UNIVERSITE MOHAMMED PREMIER
ECOLE NATIONALE DES SCIENCES APPLIQUEES
OUJDA-MAROC

Filière : GIndus3 — Année universitaire : 2020-2021
Module : Méthodes Numériques — Enseignant : M. Derouich

Fiche TD $N°$: 5

Exercice 1. :
Soit une fonction $f(x)$ connue seulement pour les valeurs de x suivantes :

x	0	$\pi/8$	$\pi/4$	$3\pi/8$	$\pi/2$
$f(x)$	0	0.382683	0.707107	0.923880	1

On désire évaluer $I = \int_0^{\pi/2} f(x)dx$.

1. Estimer la valeur de I à l'aide de la méthode des rectangles à gauche composite,
2. Estimer la valeur de I à l'aide de la méthode des trapèzes composite,
3. Estimer la valeur de I à l'aide de la méthode des Simpson composite,
4. Sachant que f est définie par $f(x) = sin(x)$, comparer alors les résultats obtenus avec la valeur exacte.
5. Rappeler la formule de l'erreur de quadrature pour chaque méthode. Donnez une estimation de l'erreur pour la fonction f, et la comparer avec l'erreur calculée dans la question précédente.

Corrigé

1. La méthode des trapèzes composite à $n+1$ points pour calculer l'intégrale d'une fonction f sur l'intervalle $[a, b]$ s'écrit

$$I_g^n = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{i=n} f(x_i) = \frac{b-a}{n}[f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

Avec $a = 0, b = \pi/2, n = 4$ donc on obtient

$$\begin{aligned} I_g &\approx \int_{a=0}^{b=\pi/2} f(x)dx \\ &= \frac{\pi}{8}[f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4)] \\ &= \frac{\pi}{8}[0.382683 + 0.707107 + 0.92388 + 1] \\ &= 1.183465442 \end{aligned}$$

2. La méthode des trapèzes composite à $n+1$ points pour calculer l'intégrale d'une fonction f sur l'intervalle $[a,b]$ s'écrit

$$\int_{a=x_0}^{b=x_n} f(x)dx = \frac{h}{2}[f(x_0) + 2f(x_1) + ...2f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

Avec $a = 0, b = \pi/2, n = 4$ d'où $h = \dfrac{b-a}{n} = \dfrac{\pi}{8}$ et on obtient

$$\begin{aligned} I_T &= \int_{a=0}^{b=\pi/2} f(x)dx \\ &= \frac{h}{2}[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + 2f(x_3) + f(x_4)] \\ &= \frac{\pi}{16}[0 + 2(0.382683 + 0.707107 + 0.92388)) + 1] \\ &= 0.987116 \end{aligned}$$

3. La méthode des Simpson composite à $n+1$ points pour calculer l'intégrale d'une fonction f sur l'intervalle $[a,b]$ s'écrit

$$\int_{a=x_0}^{b=x_n} f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n/2-1} f(x_{2i}) + 4\sum_{i=1}^{n/2} f(x_{2i-1}) + f(x_n)\right]$$

Avec $a = 0, b = \pi/2, n = 4$ d'où $h = \dfrac{b-a}{n} = \dfrac{\pi}{8}$ et on obtient

$$\begin{aligned} I_S &= \int_{a=0}^{b=\pi/2} f(x)dx \\ &= \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)] \\ &= \frac{\pi}{24}[0 + (4 \times 0.382683(+(2 \times 0.707107) + (4 \times 0.92388) + 1] \\ &= 1.000135 \end{aligned}$$

4. On a $I = \int_{a=0}^{b=\pi/2} \sin(x)dx = 1$

$$|I_g - I| = 0.183465$$

$$|I_T - I| = 0.012884$$

$$|I_S - I| = 0.000135$$

Donc la meilleure approximation de I est celle de la méthode de Simpson.

5.

✓ L'erreur commise par la méthode des rectangles à gauche composée est donnée par :

$$\left|I(f) - I_g^n\right| \leq M_1 \frac{(b-a)^2}{2n}$$

où $M_1 = \max\limits_{a \leq t \leq b} \left|f'(t)\right|$.

On a $a = 0, b = \pi/2, n = 4$ et $|f'(t)| \leq 1 \Longrightarrow M_1 = 1$.

$$\begin{aligned}
\left|I(f) - I_g^n\right| &\leq M_1 \frac{(b-a)^2}{2n} \\
&\leq \frac{(\pi/2)^2}{2 \times 4} \\
&\leq \frac{\pi^2}{32} \\
&\leq 0,3084251375340424568385778437461
\end{aligned}$$

✓ L'erreur commise par la méthode des trapèzes composée est donnée par :

$$E_1(f) = -\frac{(b-a)}{12} h^2 f''(\eta)$$

avec $\eta \in [a, b]$
On a $a = 0, b = \pi/2, n = 4$, $h = \dfrac{b-a}{n} = \dfrac{\pi}{8}$ et $|f''(t)| \leq 1$. Donc

$$\begin{aligned}
|E_1(f)| &\approx \frac{(b-a)}{12} h^2 \\
&\approx \frac{\pi^3}{1536} \\
&\approx 0,020186378047070195426742392621
\end{aligned}$$

✓ L'erreur commise par la méthode de Simpson composée est donnée par :

$$E_2(f) = -\frac{(b-a)}{180} h^4 f^{(4)}(\theta); \quad \theta \in [a, b]$$

On a $a = 0, b = \pi/2, n = 4$, $h = \dfrac{b-a}{n} = \dfrac{\pi}{8}$ et $\left|f^{(4)}(\theta)\right| \leq 1$. Donc

$$\begin{aligned}
|E_2(f)| &\approx \frac{\pi}{360} \frac{\pi^4}{4096} \\
&\approx \frac{\pi^5}{1474560} \\
&\approx 0.6605976768 \times 10^{-4}
\end{aligned}$$

Exercice 2. :

Trouver le nombre n de subdivisions nécessaires de l'intervalle d'intégration $[-\pi, \pi]$, pour évaluer à 0.5×10^{-3} près, grâce à la méthode de Simpson, l'intégrale

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(x) dx$$

Corrigé

On a $a = -\pi, b = \pi$ d'où $h = \frac{b-a}{n} = \frac{2\pi}{n}$ et l'erreur commise par la méthode de Simpson composée est donnée par :

$$\begin{aligned} E_2 &= -\frac{(b-a)}{180} h^4 f^{(4)}(\xi) \quad \xi \in [a,b] \\ &= -\frac{2\pi}{180} \left(\frac{2\pi}{n}\right)^4 \cos^{(4)}(\xi) \end{aligned}$$

par conséquent,

$$|E_2| \leq \frac{16\pi^5}{90n^4};$$

Ainsi pour que $|E_2| \leq 0.5 \times 10^{-3}$ il suffit que n vérifie

$$\frac{16\pi^5}{90n^4} \leq 0.5 \times 10^{-3} \Longrightarrow n^4 \geq \frac{1}{0.5 \times 10^{-3}} \frac{16\pi^5}{90}$$

Donc n vérifie $n \geq 18.16$. On prendra par exemple $n = 20$, car pour la méthode de Simpson, le nombre de subdivisions de l'intervalle $[a, b]$ doit toujours être pair.

Exercice 3. :

Soit α un nombre réel donné tel que $0 < \alpha \leq 1$ et soient $x_0 = -1, x_1 = 0, x_2 = \alpha$. Etant donnés ces trois points d'intégration, nous sommes intéressés à trouver trois nombres (poids) ω_0, ω_1 et ω_2 qui définiront la formule de quadrature

$$J(f) = \sum_{i=0}^{2} \omega_i f(x_i) = \omega_0 f(-1) + \omega_1 f(0) + \omega_2 f(\alpha),$$

où f est une fonction continue quelconque donnée sur $[-1, 1]$.

1. Trouver les poids ω_0, ω_1 et ω_2 en fonction de α tels que
$$J(P) = \int_{-1}^{1} P(x) dx$$
pour tout polynôme P de degré $m \leq 2$

2. Existe-t-il α tel que $J(P) = \int_{-1}^{1} P(x)dx$ pour tout polynôme P de degré $m \geq 3$? Si oui, quelle est la valeur maximale de m et que valent α, ω_0, ω_1 et ω_2 ?

Corrigé

1. On a :
   i) pour $P_0(x) = 1$

$$\begin{aligned}\omega_0 P_0(-1) + \omega_1 P_0(0) + \omega_2 P_0(\alpha) &= \int_{-1}^{1} P_0(x)dx \\ \omega_0 + \omega_1 + \omega_2 &= 2\end{aligned}$$

   ii) pour $P_1(x) = x$

$$\begin{aligned}\omega_0 P_1(-1) + \omega_1 P_1(0) + \omega_2 P_1(\alpha) &= \int_{-1}^{1} P_1(x)dx \\ -\omega_0 + \alpha\omega_2 &= 0\end{aligned}$$

   iii) pour $P_2(x) = x^2$

$$\begin{aligned}\omega_0 P_2(-1) + \omega_1 P_2(0) + \omega_2 P_2(\alpha) &= \int_{-1}^{1} P_2(x)dx \\ \omega_0 + \alpha^2\omega_2 &= \frac{2}{3}\end{aligned}$$

   On obtient le système suivant :

$$\begin{cases}\omega_0 + \omega_1 + \omega_2 &= 2 \\ -\omega_0 + \alpha\omega_2 &= 0 \\ \omega_0 + \alpha^2\omega_2 &= \dfrac{2}{3}\end{cases} \iff \begin{cases}\omega_1 &= 2 - (\omega_0 + \omega_2) \\ \omega_0 &= \alpha\omega_2 \\ \omega_0(1+\alpha) &= \dfrac{2}{3}\end{cases}$$

   On obtient donc

$$\omega_0 = \frac{2}{3(\alpha+1)}, \quad \omega_1 = \frac{6\alpha - 2}{3\alpha}, \quad \omega_2 = \frac{2}{3\alpha(\alpha+1)}.$$

2. pour $P_3(x) = x^3$

$$\begin{aligned}\omega_0 P_3(-1) + \omega_1 P_3(0) + \omega_2 P_3(\alpha) &= \int_{-1}^{1} P_3(x)dx \\ -\omega_0 + \alpha^3\omega_2 &= 0 \\ \iff \omega_0 &= \alpha^3\omega_2 \\ \iff \frac{2}{3(\alpha+1)} &= \alpha^3 \frac{2}{3\alpha(\alpha+1)} \\ \iff \alpha^2 &= 1 \\ \implies \alpha &= 1 \ \ (0 < \alpha \leq 1)\end{aligned}$$

Les poids deviennent alors $\omega_0 = \frac{1}{3}$, $\omega_1 = \frac{4}{3}$ et $\omega_2 = \frac{1}{3}$

Pour $P_4(x) = x^4$, avec $\alpha = 1$, $\omega_0 = \frac{1}{3}$, $\omega_1 = \frac{4}{3}$ et $\omega_2 = \frac{1}{3}$, on obtient

$$J(x^4) = \frac{1}{3}P_4(-1) + \frac{4}{3}P_4(0) + \frac{1}{3}P_4(1) = \frac{2}{3}$$

et

$$\int_{-1}^{1} P_4(x)dx = \frac{2}{5}.$$

Donc

$$J(P_4) \neq \int_{-1}^{1} P_4(x)dx$$

Ainsi la valeur maximale de m telle que la formule de quadrature intègre exactement les polynômes de degré m est $m = 3$.