} l_{kj}}{l_{kk}} \text{ pour } i = k+1, \cdots, n \end{array} \right.$$

$$\overset{k=2}{\Longrightarrow} \left\{ \begin{array}{lcl} l_{22} & = & \sqrt{a_{22} - l_{21}^2} = \sqrt{2-1} = 1 \\ l_{32} & = & \dfrac{a_{32} - l_{31} l_{21}}{l_{22}} = \dfrac{-4 - (-1) \times 1}{1} = -3 \end{array} \right.$$

$$\overset{k=3}{\Longrightarrow} \left\{ l_{33} = \sqrt{a_{33} - l_{31}^2 - l_{32}^2} = \sqrt{11 - 1^2 - (-3)^2} = 1 \right.$$

   $L = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$