UNIVERSITE MOHAMMED PREMIER
ECOLE NATIONALE DES SCIENCES APPLIQUEES
OUJDA-MAROC

Filière : GIndus3 — Année universitaire : 2020-2021
Module : Méthodes Numériques — Enseignant : M. Derouich

Fiche TD N° : 1

Exercice 1. :
En arithmétique flottante illustrer la non-validité de :

1. La loi d'associativité pour $x = 0,23371258 \times 10^{-4}$, $y = 0,33678429 \times 10^2$ et $z = -0,33677811 \times 10^2$ avec 8 chiffres significatifs
2. La loi de distributivité $x = 122, y = 333$ et $z = 395$ avec 3 chiffres significatifs et arrondi

Exercice 2. :
Soit l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a \neq 0$.
On suppose que le discriminant $\Delta > 0$

1. Vérifier que $x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$
2. Supposons que les calculs soient effectués avec 10 chiffres significatifs ($t = 10$), trouver les racines de $x^2 - 1634x + 2 = 0$
3. Calculer x_2 on fonction de x_1.
4. Que remarquez-vous ?

Exercice 3. :
On considère la fonction à valeurs réelles $f(x) = 1 - 3e^{-x}$

1. Montrer que f possède une seule racine réelle θ
2. Par un procédé de dichotomie, trouver un intervalle de longueur 1 contenant cette racine.
3. Pour l'approcher, on propose les schémas suivants :
   $i)$ $x_0 \in [1; 2]$, $x_{n+1} = x_n + f(x_n)$.
   Cette suite converge-t-elle vers θ ? Pourquoi ?
   $ii)$ Trouver une valeur de $\lambda \in \mathbb{R}$ qui assure la convergence de la suite
   $$x_{n+1} = x_n + \lambda f(x_n)$$
   $iii)$ Appliquer à $f(x)$ la méthode de Newton pour trouver θ.
   - Sur quelle fonction définit-on les itérations de point fixe ?
   - Dans quel intervalle doit-on choisir la valeur de départ pour que la convergence soit assurée ?

Exercice 4. :
On considère la fonction à valeurs réelles $f(x) = 4e^{x/4} - 6$ dans l'intervalle $]0;4[$.

1. Montrer qu'il existe un zéro θ pour la fonction f dans l'intervalle $]0;4[$ et trouver θ de façon analytique.
2. Peut-on appliquer la méthode de dichotomie pour calculer θ ? Justifiez votre réponse.
3. Pour approcher le zéro θ on considère les méthodes de point fixe $x_{n+1} = g_i(x_n)$, $i = 1, 2, 3$, avec
   $g_1(x) = x + 4e^{x/4} - 6$; $g_2(x) = x - 4 + 6e^{-x/4}$; $g_3(x) = x - \dfrac{e^{x/4}}{16} + \dfrac{3}{32}$
   Établir si les trois méthodes sont convergentes et, en cas affirmatif, en établir l'ordre de convergence.
4. Pour la méthode de fonction g_3 , montrer que dans $]0;4[$ on a la relation suivante :
   $$|x_{n+1} - \theta| \le C|x_n - \theta|; C < 1$$
   et proposer une estimation pour la constante C.
5. Finalement, pour la méthode de fonction g_3 , déterminer le nombre minimal d'itérations nécessaires pour avoir une erreur inferieure à 10^{-6} , lorsqu'on a choisi x_0 tel que $|x_0 - \theta| < 2$.

Exercice 5. :
On considère l'équation $f(x) = 0$, avec $f(x) = \ln(x) - x + 2$

1. *i*) Écrire l'équation $f(x) = 0$ sous la forme $g_1(x) = g_2(x)$ avec $g_1(x) = \ln(x)$.
   ii) Tracer les graphes de g_1 et g_2 et déduire le nombre de racines de $f(x) = 0$
2. *i*) Faire 4 itérations de la méthode de dichotomie à partir de l'intervalle $[3, 4]$
   ii) Quelle itération a donné le meilleur résultat ? Conclure.
   iii) Déterminer le nombre d'itération n à faire pour avoir $\Delta x \le 10^{-4}$
   iv) Donner une estimation de l'erreur après 25 itérations.
3. Faire 4 itérations de la méthode de fausse position à partir de l'intervalle $[3, 4]$
4. Approcher la racine à 10^{-4} près par la méthode de Newton en posant $x_0 = 3$
5. D'après les résultats des question 2.*ii*) et 3., comparer les deux méthodes.