Année Universitaire 2007/2008

UNIVERSITE MOULAY ISMAIL
Faculté des Sciences et Techniques
D'Errachidia
Département de Mathématiques

Mathématiques appliquées à la géophysique

Filière : MST Géophysique
(M281)

Présenté par :

Mohamed DEROUICH

Table des matières

Chapitre 1

Les séries

1.1 Série numérique

1.1.1 Définitions :

Définition 1.1 *soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à terme réels ou complexes on définie une nouvelle suite$(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :*

$$\begin{cases} S_0 &= U_0 \\ S_1 &= U_0 + U_1 \\ S_2 &= U_0 + U_1 + U_2 \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ S_n &= U_0 + U_1 + \cdots U_n \end{cases}$$

$i)$la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite série de terme général (U_n) . On la note par $\sum_{n=0}^{\infty} U_n$.

$ii)$la série $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite convergent si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers une limite fini S .

S est dit somme de la série $\sum_n U_n$ on écrit $S = \sum_{n=0}^{\infty} U_n$.

-$\sum_n U_n$ diverge si $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

$iii)$ Les séries $\sum U_n$ et $\sum V_n$ sont dites de même nature si elle sont tout les deux convergentes ou bien tout les deux divergentes.

$iv)$Si $\sum_{n=0}^{\infty} U_n = S$ la quantité $R_n = \sum_{n=0}^{\infty} U_n - S_n$ est dite reste d'ordre n de la série. $R_n = U_{n+1} + U_{n+2} + \cdots$

$v)$La série $\sum U_n$ est dit absolument convergente si $\sum |U_n|$ est convergente

1.1.2 Conditions de convergence

Proposition 1.1 *:*
$\sum U_n$ *est divergente* $\Longleftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \;\; \exists N \in I\!N/p > q \geq N$ *on a :*
$|U_{q+1} + U_{q+2} \cdots U_p| < \varepsilon$

Preuve :
$\sum U_n$ converge $\Leftrightarrow (S_n)_n$ converge avec : $S_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_n$
$(S_n)_n$ vérifie le critère de Cauchy
$\forall\varepsilon > 0 \;\; \exists N \in \mathbb{N}/p > q \geq N$ on a $|S_p - S_q| < \varepsilon$ or $S_p = U_0 + U_1 + \cdots U_q + U_{q+1} + \cdots + U_p$
d'où $\forall\varepsilon > 0 \;\; \exists N \in \mathbb{N}/p > q \geq N$ on a $|U_{q+1} + \cdots + U_p| < \varepsilon$ ■

Proposition 1.2 *:*
i)toute série est absolument convergente est convergente
ii)si $\sum U_n$ *est convergente alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$

Preuve :
i) $\sum U_n$ est absolument convergente donc :
$\forall\varepsilon > 0 \;\; \exists N \in \mathbb{N}/p > q \geq N$ on a $||U_{q+1}| + |U_{q+2}| + \cdots + |U_p|| < \varepsilon$ (critère de Cauchy)
or $|U_{q+1} + U_{q+2} \cdots + U_p| \leq ||U_{q+1}| + |U_{q+2}| + \cdots + |U_p|| \leq \varepsilon$
donc $\forall\varepsilon > 0 \;\; \exists N \in \mathbb{N}/p > q \geq N$ on a $|U_{q+1} + U_{q+2} \cdots + U_p| < \varepsilon$ d'où $\sum U_n$ est convergente
ii) si la série $\sum U_n$ converge, les deux suites $S_n = \sum\limits_{n=0}^{n} U_n$ et $S_{n-1} = \sum\limits_{n=0}^{n-1} U_n$ ont même limite S. Donc $U_n = S_n - S_{n-1}0$ tend vers zéro.

1.1.3 EXEMPLES

a)série géométrique

Soit la série de terme général $U_n = q^n$ avec $q \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

$$\begin{aligned} \text{On a } S_n &= U_0 + U_1 + \cdots + U_n \\ &= 1 + q + q^2 + \cdots + q^n \\ &= \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \end{aligned}$$

donc pour $|q| < 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$d'où :
$\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = \dfrac{1}{1 - q}$

Dans ce cas la série $\sum q^n$ converge, et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$$

Si $|q| > 1 \Rightarrow U_n = q^n$ diverge $\Rightarrow S_n$ diverge $\Rightarrow \sum U_n$ diverge
D'où
$\sum q^n = \dfrac{1}{1-q}$ si $|q| < 1$
$\sum q^n$ diverge si $|q| \geq 1$

b) série harmonique

$U_n = \dfrac{1}{n}$ avec $n \geq 1$
On a

$$\begin{aligned} S_n &= U_1 + U_2 + \cdots + U_n \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \end{aligned}$$

$S_{2n} = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \cdots + \dfrac{1}{n+n} \geq \dfrac{1}{n+n} + \cdots + \dfrac{1}{n+n}$
$S_{2n} - S_n \geq \dfrac{n}{n+n} = \dfrac{1}{2}$
Donc $(S_n)_n$ ne verifier pas le critère de cauchy $\Rightarrow \sum \dfrac{1}{n}$ est diverge

c) la série de terme générale $U_n = \dfrac{1}{n(n-1)}$

On a $U_n = \dfrac{1}{n(n-1)} = \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n}$

$$\begin{aligned} S_n &= U_1 + U_2 + \cdots + U_n \\ &= (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + \cdots + (\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}) \\ &= 1 - \frac{1}{n} \end{aligned}$$

$\Rightarrow \sum \dfrac{1}{n(n-1)}$ est convergente et $\lim S_n = 1$

1.1.4 comparaison avec une intégrale généralise

Proposition 1.3 *:*
soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ *Soit f IRIRune fonction continue positive et décroissante sur* $[a, +\infty[$ *(avec* $a \in \mathbb{R}$*) et soit la suit* $U_n : U_n = f(x)$
Alors la série $\sum_n U_n$ *est de la même nature que l'intégral généralisé* $\int_a^{+\infty} f(t)dt$

$\sum_n U_n$ *est convergeant si* $\lim_{\lambda \to +\infty} \int_a^{\lambda} f(t)dt$ *est fini.*

Prueve :
On prend $a = 0$ (pour simplifier)
$\forall t \in [n, n+1]$ on a $U_{n+1} = f(n+1) \leq f(t) \leq f(n) = U_n$
donc $U_{n+1} = \int_n^{n+1} U_{n+1}dt < \int_n^{n+1} f(t)dt \leq \int_n^{n+1} U_n dt \quad \forall n \geq 0$

$$\begin{aligned} \text{c.à.d } U_1 &< \int_0^1 f(t)dt \leq U_0 \\ U_2 &< \int_1^2 f(t)dt \leq U_1 \\ \cdots & \quad \cdots \quad \cdots \\ U_n &< \int_{n-1}^n f(t)dt \leq U_{n-1} \end{aligned}$$

donc $U_1 + U_2 + \cdots + U_n \leq I_n = \int_0^n f(t)dt \leq U_0 + U_1 + \cdots + U_{n-1}$
$S_n - U_0 \leq I_n \leq S_{n-1}$ D'où $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge si et seulement si la suite $A_n \int_0^n f(t)dt$ converge si et seulement si $\sum_n U_n$ est convergente

Remarque 1.1 *:*
Cette règle s'applique en particulier aux séries de Riemann c.à.d la série $\sum_n \frac{1}{n^\alpha} (\alpha \in I\!R)$.
En effet : on a $f(x) = \frac{1}{n^\alpha}$ *qu'est une fonction décroissante sur* $[1, +\infty[$

- ► $\alpha \geq 0$ *la série est divergente car le terme général ne tend pas vers 0*
- ► $\alpha > 0$ *on a* $\int_1^\lambda x^{-\alpha}dx = \frac{\lambda^{1-\alpha} - 1}{1 - \alpha} (\alpha \neq 0)$

donc $\lim_{\lambda \to +\infty} \int_1^\lambda f(t)dt$ *existe si et seulement si* $\alpha > 1$ *c.à.d la série de Riemann converge si et seulement* $\alpha > 1$

1.1.5 Série à terme positifs

Proposition 1.4 *:*
soit $(U_n)_n$ *et*$(V_n)_n$ *deux suite vérifiant* $0 \leq U_n \leq V_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ *(ou bien à partir d'un certain rang N)*
alors $\sum V_n$ *converge* $\Rightarrow \sum U_n$ *converge*

Preuve :
Posons $S_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_n$ et $T_n = V_0 + V_1 + \cdots + V_n$
si $\sum\limits_n V_n$ converge donc $(T_n)_n$ converge $\Rightarrow (T_n)_n$ est bornée
c.à.d $(T_n)_n$ est majorée Or $S_n \leq T_n$ (car $U_n \leq V_n$)
alors (S_n) est majorée et comme (S_n) est croissante car : $S_n - S_{n-1} = U_n \geq 0$
donc (S_n) est convergente c.à.d $\sum U_n$ converge.

Corollaire 1.1 *:*
Soit $(U_n)_n$ *et* $(V_n)_n$ *deux suite positives et vérifiant* $U_n \sim V_n$ *c.à.d* $\lim \dfrac{U_n}{V_n} = 1$
alors $\sum V_n$ *et* $\sum U_n$ *sont de même nature.*

Preuve :
On a $\lim \dfrac{U_n}{V_n} = 1$ donc : $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N_0 \in \mathbb{N} \ / \ \forall \ n \ \ \geq N_0$ on a $\left|\dfrac{U_n}{V_n} - 1\right| < \varepsilon$
Pour $\varepsilon = 1/2$ on a $\left|\dfrac{U_n}{V_n} - 1\right| < \dfrac{1}{2}$ pour $n \geq N_0$
c.à.d $\dfrac{1}{2} \leq \dfrac{U_n}{V_n} \leq \dfrac{3}{2}$ pour $n \geq N_0$
Or $V_n > 0$ donc $\dfrac{V_n}{2} \leq U_n \leq \dfrac{3}{2}V_n$ pour $n \geq N_0$
donc :
1) d'après la proposition 3 et $\dfrac{1}{2}V_n \leq U_n$: si $\sum U_n$ converge $\Rightarrow \sum \dfrac{1}{2}V_n$ converge $\Rightarrow \sum V_n$ converge.
2) d'après la proposition 3 et $U_n \leq \dfrac{3}{2}V_n$: si $\sum V_n$ converge $\Rightarrow \sum U_n$ converge

Exemple 1.1 *:*
soit la série de terme générale :$U_n = \dfrac{2^n - 1}{3^n - 2}$
On a donc $U_n \geq 0$ *et comme* $U_n = \dfrac{2^n(1 - \dfrac{1}{2^n})}{3^n(1 - \dfrac{2}{3^n})}$

on pose $V_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$ *alors :*

$$\begin{aligned}\lim_n \frac{U_n}{V_n} &= \frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{2}{3^n}} \\ &= 1\end{aligned}$$

d'où $U_n \sim V_n$ *alors* $\sum V_n$ *et* $\sum U_n$ *sont de même nature*
et comme $\sum V_n$ *converge car* $V_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n = q^n$ *avec* $|q| < 1$
donc $\sum U_n$ *converge*

1.1.6 série à terme quelconques

Proposition 1.5 (critère de Dirichlet) *:*
soient $(U_n)_n$ *et* $(V_n)_n$ *deux suites à termes réels vérifions*

1. $S_n = \sum_{k=0}^{n} U_k$ *est bornée*
2. $(V_n)_n$ *est décroissante et* $\lim_n V_n = 0$

Alors la série $\sum_n (U_n V_n)$ *est convergente.*

Preuve :
Montrons que
$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N \in \mathbb{N}/si\ p > q \geq N$ on a $|U_{q+1}V_{q+1} + U_{q+2}V_{q+2} \cdots + U_pV_p| < \varepsilon$
Comme $U_k = (S_{k+1} - S_k) \quad \forall k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}|U_{q+1}V_{q+1} + U_{q+2}V_{q+2} \cdots + U_pV_p| &= |(S_{q+1} - S_q)V_{q+1} + (S_{q+2} - S_{q+1})V_{q+2} + \cdots \\ &\qquad + (S_p - S_{p-1})V_p| \\ &= |-S_qV_{q+1} + S_{q+1}(V_{q+1} - V_{q+2}) + S_{q+2}(V_{q+2} - V_{q+3}) \\ &\qquad + \cdots + S_{p-1}(V_{p-1} - V_p) + S_pV_p| \\ |U_{q+1}V_{q+1} + U_{q+2}V_{q+2} \cdots + U_pV_p| &\leq |-S_q||V_{q+1}| + |S_{q+1}||(V_{q+1} - V_{q+2})| + |S_{q+2}||(V_{q+2} - V_{q+3})| \\ &\qquad + \cdots + |S_{p-1}||(V_{p-1} - V_p)| + |S_p||V_p|\end{aligned}$$

Or $|S_n| \leq M \ \forall n$ et $(V_n)_n$ est décroissante et $\lim_n V_n = 0$ donc $V_n \geq 0$ et $|(V_{q+1} - V_{q+2})| = V_{q+1} - V_{q+2}$ alors
$|U_{q+1}V_{q+1} + U_{q+2}V_{q+2} \cdots + U_pV_p| \leq MV_{q+1} + M(V_{q+1} - V_{q+2})$
$+M(V_{q+2} - V_{q+3}) + \cdots + M(V_{p-1} - V_p) + MV_p$

Donc $|U_{q+1}V_{q+1} + U_{q+2}V_{q+2} \cdots + U_pV_p| \leq 2MV_{q+1}$
Or $\lim_n V_n = 0$ donc pour $\varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}/pour\ q+1 \geq N$ on a $V_{q+1} \leq \dfrac{\varepsilon}{2M}$
D'où $|U_{q+1}V_{q+1} + U_{q+2}V_{q+2} \cdots + U_pV_p| < \varepsilon \quad \blacksquare$

Corollaire 1.2 (critère d'Abel) *:*
soient deux suites $(U_n)_n$ et $(V_n)_n$ tel que

1. $S_n = \sum_{k=0}^{n} U_k$ *est convergente*
2. $(V_n)_n$ *est décroissante et* $\lim_n V_n = l$

Alors $\sum_n U_nV_n$ *converge*

Preuve :
On a $U_nV_n = U_n(V_n - l) + lU_n = U_nV'_n + lU_n \quad$ avec $V'_n = V_n - l$
$(V'_n)_n$ est décroissante et $\lim_n V'_n = 0$
$\sum_n U_n$ est convergente $\Leftrightarrow S_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_n$ est convergente donc (S_n) est bornée.
D'où d'après le critère de Dirichlet $\sum_n (U_nV'_n)$ est convergente
et on a $\sum_n lU_n = l\sum_n U_n$ est convergente donc la série $\sum_n (U_nV_n)$ est convergente.

Exemple 1.2 (Séries alternées)

1) *soit $(V_n)_n$ une série décroissante vers 0*

et soit la série $U_n = (-1)^n$ donc $U_nV_n = (-1)^nV_n$ et $S_n = \sum_k^n U_k = 1 - 1 + 1 + \cdots + (-1)^n$ donc $|S_n| \leq M = 1$
donc d'après le critère de Dirichlet $\sum_n (-1)^nV_n$ est convergente
$\sum_n (-1)^nV_n$ **est dite série alternée**

2) *soient $U_n = \dfrac{(-1)^n}{n} = (-1)^nV_n (n \geq 1)$ avec $V_n = \dfrac{1}{n}$ et comme $V_n = \dfrac{1}{n}$ est décroissante vers 0 donc $\sum_n \dfrac{(-1)^n}{n}$ converge*

$\sum_n \dfrac{(-1)^n}{n}$ n'est pas absolument convergente car $\sum_n \dfrac{1}{n}$ diverge

1.1.7 règle de convergence

a)règle de Cauchy

Proposition 1.6 *:*
soit un série $\sum_n (-1)^n U_n$ *à termes réels ou complexes on pose* $l = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|u_n|}$ *(quand elle existe) alors :*

1. *Si* $l < 1$ *donc* $\sum_n U_n$ *est absolument convergente*
2. *Si* $l > 1$ *donc* $\sum_n U_n$ *diverge*

Preuve :
$i)$ si $l < 1$
soit $\varepsilon > 0$ tel que $0 < l + \varepsilon < 1$;
comme $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|U_n|} = l$. $\exists N_0 \in \mathbb{N}$ / $n \geq N_0 \Rightarrow |\sqrt[n]{|U_n|} - l| \leq \varepsilon$
donc pour $n \geq N_0$ on a $0 \leq \sqrt[n]{|U_n|} < l + \varepsilon < 1$
c.à.d pour $n \geq N_0$ on a $|U_n| < (l+\varepsilon)^n$ la série $\sum (l+\varepsilon)^n$ est convergente donc la série $\sum |U_n|$ est aussi convergente $\Rightarrow \sum U_n$ est absolument convergente.
ii)Si $l > 1$
soit $\varepsilon > 0$ tel que $l - \varepsilon > 1$;
comme $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|U_n|} = l$. $\exists N_0 \in \mathbb{N}$ / $n \geq N_0 \Rightarrow |\sqrt[n]{|U_n|} - l| \leq \varepsilon$
donc pour $n \geq N_0$ on a $\sqrt[n]{|U_n|} \geq l - \varepsilon > 1$
c.à.d pour $n \geq N_0$ on a $|U_n| \geq (l - \varepsilon)^n$ donc $|U_n| \geq 1$: la suite (U_n) ne tend donc pas vers zéro, et la série $\sum U_n$ est divergente.

Remarque 1.2 *:*
cette règle est utiliser de préférence lorsque $(U_n)_n$ *contient des puissance* n^{ieme}*.*

Exemple 1.3 *:*
$U_n = (\frac{2n+1}{n+2})^{3n}$
On a $\sqrt[n]{|U_n|} = \left(\frac{2n+1}{n+2}\right)^3$
donc $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|U_n|} = 8 > 1$
d'où $\sum_n |U_n|$ *diverge*

b) Règle D'Alombert :

Proposition 1.7 *:*
Soit $\sum\limits_{n} U_n$ *une série de termes réels ou complexes .*

on pose : $l = \lim\limits_{n \to +\infty} \left| \dfrac{U_{n+1}}{U_n} \right|$ *(quand il existe)*

Alors :

1. *Si* $l < 1$ *donc* $\sum\limits_{n} U_n$ *est absolument convergente*
2. *Si* $l > 1$ *donc* $\sum\limits_{n} U_n$ *diverge*

Preuve :
i) si $l < 1$
soit $\varepsilon > 0$ tel que $0 < l + \varepsilon < 1$;
comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \left| \dfrac{U_{n+1}}{U_n} \right| = l$. $\exists N_0 \in \mathbb{N}$ / $n \geq N_0 \Rightarrow \left| \left| \dfrac{U_{n+1}}{U_n} \right| - l \right| \leq \varepsilon$
donc pour $n \geq N_0$ on a $0 \leq \left| \dfrac{U_{n+1}}{U_n} \right| < l + \varepsilon < 1$
c.à.d pour $n \geq N_0$ on a $|U_{n+1}| < (l+\varepsilon)|U_n|$ par récurrence on déduit $\forall n \geq N_0$ on a $|U_n| < (l + \varepsilon)^{n-N_0}|U_{N_0}|$
la série $\sum(l + \varepsilon)^{n-N_0}$ est convergente donc la série $\sum U_n$ est absolument convergente.
ii) Si $l > 1$
soit $\varepsilon > 0$ tel que $l - \varepsilon > 1$;
comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \left| \dfrac{U_{n+1}}{U_n} \right| = l$. $\exists N_0 \in \mathbb{N}$ / $n \geq N_0 \Rightarrow \left| \left| \dfrac{U_{n+1}}{U_n} \right| - l \right| \leq \varepsilon$
donc pour $n \geq N_0$ on a $0 \leq \left| \dfrac{U_{n+1}}{U_n} \right| \geq l - \varepsilon > 1$
c.à.d pour $n \geq N_0$ on a $|U_{n+1}| > |U_n| > |U_{n-1}| > \cdots > |U_{N_0}|$
la suite (U_n) ne tend donc pas vers zéro, et la série $\sum U_n$ est divergente.

Exemple 1.4 *:*

$U_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$

$\left| \dfrac{U_{n+1}}{U_n} \right| = \dfrac{n^\alpha}{(n+1)^\alpha} = \left(\dfrac{n}{n+1} \right)^\alpha$

$\Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} \left| \dfrac{U_{n+1}}{U_n} \right| = 1$

portant $\sum\limits_{n} = \dfrac{1}{n^\alpha}$ *converge pour* $\alpha > 1$

$\sum\limits_{n} = \dfrac{1}{n^\alpha}$ *diverge pour* $\alpha \leq 1$

Remarque 1.3 *:*
cette règle est utiliser de préférence lorsque $(U_n)_n$ contient des produits et des factorielles.

Exemple 1.5 *:*
$U_n = \frac{a^n}{n!} \quad a \in \mathbb{R}$
$\left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right| = \left|\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}.\frac{n!}{a^n}\right|$ *avec* $a \neq 0$
$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a}{n+1}\right| = 0 \quad \Longrightarrow U_n = \frac{a^n}{n!}$ *converge* $\forall a \in \mathbb{R}$
et on a $\sum_n^{+\infty}\frac{a^n}{n!} = e^a$

Remarque 1.4 *:*
si $\lim_n |\frac{U_{n+1}}{U_n}|$ *existe on démontre que* $\lim_n \sqrt[n]{|U_n|}$ *existe est sont égaux (les mêmes).*

Résume : Manière d étudier une série$\sum_n U_n$?

1. regarde $\lim_{n\to+\infty} U_n$. Si U_n ne tend pa vers zéro $\Rightarrow \sum_n U_n$ diverge

si non

2. on regarde si elle est absolument convergente(car absolument convergente $\Rightarrow$ convergente)
   pour cela :
   $i)$ le comparer à une série géométrique.
   $ii)$ ou bien la comparer à une série de Rémann.
   $iii)$ ou bien la comparer à une intégrale généralisée.

si non

3. utiliser le critère de DIRICHLET ou ABEL : ou bien utiliser la règle de CAUCHY ou d'ALOMBERT.

1.2 Série de fonction :

1.2.1 Suite de fonction :

soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $(U_n)_n$ une suite de fonction défini sur I à valeur dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
c'est-à-dire :

$$U_n : \quad I \longrightarrow \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}$$

$$x \longmapsto U_n(x)$$

Définition 1.2 *:*
On dit que la suite de fonction $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge simplement** *vers une fonction* U *défini sur* I *si :* $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n(x) = U(x)$
c à d : $\forall x \in I, \forall \epsilon > 0, \exists N_{\epsilon,x} \in \mathbb{N} / \forall n \geq N_{\epsilon,x} \quad |U_n(x) - U(x)| \leq \varepsilon$
en écrit alors $U_n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{CV.S} U \ I$

Exemple 1.6 *:*
$U_n(x) = \dfrac{n^2x^2 + x}{n^2}, \quad n > 1, \quad I = \mathbb{R}$
$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n(x) = x^2$ *sur* $\mathbb{R}$

Définition 1.3 *:*
on dit que la suite $(U_n)_n$ **converge uniformément** *vers* U *sur l'intervalle* I *si :* $\lim\limits_{n\to+\infty} \sup\limits_{x\in I} |U_n(x) - U(x)| = 0$
c à d : $\forall \epsilon > 0, \ \exists N_\epsilon \in \mathbb{N} / \ \forall n \geq N_\epsilon, \ \ |U_n(x) - U(x)| \leq \epsilon, \ \forall x \in I$
on écrit $U_n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{CV.U} U$ *sur* I

Exemple 1.7 *:*
$U_n(x) = \dfrac{n^2x^2 + x}{n^2}, \quad n > 1, \quad I = [a, b]$
$U_n \stackrel{cv.s}{\longrightarrow} U$ *sur* $[a, b]$
$|U_n(x) - U(x)| = |\dfrac{x}{n^2}|$
Posons $\alpha = \sup(|a|, |b|)$
$\sup\limits_{x\in[a,b]} |U_n(x) - U(x)| = \dfrac{\alpha}{n^2}$ *donc* $\lim\limits_{n\to+\infty} \sup\limits_{[a,b]} |U_n(x) - U(x)| = 0$
$U_n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{CV.U} x^2$ *sur* $[a, b]$

Remarque 1.5 *:*

1. $U_n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{CV.U} U$ *sur* $I \Longrightarrow U_n \xrightarrow{cv.s} U$ *sur* I
   En effet : $\forall x \in I \quad |U_n(x) - U(x)| \leq \sup\limits_{x\in I} |U_n(x) - U(x)|$
2. $U_n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{CV.U} U$ *sur* $I \Leftrightarrow (U_n)_n$ *vérifie le critère de cauchy uniforme*

   c.à.d : $\forall \varepsilon > 0, \ \exists N_\varepsilon \ / \ \forall p > q \geq N_\varepsilon, \ \Rightarrow |U_p(x) - U_q(x)| \leq \varepsilon, \ \ \forall x \in I$

Proposition 1.8 (continuité de la limite de suite de fonction)
Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonction définit sur* I *à valeur dans* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$ *vérifiant*

i) $\forall n \in \mathbb{N} \quad U_n$ *est continus sur* I

ii) $U_n \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{CV.U} U$ *sur* I

alors U *est continu sur* I *c.à.d*

$$\forall x_0 \in I \ \lim_{x \to x_0} \left(\lim_{n \to +\infty} U_n(x) \right) = \lim_{n \to +\infty} \left(\lim_{x \to x_0} U_n(x) \right)$$

Preuve :
Montrons que :
$\forall x_0 \in I,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta_{x_0} > 0/$ si $|x - x_0| < \eta_{x_0}$ alors $|U(x) - U(x_0)| \leq \varepsilon$
$|U(x) - U(x_0)| = |U(x) - U_n(x) + U_n(x) - U_n(x_0) + U_n(x_0) - U(x_0)|$ donc
$|U(x) - U(x_0)| \leq |U_n(x) - U(x)| + |U_n(x) - U_n(x_0)| + |U_n(x_0) - U(x_0)|$
$U_n \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{CV.U} U$ sur I
$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}\ /\ |U_n(x) - U(x)| < \dfrac{\varepsilon}{3},\ \ \forall n \geq N$ et $\forall x \in I$
pour n assez grand : $|U_n(x) - U(x)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$ et $|U_n(x_0) - U(x_0)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$
or U_n est continus en x_0, donc $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \beta_{x_0}$ tel que pour $|x - x_0| < \beta_{x_0}$ on a $|U_N(x) - U_N(x_0)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$
donc pour $\eta_{x_0} = \beta_{x_0}$ on a $|U(x) - U(x_0)| < \dfrac{3\varepsilon}{3} = \varepsilon$ pour $|x - x_0| < \eta_{x_0}$

Proposition 1.9 (intégrale de la limite de suite de fonction)
Soit $U_n(x)$ *une suite de fonction défini sur* $I = [a, b]$ *à valeurs réelles .*
telle que :
i) $\forall n\ U_n$ *est continu sur I.*
ii) $U_n \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{CV.U} U$ *sur* $I = [a, b]$
alors la suite de fonction

$$\begin{aligned} G_n : I &\to \mathbb{R} \\ x &\to \int_{x_0}^{x} U_n(t)dt \quad (avec \quad x_0 \in I) \end{aligned}$$

converge uniformément sur l'intervalle I vers la fonction :

$$\begin{aligned} G : I &\to \mathbb{R} \\ x &\to \int_{x_0}^{x} U(t)dt \end{aligned}$$

c à d : $\displaystyle \lim_{n \to +\infty} \int_{x_0}^{x} U_n(t)dt = \int_{x_0}^{x} \left(\lim_{n \to +\infty} U_n(t) \right) dt$

Preuve :
$|G_n(x) - G(x)| = | \int_{x_0}^{x} U_n(t)dt - \int_{x_0}^{x} U(t)dt|$
$\Rightarrow | \int_{x_0}^{x} (U_n(t) - U(t)dt| < \int_{x_0}^{x} |(U_n(t) - U(t)|dt$
Or $|(U_n(t) - U(t))| < \dfrac{\varepsilon}{b-a}$ pour $n \geq N$ et $t \in I$

$$\begin{aligned} \text{Donc} \quad |G_n(x) - Gn(x)| &\leq \frac{\varepsilon(x-x_0)}{b-a} \\ &\leq \frac{\varepsilon(b-a)}{b-a} = \varepsilon \quad \forall x \in [a,b] \end{aligned}$$

$\Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} \sup\limits_{x \in I} |G_n(x) - G_n(x)| = 0$

Proposition 1.10 (dérivation de la limite de suite de fonction)
soit $(U_n)_n$une suite de fonction défini sur $I = [a,b]$ à valeurs réelles ou complexe et vérifient :

1. *pour un certain $x_0 \in I,\ U_n(x_0)$ converge vers $U(x_0)$ sur I*
2. *U_n est de classe sur C^1 sur I*
3. *$U_n' \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{CV.U} v$ sur $I = [a,b]$*

alors

1. *$U_n \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{CV.U} U$ sur I*
2. *U est de classe sur C^1 sur I*
3. *U'=v*

c à d : $\left(\lim\limits_{n \to +\infty} U_n(x)\right)' = \lim\limits_{n \to +\infty} (U_n'(x))$ *et* $\dfrac{d}{dx}(\lim\limits_{n \to +\infty} \qquad) = \lim\limits_{n \to +\infty} (\dfrac{d}{dx} \qquad)$
(on peux changer l'ordre de la limite).

Preuve :
U_n est de classe sur C^1 sur I :
$U_n(x) = U_n(x_0) + \int_{x_0}^{x} U_n'(t)dt$
Or $U_n' \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{CV.U} v$ sur I et U_n' est continue sur $I \quad \forall n$
donc d'après la propsition 9 : $\int_{x_0}^{x} U_n'(t)dt$ converge uniformiment vers $\int_{x_0}^{x} v(t)dt$
comme $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n(x_0) = U(x_0)$ donc $U_n \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{CV.U} U$ sur I avec :

$$U(x) = U(x_0) + \int_{x_0}^{x} v(t)dt \tag{1.1}$$

or v est continue sur I car (U_n' converge uniformément vers v et U_n' sont continue)
D'après (1.1) U est de classe C^1 sur I et $U' = v$
donc U_n converge uniformément vers U sur I

Exemple 1.8 *:*
$U_n(x) = e^{-nx} \quad I = [a, +\infty[\qquad (avec\ a > 0)$
$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n(x) = 0 \Rightarrow U_n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{CV.S} U = 0\ sur\ I$
$|U_n(x) - U(x)| = e^{-nx}$
$\lim\limits_{n\to+\infty} \sup\limits_{x\in[a,+\infty[} |U_n(x) - U(x)| = e^{-na}$
$\Rightarrow U_n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{CV.U} U = 0\ sur\ I = [a, +\infty[$

1.2.2 Série de fonction :

a) Définitions :

Définition 1.4 *:*
soit $(U_n)_n$ une suite de fonction définis sur $I \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on définis une nouvelle suite (S_n).

$$\begin{cases} S_0(x) & = & U_0(x) \\ S_1(x) & = & U_0(x) + U_1(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ S_n(x) & = & U_0(x) + U_1(x) + \cdots + U_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} U_k(x) \quad x \in I\ et\ n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Définition 1.5 *:*
la suite de fonction $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite série de fonction de terme général U_n, on la note $\sum U_n$

Définition 1.6 *:*
la série $\sum U_n(x)$ est dite converge simplement si $(S_n)_n$ converge simplement.
dans ce cas la : $S(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} U_n(x)$
S est la somme de série.

Définition 1.7 *:*
la série $\sum U_n(x)$ est dite uniformément converge sur I si $(S_n)_n$ converge uniformément sur I.

Définition 1.8 *:*
la série $\sum U_n(x)$ est dite absolument convergent sur I si $\sum |U_n(x)|$ converge simplement sur I.

Définition 1.9 *:*
la série $\sum U_n(x)$ est dite normalement convergent sur I si il existe une série numérique $\sum V_n$ à tèrme positfs convvrgente tel que :

$$|U_n(x)| \leq V_n \quad \forall x \in I$$

b) Condition nécessaire de convergence :

i) Critère de Cauchy simple :
$\sum U_n(x)$ converge simplement sur I si :
$\forall x \in I,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists N_{\varepsilon,x} \in \mathbb{N}$ telle que $\quad \forall p > q \geq N_{\varepsilon,x}$ on a :

$$|U_{q+1}(x) + U_{q+2}(x) + \cdots + U_p(x)| < \varepsilon$$

ii) Critère de Cauchy uniforme :
$\sum U_n(x)$ converge uniformément sur I si :
$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ telle que $\quad \forall p > q \geq N_\varepsilon$ on a :

$$|U_{q+1}(x) + U_{q+2}(x) + \cdots + U_p(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in I$$

Proposition 1.11 *:*

1. *convergence normale $\Rightarrow$ convergence uniforme*
2. *convergence normale $\Rightarrow$ convergence absolue*

Preuve :

1. convergence normale $\Rightarrow$ convergence uniforme
   $\sum U_n(x)$ converge normalement donc $\exists \sum V_n$ convergente tel que :

   $$|U_n(x)| \leq V_n \quad \forall x \in I \ \text{ et } \ n \in \mathbb{N}$$

   pour $p > q \geq N_\varepsilon$ on a $|V_{q+1} + V_{q+2} + \cdots + V_p| < \varepsilon$
   Or $|U_{q+1}(x) + U_{q+2}(x) + \cdots + U_p(x)| \leq |V_{q+1} + \cdots + V_p| \leq \varepsilon \forall x \in I$
   d'où $\sum U_n(x)$ converge uniformément sur I
2. convergence normale $\Rightarrow$ convergence absolue
   $\sum U_n(x)$ converge normalement donc $\exists \sum V_n$ convergente tel que :

   $$|U_n(x)| \leq V_n \quad \forall x \in I \ \text{ et } \ n \in \mathbb{N}$$

   par comparaison des séries à termes positifs $\sum V_n$ converge $\Rightarrow \sum |U_n(x)|$ converge d'où $\sum U_n(x)$ est absolument covergente

c) Propriétés :

Proposition 1.12 (continuité de la somme)
si $\sum U_n(x)$ converge uniformément sur I et si les U_n sont continues sur I alors la somme $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(x)$ est continue sur I
c.à.d :

$$\forall x_0 \in I \lim_{x \to x_0} \left(\sum_{n=0}^{\infty} U_n(x) \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\lim_{x \to x_0} \sum U_n(x) \right)$$

Preuve :
On a $S_n(x) = U_0(x) + U_1(x) + \cdots + U_n(x)$ est continue sur I $(\forall n)$ et comme la suite $S_n \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{CV.U} S$ sur I donc S est continue sur I

Proposition 1.13 (integration terme à terme)
Soit $I = [a, b]$ $\quad a, b \in \mathbb{R}$ si :

1. *$\sum U_n(x)$ converge uniformément sur I*
2. *les U_n continues sur I*

alors : $\int_a^x \sum_{n=0}^{\infty} U_n(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^x U_n(t)dt$

Preuve :
On a $S_n(x) = U_0(x) + \cdots + U_n(x) \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{CV.U} S$ donc :
$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}$ telle que $\forall n \geq N$ on a : $|(S_n(t) - S(t))| < \dfrac{\varepsilon}{b-a}$ $\forall t \in [a, b]$

$$\text{Donc} \quad \begin{aligned} \left|\int_a^x S_n(t)dt - \int_a^x S(t)dt\right| &= \left|\int_a^x S_n(t) - S(t)dt\right| \\ &\leq \int_a^x |S_n(t) - S(t)|\, dt \\ &\leq \frac{\varepsilon(x-a)}{b-a} \\ &\leq \frac{\varepsilon(b-a)}{b-a} = \varepsilon \quad \forall x \in [a, b] \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Proposition 1.14 (derivation terme à terme)
si

1. *pour un certain $x \in I$ $\sum U_n(x_0)$ existe*
2. *U_n est de classe sur C^1 sur I*
3. *$\sum U_n'(x)$ converge uniformément sur I*

alors $\sum U_n'(x)$ converge uniformément sur I sa somme est de classe C^1 sur I et $S' = \sum_{n=0}^{\infty} U_n'(x)$ c à d : $(\sum U_n(x))' = \sum(U_n(x))'$

Démonstration : d'après la proposition(1.10)(remplacer $U_n(x)$ par $S_n(x)$)

Chapitre 2

Séries entiers

2.1 séries entiers :

2.1.1 définition et notation :

Définition 2.1 *:*
on appelle série entier de la variable complexe z une série de fonction dans le terme général et de la forme $U_n(z) = a_n z^n$ avec $a \in \mathbb{C}$
a_n est dite coefficient d'ordre n de la série entier
a_0 est dite terme constant

Notation :
pour $z_0 \in \mathbb{C}$ et $r > 0$
on note par : $D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} / \ |z - z_0| < r\}$ disque ouvert de centre z_0 et de rayon r
$C(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} / \ |z - z_0| = r\}$ cercle de centre z_0 et de rayon r

2.1.2 rayon et disque de convergence :

Lemme 2.1 (lemme d'Abel)
Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que la suite $(a_n z_0^n)_n$ est bornée alors :

1. *$\sum a_n z^n$ la suite est absolument convergent sur $D(0, |z_0|)$*
2. *la série entier $\sum a_n z^n$ est normalement convergent (donc uniformément convergent) sur $\bar{D}(0, k|z_0|)$ ou $0 < k < 1$*

Preuve :
-si $z_0 = 0$, évident
-si $z_0 \neq 0$
On a $(a_n z_0^n)_n$ est bornée $\Rightarrow (a_n z_0^n)_n \leq M \quad \forall n$
1)pour $z \in D(0, |z_0|)$ c.à.d $|z| < |z_0|$

$a_n z^n = a_n z_0^n (\frac{z}{z_0})^n$ et $|a_n z^n| \leq M(z/z_0)^n$
comme $|z/z_0| < 1$ donc $\sum |z/z_0|^n$ converge $\Rightarrow \sum a_n z^n$ converge absolument
2)soit $0 \leq k < 1, z \in \bar{D}(0, k|z_0|)$ donc $|z| \leq k|z_0|$ c à d :
$|\frac{z}{z_0}| < k \Rightarrow |a_n z^n| < Mk^n$
d'où : $\sum a_n z^n$ converge normalement sur $D(0, k|z_0|)$

Remarque 2.1 *:*
l'hypothèse $(a_n z_0^n)_n$ bornée est réalise par exemple lorsque $\sum a_n z_0^n$ converge car $\lim_{n \to +\infty} (a_n z_0^n)_n = 0$ donc $(a_n z_0^n)_n$ est bornée

Définition 2.2 *:*
le rayon de convergence (noté R) de la série $\sum a_n z^n$ est par définition la borne supérieure de l'ensemble $A = \{r \in \mathbb{R}^+ \ / \ (a_n r^n)_n$ est bornée $\}$

Remarque 2.2 *:* $0 \leq R \leq +\infty$

Proposition 2.1 *:*
soit R le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ alors :

1/ *si $R = 0 \Rightarrow \sum a_n z^n$ ne converge que pour $z = 0$*

2/ *si $R = +\infty \Rightarrow \sum a_n z^n$ est absolument convergente pour tout $z \in \mathbb{C}$ cette convergence est normale (donc uniforme) sur tout partie bornée de $\mathbb{C}$*

3/ *si R est un nombre fini non nulle donc :*

- **a)** $\sum a_n z^n$ *converge absolument $\forall z \ |z| < R$*
  de plus la convergence est normal et donc uniforme sur le disque fermé $\bar{D}(0, r)$ où $r < R$
- **b)** $\sum a_n z^n$ *diverge $\forall z \in \mathbb{C} \quad |z| > R$*

Preuve :
On a $A = \{r \in \mathbb{R}^+ \ /(a_n z^n)_n$ est bornée $\}$ donc $A \neq \emptyset$ car $0 \in A$.
1) $R = 0 \Leftrightarrow \sup A = 0$ donc $\forall z \neq 0$ la suite $a_n z^n$ n'est pas bornée $\Leftrightarrow \lim_{n \to +\infty} a_n z^n \neq 0$ donc $\sum a_n z^n$ est divergente $\forall z \neq 0$
2)$R = +\infty \Leftrightarrow \sup A = +\infty$ donc $\forall z \in \mathbb{C}, \ \exists r \in A, \ / \ |z| < r$
c.à.d $\forall z \in \mathbb{C}, \ \exists r \ / \ a_n r^n$ est bornée avec $|z| < r$
Donc d'après le lemme d'Abel $\sum a_n z^n$ est absolument convergente
d'où $\forall z \in \mathbb{C} \ \sum a_n z^n$ est absolument convergente
3)a-$R \neq 0$ et comme $R = \sup A$ donc par définition
$\forall z \in \mathbb{C}$ telle que $|z| < R \Rightarrow \exists r \in A$ telle que $|z| < r \leq R$
$\Longrightarrow (a_n r^n)_n$ est bornée
Alors d'après Abel la série $\sum a_n z^n$ est absolument converge et Et sur le disque fermé $\overline{D}(0, r)$ (où $r < R$) la seérie $\sum a_n z^n$ est normalement convergente (

$\Longrightarrow$ uniformément convergent) b- $\forall z : |z| > R$ on a $\lim a_n z^n \neq 0 \Longrightarrow \sum a_n z^n$ diverge toujours.

Exemple 2.1 *:*

1- *Pour tout $z \neq 0$ la série $\sum a_n z^n = \sum_n n! z^n$ diverge (la règle d'Alembert)*

donc $R = 0$

2- *On a la série $\sum z^n \quad a_n = 1$ c'est une série géométrique*

Donc si $|z| < 1$ la série $\sum z^n$ converge, et si $|z| > 1$ elle diverge

$\Rightarrow R = 1$

Définition 2.3 *:*

Soit $R \neq 0$ le rayon de convergence de la série $\sum a_n z^n$

1. *Le disque ouvert $D(0, R) = \{z \in /|z| < R\}$ est dit disque ouvert de convergence.*
2. *Dans le cas ou $z = x$ réel : l'intervalle $]-R, R[$ est dit intervalle ouvert de convergence*

2.2 Détermination pratique de R

2.2.1 propositions :

Proposition 2.2 (formule de Hadamard)

soit $\sum a_n z^n$ une série entier. Si $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ existe (fini ou non) alors :

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

(on pose : $R = 0$ si $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty$, et $R = +\infty$ si $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$)

Preuve :

$U_n(z) = a_n z^n \Longrightarrow \sqrt[n]{|U_n(z)|} = |z| \sqrt[n]{|a_n|}$

d'après la règle de Cauchy si $\lim \sqrt[n]{|U_n(z)|} < 1 \Rightarrow \sum a_n z^n$ converge absolument et si $\lim \sqrt[n]{|U_n(z)|} > 1 \Rightarrow \sum a_n z^n$ diverge.

c.à.d si $|z| < \dfrac{1}{\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{|a_n|}} \Rightarrow \sum a_n z^n$ converge absolument.

et si $|z| > \dfrac{1}{\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{|a_n|}} \Rightarrow \sum a_n z^n$ diverge.

d'où $R = \dfrac{1}{\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$.

Proposition 2.3 *:*
soit $\sum a_n z^n$ *une série entier. Si* $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ *existe (fini ou non) alors :*

$$R=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

Preuve :
On a $\left|\frac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_n z^n}\right|=\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right||z|$. Donc d'après la règle d'Alombert si
$\lim\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right||z|<1\Rightarrow\sum a_n z^n$ converge absolument
et si $\lim\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right||z|>1\Rightarrow\sum a_n z^n$ diverge.
c.à.d si $|z|<\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|\Rightarrow\sum a_n z^n$ converge absolument.
et si $|z|>\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|\Rightarrow\sum a_n z^n$ diverge.
D'où $R=\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$

Exemple 2.2 *:*
1)On considère la série $\sum\frac{z^n}{n!}$*. On a* $a_n=\frac{1}{n!}$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| &= \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(n+1)!}{n!}\right|\\ &= \lim_{n\to+\infty}(n+1)\\ &= +\infty\end{aligned}$$

$$\Rightarrow R=+\infty$$

2)Soit $\sum z^n$ *c.à.d* $a_n=1$ *donc* $\sqrt[n]{|a_n|}=1 \quad\Rightarrow R=1$

2.3 propriétés des série entier :

Proposition 2.4 *:*
soit $\sum a_n z^n$ *une série entier de rayon de convergence* R*.*
alors les séries $\sum n a_n z^{n-1}$ *et* $\sum\frac{a_n}{n+1}z^{n+1}$ *ont* R *comme rayon de convergence.*
de plus si $z=x\in\mathbb{R}$ *on a.*

✓ $(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n)' = \sum n a_n x^{n-1}, \forall x \in]-R, R[$

✓ $\int_0^x (\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n) dt = \sum \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}, \forall x \in]-R, R[$

l'intervalle $]-R, R[$ *est dite intervalle de convergence.*

Preuve :
1-rayon de convergence :
*) Remarquons d'bord que les série $\sum n a_n z^{n-1}$ et $\sum n a_n z^n$ ont même rayon de convergence (car $\sum n a_n z^n = z \sum n a_n z^{n-1}$
soient R et R' les rayons des série $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^n$
d'après la règle d'Hadamard on a :

$$\frac{1}{R'} = \lim(n a_n)^{1/n} = \lim(n)^{1/n}.(a_n)^{1/n}$$

Or $\lim(n)^{1/n} = 1$ d'où $\frac{1}{R'} = \lim(a_n)^{1/n} = \frac{1}{R}$
**) On pose $b_{n+1} = \frac{a_n}{n+1} \Longrightarrow a_n = (n+1)b_{n+1}$. donc les séries $\sum b_{n+1} z^{n+1}$ et $\sum (n+1) b_{n+1} z^n$ ont le même rayon de convergence c.à.d $\sum \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$ et $\sum a_n z^n$ ont le même rayon de convergence
2-dérivation terme à terme :
On pose $U_n(x) = a_n x^n$ donc :
(i) $U_n(x)$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
(ii) $U_n(0) = 0$ pour $n \geq 1$ et $U_n(0) = a_0$ donc $\sum U_n(0) = a_0 \Rightarrow \sum U_n(0)$ converge
(iii) la série $\sum n a_n z^{n-1}$ a R comme rayon de convergence. sur $]-\rho, \rho]$ il y a convergence normale donc uniforme .
donc d'après le théorème de dérivation des série on a
$(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n)' = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n z^{n-1}$sur $[-\rho, \rho], 0 \leq \rho < R$
c à d sur $]-R, R[$
3-Intégration terme à terme :
On pose $U_n(x) = a_n x^n$ donc :
(i) U_n est continue des U_n.
(ii) $\sum U_n(x)$ convergence uniformément sur $[-\rho, \rho] \subset]-R, R[$.

$$\Rightarrow \int_0^x (\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} (\int_0^x a_n t^n) dt = \sum \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

sur $]-R, R[$ ■

Proposition 2.5 *:*
Soit $\sum a_n x^n$ *une série entier de rayon de convergence R>0.*
Alors sa somme S est une fonction indéfiniment derivable et pour tout $k \in \mathbb{N}$ *on a :*

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n x^{n-k}$$

En particulier

$$f^{(k)}(0) = n(n-1)\cdots(k-k+1)a_k = k!a_k$$

Preuve :
On remarque que tout série obtenue par un nombre quelconque de derivation terme à term ont même rayon de convergence que la série donné. D'autre part en raisonnant par recurrence et en utilisant la proposition (2.4) on obtient le résultat.

Définition 2.4 *:*
Soit f est de classe C^∞ *sur* $I =]-R, R[$ *on appelle série de Taylor de f (ou bien série Marc Lourin de f) la série* $\sum \frac{f^p(0)}{p!}x^n$

Proposition 2.6 *:*
Si f est de classe C^∞ *sur*$I =]-R, R[$ *et si* $(f^n(x)) \leq M \; \forall x \in I \; \forall n$
alors f est la somme de la série de Taylor c.à.d :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^p(0)}{p!}x^n$$

Preuve :
f est de classe C^∞ sur I donc $\forall x \in I$

$$f(x) = f(0) + nf'(0)x + x^2\frac{f''(0)}{2!} + \cdots + x^n\frac{f^n(0)}{n!} + x^{n+1}\frac{f^{n+1}(\theta)}{(n+1)!}$$

telle que $0 \leq \theta \leq |x|$
$f(x) = S_n(x) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{n+1}(\theta)$ avec $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^k(0)}{(n+1)!}x^k$
$|S_n(x) - f(x)| = |\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{n+1}(\theta)| \leq M\frac{R^{n+1}}{(n+1)!} \quad x \in I$
mais $\lim_{n\to+\infty} \frac{R^{n+1}}{(n+1)!} = 0$ (car $\sum \frac{R^n}{n!}$ converge $\frac{R^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{R^n} = \frac{R}{n+1} \longrightarrow 0$)
$\Rightarrow f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^n(0)}{n!}x^n$

Exemple 2.3 *:*
1) $f(x) = e^x$, *f est de classe* C^∞ *sur* $\mathbb{R}$ *et*
$f^n(x) = e^x$ *donc pour tout* $a > 0$ *et pour* $x \in]-a, a[$

$$|f^n(x)| = |e^x| < e^a = M$$

donc $e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \ \forall x \in \mathbb{R}$
2) $f(x) = \cosh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ *donc*

$$\begin{aligned} \cosh(x) &= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n!} + \frac{(-x)^n}{n!}\right) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n!} + \frac{(-1)^n}{n!}x^n\right) \\ &= \sum \frac{x^{2n}}{2n!} \end{aligned}$$

3) De même $\sinh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \Longrightarrow \sinh(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$
4) $\dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} x^p$ *pour* $|x| < 1$
5) $\dfrac{1}{1+x} = \dfrac{1}{1-(-x)} = \displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p x^p$ *pour* $|x| < 1$
6) $\dfrac{1}{1+x^2} = \displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p x^{2p}$ *pour* $|x| < 1$
7) $\arctan x = \int_0^x \dfrac{1}{1+t^2} dt = \displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} x^{2p+1} \quad \forall x \in]-1, 1[.$
8) on a $\dfrac{1}{1+x} = \displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p x^p$ *pour* $|x| < 1$
Donc $\int_0^x \dfrac{dt}{1+t} = \displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \int_0^x t^p dt = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p+1} x^{p+1}$
$\Longrightarrow$ *log*$(1+x) = \displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p+1} x^{p+1}$

Chapitre 3

Séries de Fourier

3.1 série trigonométrique :

3.1.1 Définition :

une série trigonométrique est une série de fonction $\sum f_n(x)$
avec $f_n(x) = a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)$
où $\omega > 0$ et $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ deux suites réeles
par convention on pose $f_0(x) = \dfrac{a_0}{2}$
la série s'écrit :

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1} (a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x))$$

3.1.2 écriture exponentielle :

On a $\cos(n\omega x) = \dfrac{1}{2}(e^{in\omega x} + e^{-in\omega x})$
et $\sin(n\omega x) = \dfrac{1}{2i}(e^{in\omega x} - e^{-in\omega x})$ donc

$$f_n(x) = \frac{a_n - ib_n}{2} e^{in\omega x} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-in\omega x}$$

Posons :$C_0 = \dfrac{a_0}{2}, C_n = \dfrac{a_n - ib_n}{2}, C_{-n} = \dfrac{a_n + ib_n}{2}$
la série s'écrit $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} C_n e^{in\omega x}$

3.1.3 convergence :

Proposition 3.1 *:*
Si la série numérique $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont absolument convergentes

Alors la série trigonométrique $\sum(a_n\cos(n\omega x)+b_n\sin(n\omega x))$ et normalement convergentes sur $\mathbb{R}$ (donc uniformément convergente sur $\mathbb{R}$)

Preuve :
$|f_n(x)| = |a_n\cos(n\omega x)+b_n\sin(n\omega x)| \leq |a_n|+|b_n|$
On pose : $V_n = |a_n|+|b_n|$
Or $\sum|a_n|$ converge et $\sum|b_n|$ converge donc $\sum V_n$ converge
d'où $\sum f_n(x)$ converge normalement sur $\mathbb{R} \Longrightarrow \sum f_n(x)$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$

Exemple 3.1 *:*
$\sum_n \frac{\cos(nx)}{n^2}$ *converge normalement sur $\mathbb{R}$ car :*
$a_n = \frac{1}{n^2} \Longrightarrow \sum|a_n|$ *est convergente et* $b_n = 0 \Longrightarrow \sum|b_n|$ *est convergente*

Remarque 3.1 *:*
$\sum|a_n|$ *et* $\sum|b_n|$ *converge* $\Longrightarrow \sum C_n$ *et* $\sum C_{-n}$ *sont convergentes*

Proposition 3.2 *:*
Si les suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ sont décroissants et tendent vers 0 à l'infini
Alors $\sum(a_n\cos(n\omega x)+b_n\sin(n\omega x))$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ sauf peut être pour $x = \frac{2k\pi}{\omega}(k\in\mathbb{Z})$

Preuve :
$f_n(x) = a_n\left(\frac{e^{in\omega x}+e^{-in\omega x}}{2}\right)+b_n\left(\frac{e^{in\omega x}-e^{-in\omega x}}{2i}\right)$
Montrons que$\sum a_n e^{in\omega x}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ sauf peut être pour $x = \frac{2k\pi}{\omega}(k\in\mathbb{Z})$
Posons $U_n = e^{in\omega x}$ (x fixé) et $V_n = a_n$ donc $S_n = U_0+U_1+\cdots+U_n = \sum_{k=0}^{n} e^{ik\omega x} = \sum_{k=0}^{n}(e^{i\omega x})^k = \frac{1+e^{i(n+1)\omega x}}{e^{i\omega x}}$
avec $e^{i\omega x}\neq 1$ c.à.d $x \neq \frac{2k\pi}{\omega}(k\in\mathbb{Z})$
alors $|S_n| \leq \frac{2}{|1-e^{(i\omega x)}|} = M$
et comme V_n est une suite décroissante vers 0 donc d'après le critère d'Abel la série $\sum a_n e^{in\omega x}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ sauf peut être pour $x = \frac{2k\pi}{\omega}\ \ (k\in\mathbb{Z})$
mêmes chose pour les $\sum a_n e^{(-in\omega x)}$, $\sum b_n e^{(in\omega x)}$ et $\sum b_n e^{(-in\omega x)}$.
D'où $\sum f_n(x)$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ sauf peut être pour

$x = \dfrac{2k\pi}{\omega} \quad (k \in \mathbb{Z})$
Exemple :

1. $\sum \left(\dfrac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}\right)$ on a $a_n = 0$ et $b_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ décroissante vers 0
   $\Longrightarrow \sum \dfrac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ sauf peut être pour
   $x = 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$
   ▶ pour $x = 2k\pi \Longrightarrow \sin(nx) = 0$
   $\sum(\dfrac{\sin(nx)}{\sqrt{n}})$ converge simplement sur $\mathbb{R}$
2. $\sum(\dfrac{\cos(nx)}{\sqrt{n}})$
   de même comme $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ décroissante vers 0 donc converge simplement sur $\mathbb{R}\backslash\{2\pi k/k \in \mathbb{Z}\}$
   ▶ pour $x = 2k\pi$ on a $\cos(2nk\pi) = 1 \Longrightarrow \sum \dfrac{\cos(nx)}{\sqrt{n}} = \sum \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ est divergente

3.1.4 Continuité, Intégration et Dérivation :

Proposition 3.3 *:*
Si $\sum(|a_n| + |b_n|)$ *converge alors*

1. $f(x) = \dfrac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1}(a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x))$ *est continue sur* $\mathbb{R}$
2. $\int_0^x f(t)dt = \dfrac{a_0}{2}x + \sum_{n\geq 1}\left(\dfrac{a_n}{n\omega}\sin(n\omega x) - \dfrac{b_n}{n\omega}\cos(n\omega x)\right) + k$
   tel que $k = $ *canstante*

Preuve :
$\sum(|a_n| + |b_n|)$ converge $\Longrightarrow \sum f_n(x)$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ donc uniformément sur $\mathbb{R}$
et comme $\sum f_n(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$
alors d'après le théorème de continuité f est continue sur $\mathbb{R}$
2)On a $\begin{cases} \sum f_n(x) & \text{converge uniformément sur } \mathbb{R} \\ (f_n) & \text{continue} \end{cases}$
donc d'après le théorème d'intégration on peut intégrer terme à terme

$$\Longrightarrow \int_0^x f(t)dt = \frac{a_0}{2}x + \sum_{n\geq 1}(\frac{a_n}{n\omega}\sin(n\omega x) - \frac{b_n}{n\omega}\cos(n\omega x)) + k$$

Proposition 3.4 *:*
Si $\sum n(|a_n| + |b_n|)$ *converge alors :*

1. $\sum f_n(x)$ *converge uniformément*
2. $\sum f_n'(x)$ *converge uniformément*
3. f *est de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}$ *et* $f_n'(x) = \sum_{n\geq 1}[(-n\omega a_n \sin(n\omega x)+n\omega b_n \cos(n\omega x))]$

Preuve :
$\forall n \geq 1$ on a $|a_n| + |b_n| \leq n(|a_n| + |b_n|)$ et $|f_n(x)| \leq |a_n| + |b_n|$
donc comme $\sum n(|a_n| + |b_n|)$ converge alors :
$\sum f_n(x)$ converge uniformément
D'outre part $f_n(x) = (a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x))$
donc f_n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $f_n'(x) = -n\omega a_n \sin(n\omega x) + n\omega b_n \cos(n\omega x))$
or $|f_n'(x)| \leq \omega n(|a_n| + |b_n|)$ donc $\sum f_n'(x)$ converge normalement sur $\mathbb{R}$
d'où $\sum f_n'(x)$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$
Donc on a :

- $f_n(x)$ de classe C^1
- $\sum f_n(x)$ converge pour une certain x_0 ($x_0 = 0$)
- $\sum f_n'(x)$ converge uniformément

Alors d'après le théorème de dérivation :
$f(x) = \sum_{n}^{+\infty} f_n(x)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \sum_{n}^{+\infty} f_n'(x)$

3.2 Développement en série trigonométrique :

Proposition 3.5 (Condition nécessaire)
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *telle que :*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1}(a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x))$$

on suppose que la convergence est uniforme sur $\mathbb{R}$*. Alors*
1) f *est périodique de période* $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$
2) $\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad a_n = \dfrac{\omega}{\pi}\displaystyle\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f(x)\cos(n\omega x)dx, \quad b_n = \dfrac{\omega}{\pi}\displaystyle\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f(x)\sin(n\omega x)dx$

Preuve :
1)On a

$$\begin{aligned}
f(x+T) &= \frac{a_0}{2}+\sum_{n\geq 1}(a_n\cos(n\omega(x+T))+b_n\sin(n\omega(x+T)))\\
&= \frac{a_0}{2}+\sum_{n\geq 1}(a_n\cos(n\omega(x+\frac{2\pi}{\omega}))+b_n\sin(n\omega(x+\frac{2\pi}{\omega})))\\
&= \frac{a_0}{2}+\sum_{n\geq 1}(a_n\cos(n\omega(x+2n\pi))+b_n\sin(n\omega(x+2n\pi)))\\
&= \frac{a_0}{2}+\sum_{n\geq 1}(a_n\cos(n\omega x)+b_n\sin(n\omega x))\\
&= f(x)
\end{aligned}$$

2) Soit $p\in\mathbb{N}$
$f(x).\cos(p\omega x)=\dfrac{a_0}{2}.\cos(p\omega x)+\sum\limits_{n\geq 1}a_n\cos(n\omega x)\cos(p\omega x)+b_n\sin(n\omega x)\cos(p\omega x)$
comme la convergence est uniforme sur $\mathbb{R}$, on peut intégrer la série terme à terme, on obtient alors :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}(f(x).\cos(p\omega x))dx &= \frac{a_0}{2}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}\cos(p\omega x)+\sum_{n\geq 1}a_n\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}\cos(n\omega x)\cos(p\omega x)dx\\
&\quad +\sum_{n\geq 1}b_n\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}\sin(n\omega x)\cos(p\omega x)dx
\end{aligned}$$

Or

* $\displaystyle\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}\cos(p\omega x)=0$

* $\displaystyle\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}\cos(n\omega x)\cos(p\omega x)dx=\frac{\pi}{\omega}\delta_{n,p}$ avec $\delta_{n,p}=\begin{cases}1 & \text{si} \quad n=p\\ 0 & \text{si} \quad n\neq p\end{cases}$

* $\displaystyle\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}\sin(n\omega x)\cos(p\omega x)dx=0$

D'où $\displaystyle\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}f(x).\cos(p\omega x)dx=\frac{\pi}{\omega}a_p$

$\Longrightarrow a_p=\dfrac{\omega}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}f(x).\cos(p\omega x)dx \quad \forall p\in\mathbb{N}$

pour b_p on multiplie f par $\sin(p\omega x)$ on obtient :

$$b_p = \frac{\omega}{\pi}\int_0^{2\pi/\omega} f(x).\sin(p\omega x)dx \quad \forall p \in \mathbb{N}$$

3.3 dévelopement en série de Fourier :

Définition 3.1 *:*
Une fonction $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ et dite dévlopable en série de fourier si $f(x)$ est la somme de sa série de fourier c à d :
$f(x) = \dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{n\geq 1}(a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x))$
avec $a_n = \dfrac{\omega}{\pi}\displaystyle\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f(t)\sin(n\omega t)dt$, $b_n = \dfrac{\omega}{\pi}\displaystyle\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f(t)\sin(n\omega t)dt$

Définition 3.2 *:*
soit f intégrable sur $[0, \frac{2\pi}{\omega}]$ on appelle série de fourier associé a f la série trigonométrique
$\dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{n\geq 1}(a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x))$
avec $a_n = \dfrac{\omega}{\pi}\displaystyle\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f(t)\sin(n\omega t)dt$, $b_n = \dfrac{\omega}{\pi}\displaystyle\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f(t)\sin(n\omega t)dt$
a_n et b_n sont appellés les coéfficients de fourier de la fonction f

Définition 3.3 *:*
on dit que f admet une discontinuté de 1^{er} éspèce au point x_0
si f est non continue en x_0 et $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ existent (notées $f(x_0^+)$ et $f(x_0^-)$)

Définition 3.4 *:*
f admet en x_0 une derivée à droite et une derivée à gauche si :
$\lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}, \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$
existent (notées $f'(x_0^+)$ et $f'(x_0^-)$)

Proposition 3.6 (Dirichlet) *(condition suffisante)*
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que
i) f est périodique de période $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$
ii) sur une période le nombre de discontinuté du 1^{er} éspèce de f est fini .
iii) sur une période f admet en tout point une derivée à droite et à gauche.

Alors :
1) la série de Fourier converge simplement sur $\mathbb{R}$
2) Sa somme égale à $\tilde{f}$ *ou*
$\tilde{f}(x) = \frac{1}{2}(f(x_0^+) + f(x_0^-)) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Remarque 3.2 *:*
1-Si f *est continue en* x_0 *alors* $\tilde{f}(x_0) = f(x_0)$
2-Si f *est continue sur* $[a,b]$ *(fermer borné)alors la série de fourier converge simplement sur* $[a,b]$
3-Si f *est paire alors* $b_n = 0 \forall n$
4-Si f *est impaire alors* $a_n = 0 \forall n$
5-Si f *est* T *périodique alors* $\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)dt = \int_{0}^{\alpha+T} f(t)dt \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$
6-Identité de Porseval si f *verifie Dirichlet alors :*

$$\frac{1}{T}\int_0^T f^2(t)dt = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n\geq 1}(a_n^2 + b_n^2)$$

Exemple 3.2 *:*
Soit f *une fonction paire de période* 2π *telle que* $f(x) = \pi - x$ *sur* $[0,\pi]$
On a f *est paire donc* $b_n = 0$

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - x)dx \\ &= \pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - x)\cos nx dx \\ &= 2\int_0^{\pi}\cos nx dt + \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx dx \\ &= \frac{2}{\pi n^2}(-(-1)^n + 1) \\ &= \begin{cases} 0 \quad si\ n\ est\ paire \\ \dfrac{4}{\pi n^2} \quad si\ n\ est\ impaire \end{cases} \end{aligned}$$

Or f *est une fonction* 2π*-périodique continue et admet des dérivées à droite et à gauche donc les conditions de Dirichlet sont satisfaites donc la fonction* *f est developable en série de Fourier c.à.d :*

$$\pi - x = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}$$

pour $x = 0$ *on a* $\pi = \dfrac{2}{\pi} + \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$ *donc :*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$