UNIVERSITE MOHAMMED PREMIER
ECOLE NATIONALE DES SCIENCES APPLIQUEES
OUJDA-MAROC

# ANALYSE III

CP2

2014- 2015

# Table des matières

# Chapitre 1

# L'ESPACE $\mathbb{R}^p$ :PROPRIETES METRIQUES ET TOPOLOGIQUES de $\mathbb{R}^n$

## 1.1 Définition de $\mathbb{R}^p$.

**Définition 1.1.1.** :
On appelle $\mathbb{R}^p$, l'ensemble produit de $p$ ensembles identiques à $\mathbb{R}$, i.e

$$\mathbb{R}^p = \underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{p \text{ fois}}, \ p \geq 1.$$

Un élément $x$ de $\mathbb{R}^p$ s'écrit sous la forme

$$x = \left(x_1, x_2, \ldots, x_p\right),$$

où $x_1, x_2, \ldots, x_p$ sont des éléments de $\mathbb{R}$. L'espace $\mathbb{R}^p$ peut être muni d'une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Il suffit de poser pour tout couple $x = \left(x_1, x_2, \ldots, x_p\right)$, $y = \left(y_1, y_2, \ldots, y_p\right)$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} x + y &= \left(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_p + y_p\right), \\ \lambda x &= \left(\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_p\right). \end{aligned}$$

## 1.2 Distances, espaces métriques, espaces vectoriels normés

### 1.2.1 Distances

**Définition 1.2.1.** :
Soit $E$ un ensemble. On appelle **distance** (ou **métrique**) sur $E$, une application $d$ définie de $E \times E$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, vérifiant les trois conditions suivantes :

$\mathcal{D}_1$ $\forall (x,y) \in E \times E,\ d(x,y) = d(y,x)$ (symétrie),

$\mathcal{D}_2$ $\forall (x,y) \in E \times E,\ d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$ (séparation),

$\mathcal{D}_3$ $\forall (x,y,z) \in E \times E \times E,\ d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ (inégalité triangulaire).

**Exemple 1.2.1** (Distances sur $\mathbb{R}^p$)**.**
Définissons les applications $d_1$, $d_2$ et $d_\infty$ de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^+$, en posant pour chaque couple $(x,y)$ de $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p$ où $x = (x_1, x_2, \ldots, x_p)$ et $y = (y_1, y_2, \ldots, y_p)$ ,

$$\begin{aligned} d_1(x,y) &= \sum_{k=1}^{p} |y_k - x_k| , \\ d_2(x,y) &= \left[\sum_{k=1}^{p} (y_k - x_k)^2\right]^{\frac{1}{2}} , \quad \text{distance euclidienne,} \\ d_\infty(x,y) &= \sup_{k=1,\ldots,p} |y_k - x_k| , \quad \text{distance sup.} \end{aligned}$$

Montrons, par exemple, que $d_2$ est une distance sur $\mathbb{R}^p$.
Séparation :

$$\begin{aligned} d_2(x,y) = 0 &\Longleftrightarrow \sum_{k=1}^{p} (y_k - x_k)^2 \\ &\Longleftrightarrow y_k - x_k = 0,\ \forall k = 1, \ldots, p, \\ &\Longleftrightarrow x = y. \end{aligned}$$

Symétrie : évidente car pour tout $k = 1, 2, \ldots, p$, $(y_k - x_k)^2 = (x_k - y_k)^2$ .
Inégalité triangulaire. Soient $x, y$ et $z$ trois éléments de $\mathbb{R}^p$. Nous avons,

$$\begin{aligned} [d_2(x,z)]^2 &= \sum_{k=1}^{p} (z_k - x_k)^2 = \sum_{k=1}^{p} (z_k - y_k + y_k - x_k)^2 \\ &= \sum_{k=1}^{p} (z_k - y_k)^2 + \sum_{k=1}^{p} (y_k - x_k)^2 + 2 \sum_{k=1}^{p} (z_k - y_k)(y_k - x_k) \\ &= [d_2(y,z)]^2 + [d_2(x,y)]^2 + 2 \sum_{k=1}^{p} (z_k - y_k)(y_k - x_k) \\ &\leq [d_2(y,z)]^2 + [d_2(x,y)]^2 + 2 \left| \sum_{k=1}^{p} (z_k - y_k)(y_k - x_k) \right| . \end{aligned}$$

Par application de l'inégalité de Schwarz,

$$\left[\left|\sum_{k=1}^{p} a_k b_k\right| \leq \sqrt{\left[\sum_{k=1}^{p} a_k^2\right]}\sqrt{\sum_{k=1}^{p} b_k^2} \ \left(\text{cf : exercice 2 ; fiche TD n}^0 1\right)\right],$$

à $a_k = z_k - y_k$ et $b_k = y_k - x_k$, on obtient

$$\begin{aligned}
[d_2(x,z)]^2 &\leq [d_2(y,z)]^2 + [d_2(x,y)]^2 + 2\sqrt{\sum_{k=1}^{p}(z_k - y_k)^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{p}(y_k - x_k)^2} \\
&= [d_2(y,z)]^2 + [d_2(x,y)]^2 + 2[d_2(y,z)][d_2(x,y)] \\
&= [d_2(x,y) + d_2(y,z)]^2 .
\end{aligned}$$

D'où,

$$d_2(x,z) \leq d_2(x,y) + d_2(y,z) .$$

**Exercices 1.2.1.3.** Soit $E$ un ensemble et $d$ une distance sur $E$. Montrer que

1. $\forall (x,y,z) \in E^3$,
$$|d(x,y) - d(y,z)| \leq d(x,z) .$$

2. $\forall x_1, x_2, \ldots, x_n \in E$,
$$d(x_1, x_n) \leq \sum_{k=1}^{n-1} d(x_k, x_{k+1}) \quad (\text{inégalité polygonale}) .$$

**Définition 1.2.2.** :
Soit $E$ un ensemble, $d_1, d_2$ deux distances sur $E$. On dit que $d_1$ et $d_2$ sont deux **distances équivalentes** s'ils existent deux nombres réels strictement positifs $\alpha$ et $\beta$ tels que :

$$\alpha d_1(x,y) \leq d_2(x,y) \leq \beta d_1(x,y) \ \ \forall (x,y) \in E^2.$$

Notation : $d_1 \backsim d_2$.

La notion d'équivalence ainsi définie est une relation d'équivalence sur l'ensemble des distances définies sur $E$.

**Exemple 1.2.2. Exemple 1.2.1.5.** Les trois distances $d_1$, $d_2$ et $d_\infty$ définies sur $\mathbb{R}^p$ sont équivalentes. D'une façon précise, pour tout couple $(x,y)$ de $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p$, on a

$$d_\infty(x,y) \leq d_1(x,y) \leq \sqrt{p} d_2(x,y) \leq p d_\infty(x,y) .$$

Pour tout couple $(x, y)$ de $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p$, nous avons

$$\sup_{k=1,\ldots,p} |y_k - x_k| \leq \sum_{k=1}^{p} |y_k - x_k| .$$

Donc,

$$d_\infty (x, y) \leq d_1 (x, y) . \tag{1.2.1}$$

Par application de l'inégalité de Schwarz ($a_k = 1,\ b_k = |y_k - x_k|$), on déduit que

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{p} |y_k - x_k| &\leq \sqrt{\sum_{k=1}^{p} 1^2} \sqrt{\sum_{k=1}^{p} (y_k - x_k)^2} \\ &= \sqrt{p} \sqrt{\sum_{k=1}^{p} (y_k - x_k)^2}. \end{aligned}$$

Par suite,

$$d_1 (x, y) \leq \sqrt{p} d_2 (x, y) . \tag{1.2.2}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} [d_2 (x, y)]^2 &= \sum_{k=1}^{p} (y_k - x_k)^2 \\ &\leq \sum_{k=1}^{p} \left[ \sup_{k=1,\ldots,p} |y_k - x_k| \right]^2 = p \left[ \sup_{k=1,\ldots,p} |y_k - x_k| \right]^2 . \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$d_2 (x, y) \leq \sqrt{p} d_\infty (x, y) ,$$

ou encore

$$\sqrt{p} d_2 (x, y) \leq p d_\infty (x, y) . \tag{1.2.3}$$

D'où le résultat à partir des inégalités $(1)$ , $(2)$ et $(3)$ .

### 1.2.2 Espaces métriques

**Définition 1.2.3.** :
On appelle **espace métrique**, un couple $(E, d)$ constitué d'un ensemble $E$ et d'une distance définie sur $E$.

**Exemples 1.2.3.**
1. $(\mathbb{R}^p, d_1)$ , $(\mathbb{R}^p, d_2)$ et $(\mathbb{R}^p, d_\infty)$ sont des espaces métriques.
2. $\mathbb{C}$ est un espace métrique. On prend pour distance de deux complexes $(z_1, z_2)$ , $d (z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$ .

**Définition 1.2.4.** :
Soit $(E, d)$ un espace métrique et $A$ une partie de $E$. On définit sur $A$ une distance $d_A$ (**distance induite** par celle de $E$) par :

$$d_A(x, y) = d(x, y), \quad \forall (x, y) \in A \times A.$$

### 1.2.3 Espaces vectoriels normés (e.v.n.)

**Définition 1.2.5.** :
Soit $E$ un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On appelle **norme** sur $E$, une application $\mathbf{N}$ de $E$ dans $\mathbb{R}^+$ vérifiant les trois conditions suivantes :

$(\mathcal{N}_1)$ $\mathbf{N}(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0.$

$(\mathcal{N}_2)$ $\mathbf{N}(x+y) \leq \mathbf{N}(x) + \mathbf{N}(y) \quad \forall (x, y) \in E \times E$ (inégalité triangulaire).

$(\mathcal{N}_3)$ $\mathbf{N}(\lambda x) = |\lambda| \, \mathbf{N}(x) \quad \forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}$ (homogénéité).

**Définition 1.2.6.** :
On appelle **espace vectoriel normé (e.v.n.),** un couple $(E, \mathbf{N})$ constitué d'un ensemble $E$ et d'une norme $\mathbf{N}$ définie sur $E$.

**Remarque 1.2.1.** *:*
***Remarque 1.2.3.3.*** $\mathbf{N}(0) = 0$ *(prendre $\lambda = 0$ dans $(\mathcal{N}_3)$ ou $x = 0$ dans $(\mathcal{N}_1)$).*

**Remarque 1.2.2.** *:*
*Pour tout $x$ de $E$,*

$$\mathbf{N}(x) \geq 0.$$

*Ceci découle de la remarque 1.2.3.3 et les conditions $(\mathcal{N}_2)$ et $(\mathcal{N}_3)$.*

**Exemples 1.2.4** (Normes sur $\mathbb{R}^p$.)**.** :
Les applications $\mathbf{N}_1$, $\mathbf{N}_2$ et $\mathbf{N}_\infty$ définies sur $\mathbb{R}^p$ par :

$$\begin{aligned}
\mathbf{N}_1(x) &= \sum_{k=1}^{p} |x_k|, \\
\mathbf{N}_2(x) &= \sqrt{\sum_{k=1}^{p} |x_k|^2} \quad \text{(norme euclidienne)}, \\
\mathbf{N}_\infty(x) &= \sup_{k=1,\ldots,p} |x_k| \quad \text{(norme sup)}.
\end{aligned}$$

sont des normes sur $\mathbb{R}^p$. Habituellement, une norme sur un **e.v.n.** est notée $\| \, . \, \|$ ou $\| \cdot \|_E$ .

**Définition 1.2.7.** :
Deux normes $\mathbf{N}_1$ et $\mathbf{N}_2$ définies sur un même **e.v.n.** sont dites **équivalentes** s'ils existent deux nombres $\alpha$ et $\beta$ strictement positifs lels que

$$\alpha\mathbf{N}_1(x) \leq \mathbf{N}_2(x) \leq \beta\mathbf{N}_1(x), \quad \forall x \in E.$$

**Exercice 1.2.1. Exercice 1.2.3.7.** Montrer que les trois normes $\mathbf{N}_1$, $\mathbf{N}_2$ et $\mathbf{N}_\infty$ définies sur $\mathbb{R}^p$ sont équivalentes et on a

$$\forall x \in \mathbb{R}^p, \ \ \mathbf{N}_\infty(x) \leq \mathbf{N}_1(x) \leq \sqrt{p}\mathbf{N}_2(x) \leq p\mathbf{N}_\infty(x).$$

**Définition 1.2.8.** :
Soit $(E, \mathbf{N})$ un **e.v.n.** et $F$ un sous espace-vectoriel de $E$ (**s.e.v.**). On définit une norme sur $F$, notée $\mathbf{N}_F$ (**norme induite** par celle de $E$) par :

$$\mathbf{N}_F(x) = \mathbf{N}(x), \ \ \forall x \in F.$$

### 1.2.4 Distance associée à une norme

**Définition 1.2.9.** :
Soit $(E, \mathbf{N})$ un **e.v.n.** On peut définir sur $E$ une **distance associée** à la norme $\mathbf{N}$. Posons

$$\forall x \in E, \ \forall y \in E, \ \ d(x, y) = \mathbf{N}(x - y).$$

On vérifie aisement que $d$ est une distance sur $E$; $(\mathcal{N}_1) \Longrightarrow (\mathcal{D}_1)$, $(\mathcal{N}_2) \Longrightarrow (\mathcal{D}_2)$ et $(\mathcal{N}_3) \Longrightarrow (\mathcal{D}_3)$.

**Remarque 1.2.3.** *:* $\forall x \in E, \ d(x, 0) = \mathbf{N}(x).$

**Remarque 1.2.4.** *:*
*La distance associée à une norme est invariante par translation.*

$$\forall (x, y, z) \in E^3, \ d(x + z, y + z) = d(x, y).$$

*En effet,*

$$d(x + z, y + z) = \mathbf{N}[(x + z) - (y + z)] = \mathbf{N}(x - y) = d(x, y).$$

**Remarque 1.2.5.** *:*
*On peut trouver des distances non associées à des normes. Par exemple, les distances*

$$\begin{aligned} d_1(x, y) &= \left|x^3 - y^3\right|, \ \ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \\ d_2(x, y) &= \begin{cases} 0 \ \ si \ \ x = y, \\ 1 \ \ si \ \ x \neq y \end{cases} \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \ \ \text{(distance discrète)}, \end{aligned}$$

*ne sont pas associées à des normes.*

**Théorème 1.2.1.** *:*
*Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Alors, toutes les normes définies sur E sont équivalentes. En particulier, dans $\mathbb{R}^p$, toutes les normes sont équivalentes.*

**Preuve.** (cf. plus loin)

## 1.3 Notions topologiques dans un espace métrique

### 1.3.1 Boules, Sphères

**Définition 1.3.1.** :
Soit $(E, d)$ un espace métrique, $a \in E$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$.
On appelle **boule ouverte** de centre $a$ et de rayon $r$, l'ensemble

$$B(a, r) = \{x \in E / d(a, x) < r\}.$$

On appelle **boule fermée** de centre $a$ et de rayon $r$, l'ensemble

$$B'(a, r) = \{x \in E / d(a, x) \leq r\}.$$

On appelle **sphère** de centre $a$ et de rayon $r$, l'ensemble

$$S(a, r) = \{x \in E / d(a, x) = r\}.$$

**Remarques 1.3.1.** :

1. $B'(a, r) = B(a, r) \cup S(a, r)$.
2. Dans $\mathbb{R}$ muni de la distance usuelle $d(x, y) = |x - y|$,

$$\begin{aligned} B(a, r) &= \left]a - r, a + r\right[, \; B'(a, r) = [a - r, a + r], \\ S(a, r) &= \{a - r, a + r\}. \end{aligned}$$

3. Dans l'espace métrique $\mathbb{Z}$,

$$B\left(0, \frac{1}{2}\right) = B'\left(0, \frac{1}{2}\right) = \{0\}.$$

4. Si $0 \leq r \leq r'$, alors

$$B(a, r) \subset B(a, r') \quad \text{et} \quad B'(a, r) \subset B'(a, r')$$

5. Une boule n'a pas toujours un seul centre et un seul rayon. Nous allons justifier cette remarque à l'aide d'un exemple. Posons $E = [0,1]$ et pour tout $(x,y) \in E^2$, $d(x,y) = |x-y|$. Nous avons

$$\begin{aligned} B'(0,1) &= \{x \in E / d(x,0) \leq 1\} = \{x \in [0,1] / |x| \leq 1\} \\ &= \{x \in [0,1] / -1 \leq x \leq 1\} = E. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B'\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) &= \left\{x \in E / d\left(x,\frac{1}{2}\right) \leq \frac{1}{2}\right\} = \left\{x \in E / \left|x-\frac{1}{2}\right| \leq \frac{1}{2}\right\} \\ &= \{x \in E / 0 \leq x \leq 1\} = E. \end{aligned}$$

Donc,

$$B'(0,1) = B'\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right).$$

### 1.3.2 Ensembles bornés, diamètre

**Définition 1.3.2.** :
Soit $(E,d)$ un espace métrique et $A$ une partie de $E$. On appelle **diamètre** de $A$, le nombre

$$\delta(A) = \sup_{x \in A, y \in A} d(x,y).$$

L'ensemble $A$ est dit **borné** pour la distance $d$ si $\delta(A) < \infty$.

**Exemple 1.3.1.** : $\delta[B'(a,r)] \leq 2r$.

### 1.3.3 Ouverts, fermés, voisinages

#### 1.3.3.1 Ouverts, fermés

**Définition 1.3.3.** :
Soit $(E,d)$ un espace métrique.
On dit qu'une partie $O$ de $E$ est **ouverte** si elle est vide ou si pour tout $x \in O$, il existe une boule ouverte de centre $x$ contenue dans $O$.
Autrement dit :

$$O \ (\neq \varnothing) \text{ ouvert} \iff \forall x \in O, \exists r_x > 0 \text{ tel que } B(x,r_x) \subset O.$$

On dit qu'une partie $F$ est **fermée** dans $E$ si le complémentaire de $F$ dans $E$ est ouvert dans $E$.
Autrement dit :

$$F \text{ est fermé dans } E \iff \complement_F^E \text{ est ouvert dans } E.$$

**Exemple 1.3.2.** : De la définition 1.3.3.1.1, on déduit que les ensembles $E$ et $\varnothing$ sont à la fois ouverts et fermés dans $E$.

**Proposition 1.3.1.** *:*
*Dans un espace métrique $(E, d)$ , toute boule ouverte (resp. fermée) est un ensemble ouvert (resp. fermé) dans E.*

**Preuve.** Soit $B(a, r)$ une boule ouverte de $E$. Montrons que c'est un ensemble ouvert dans $E$.
Soit $x \in B(a, r)$ et posons $r' = r - d(a, x)$ .
Montrons que $B(x, r') \subset B(a, r)$ .
Soit $y \in B(x, r')$ . Nous avons
$d(x, y) < r' = r - d(a, x)$ . D'où,
$d(a, x) + d(x, y) < r$ et en vertu de l'inégalité triangulaire, on obtient
$d(a, y) < r$. Donc, $y \in B(a, r)$ et par suite
$B(x, r') \subset B(a, r)$ . Par conséquent, $B(a, r)$ est un ouvert.
Soit $B'(a, r)$ une boule fermée de $E$. Montrons que c'est une partie fermée de $E$. Pour cela, il suffit de démontrer que $\complement^E_{B'(a,r)}$ est un ouvert de $E$. On suppose que $\complement^E_{B'(a,r)} \neq \varnothing$. Sinon, $B'(a, r) = E$ est fermé. Soit $x \in \complement^E_{B'(a,r)}$ et posons $r' = d(a, x) - r$. Montrons que $B(x, r') \subset \complement^E_{B'(a,r)}$. Soit $y \in B(x, r')$ . Nous avons,
$d(x, y) < r' = d(a, x) - r$. D'après l'inégalité triangulaire, $r < d(a, x) - d(x, y) \leq d(a, y)$ .
D'où, $y \in \complement^E_{B'(a,r)}$. Donc, $B(x, r') \subset \complement^E_{B'(a,r)}$.
Par suite, $\complement^E_{B'(a,r)}$ est ouvert et par conséquent $B'(a, r)$ est fermé.

**Proposition 1.3.2.** *:*
$(i)$ *Toute réunion d'ensembles ouverts est un ensemble ouvert.*
$(ii)$ *Toute intersection <u>finie</u> d'ensembles ouverts est un ensemble ouvert.*

**Preuve.** $(i)$ Soit $(O_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts ($I$ fini ou infini). Posons

$$O = \bigcup_{i \in I} O_i.$$

Soit $x \in O$. Il existe donc $i_0 \in I$ tel que $x \in O_{i_0}$. Comme $O_{i_0}$ est ouvert, il va exister $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset O_{i_0} \subset O$. Par suite, $O$ est ouvert. D'où $(i)$ .
$(ii)$ Supposons $I$ fini et posons

$$O = \bigcap_{i \in I} O_i.$$

Soit $x \in O$. Donc, pour tout $i \in I$, $x \in O_i$. Comme $O_i$ est ouvert, pour chaque $i \in I$, il existe $r_i > 0$ tel que $B(x, r_i) \subset O_i$. Posons

$$r_x = \inf_{i \in I} r_i.$$

Puisque $I$ est fini, alors $r_x > 0$ et pour tout $i$, $B(x, r_x) \subset O_i$. Donc,

$$B(x, r_x) \subset \bigcap_{i \in I} O_i.$$

Par conséquent, $O = \bigcap_{i \in I} O_i$ est ouvert. D'où $(ii)$.

**Exemple 1.3.3.** Soit la famille infinie $O_n = \left]-1, \frac{1}{n}\right[$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ d'intervalles ouverts dans $\mathbb{R}$ (boules ouvertes dans $\mathbb{R}$).
La réunion

$$O = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} O_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left]-1, \frac{1}{n}\right[ = \left]-1, 1\right[,$$

est un ouvert.
L'intersection

$$O = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} O_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left]-1, \frac{1}{n}\right[ = \left]-1, 0\right],$$

n'est pas un ouvert.
Par passage aux complémentaires dans la proposition 1.3.3.1.4, nous déduisons facilement le résultat suivant (cf : exercice 3 fiche n$^0$2).

**Proposition 1.3.3.** *:*
$(i)$ *Toute intersection de fermés est un fermé.*
$(ii)$ *Toute réunion finie de fermés est un fermé.*

**Preuve.** (cf : exercice 1 ; fiche TD n$^0$ 2).

**Exercice 1.3.1.** :
Montrer que la sphère $S(a, r)$ est un fermé dans $\mathbb{R}^n$. On peut écrire

$$\complement_{S(a,r)}^{\mathbb{R}^n} = B(a, r) \cup C,$$

où $C$ est le complémentaire de la boule fermée $B'(a, r)$ (cf : exercice 2 fiche TD n$^0$4)

#### 1.3.3.2. Voisinages

##### 1.3.3.2.1. Définition et exemples

**Définition 1.3.4.** :
Soient $(E, d)$ un espace métrique et $x_0 \in E$. On dit qu'une partie $V$ de $E$ est un **voisinage** de $x_0$ si $V$ contient une boule ouverte de centre $x_0$. Autrement dit :

$$V \text{ est un voisinage de } x_0 \iff \exists r > 0 \text{ tel que } B(x_0, r) \subset V.$$

L'ensemble des voisinages de $x_0$ sera noté $\mathcal{V}(x_0)$.

**Exemple 1.3.4.** 1. Dans $\mathbb{R}$ muni de la distance naturelle, $V = ]0,1[$ est un voisinage de $\frac{1}{2}$ car

$$B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right) = \left]\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right[ \subset ]0,1[.$$

2. $V = B(x_0, r)$, $r > 0$, est un voisinage de $x_0$ car $B\left(x_0, \frac{r}{2}\right) \subset B(x_0, r)$.

3. Dans $\mathbb{R}$ muni de la distance naturelle, $V = [0,1]$ n'est pas un voisinage de 0 car on ne peut pas trouver $r > 0$ tel que $B(0,r) = ]-r, r[$ soit incluse dans $[0,1]$.

#### 1.3.3.2.2 Propriétés des voisinages

**Proposition 1.3.4.** *:*
*Soit $(E,d)$ un espace métrique et $x_0 \in E$.*
*$(i)$ Tout voisinage de $x_0$ contient $x_0$.*
*$(ii)$ Toute intersection finie de voisinages de $x_0$ est un voisinage de $x_0$.*
*$(iii)$ Si $V \in \mathcal{V}(x_0)$ et $V \subset W$, alors $W \in \mathcal{V}(x_0)$.*

**Preuve.** $(i)$ Soit $V \in \mathcal{V}(x_0)$. Il existe $r > 0$ tel que $B(x_0,r) \subset V$. Donc, $x_0 \in V$. D'où $(i)$.
$(ii)$ Soit $(V_i)_{i\in I}$ une famille finie de voisinages de $x_0$. Pour tout $i \in I$, il existe $r_i$ tel que $B(x_0, r_i) \subset V_i$. Posons $r = \inf_{i\in I} r_i$. Comme $I$ est fini, $r > 0$ et pour tout $i$, $B(x_0,r) \subset B(x_0,r_i)$. Donc,

$$B(x_0,r) \subset \bigcap_{i\in I} B(x_0,r_i) \subset \bigcap_{i\in I} V_i = V.$$

Par conséquent, $V = \bigcap_{i\in I} V_i \in \mathcal{V}(x_0)$. D'où $(ii)$.
$(iii)$ Soit $V \in \mathcal{V}(x_0)$ et $V \subset W$. Comme $V \in \mathcal{V}(x_0)$, il existe $r > 0$ tel que $B(x_0,r) \subset V$. Donc, $B(x_0,r) \subset W$ et par suite $W \in \mathcal{V}(x_0)$.

**Exercice 1.3.2.** : Montrer que si $V \in \mathcal{V}(x_0)$, il existe $W \in \mathcal{V}(x_0)$ tel que pour tout $y \in W$, $V \in \mathcal{V}(y)$ (cf : exercice 7 fiche TD n$^0$2).

**Proposition 1.3.5.** *:*
*Soient $(E,d)$ un espace métrique, $x_0$ et $y_0$ deux éléments distincts de $E$. Alors, il existe $V \in \mathcal{V}(x_0)$ et $W \in \mathcal{V}(y_0)$ tel que $V \cap W = \varnothing$. On dit que $E$ est un **espace métrique séparé**.*

**Preuve.** Soit $r$ tel que $0 < r < \frac{1}{2} d(x_0, y_0)$. Posons

$$V = B(x_0, r) = \{z \in E / d(x_0, z) < r\} \in \mathcal{V}(x_0),$$

$$W = B(y_0, r) = \{z \in E / d(y_0, z) < r\} \in \mathcal{V}(y_0).$$

Montrons que $V \cap W = \varnothing$. Raisonnons par l'absurde. Supposons que $V \cap W \neq \varnothing$. Soit $z \in V \cap W$. On a

$$d(x_0, z) < r \text{ et } d(y_0, z) < r.$$

En vertu de l'inégalité triangulaire, on déduit que

$$d(x_0, y_0) \leq d(x_0, z) + d(z, y_0) < 2r < d(x_0, y_0).$$

Ce qui est absurde. D'où le résultat.

**Proposition 1.3.6.** *:*
*Soient $(E, d)$ un espace métrique et $O$ une partie non vide de $E$. Alors, $O$ est ouvert si et seulement si $O$ est voisinage de chacun de ses points.*

**Preuve.** Montrons que la condition est nécessaire. Supposons $O$ ouvert et soit $x_0 \in O$. Alors, il existe $r > 0$ tel que $B(x_0, r) \subset O$. Donc, $O \in \mathcal{V}(x_0)$.
Réciproquement, supposons que $O$ est voisinage de chacun de ses points. Pour tout $x_0 \in O$, il existe $r_{x_0} > 0$ tel que $B(x_0, r_{x_0}) \subset O$. Donc, d'après la proposition 1.3.3.1.4,

$$O = \bigcup_{x_0 \in O} B(x_0, r_{x_0})$$

est ouvert.

**1.3.3.2.3 Topologie induite**

Soit $(E, d)$ un espace métrique et $F$ une partie de $E$.

**Définition 1.3.5.** :
L'ensemble $F$ muni de la distance induite $d_F$ sera appelé **sous espace métrique (s.e.m.)**. Pour tout $x_0 \in F$, la boule ouverte $B_F(x_0, r_{x_0})$ de centre $x_0$ et de rayon $r$ dans $F$ est donnée par :

$$B_F(x_0, r_{x_0}) = B(x_0, r_{x_0}) \cap F,$$

où $B(x_0, r_{x_0})$ est la boule ouverte de centre $x_0$ et de rayon $r$ dans $E$. En effet, nous avons,

$$\begin{aligned} B_F(x_0, r_{x_0}) &= \{z \in F / d(x_0, z) < r_{x_0}\} \\ &= \{z \in E / d(x_0, z) < r_{x_0}\} \cap F \\ &= B(x_0, r_{x_0}) \cap F. \end{aligned}$$

Nous avons la proposition suivante.

**Proposition 1.3.7.** *:*
*Pour que $B \subset F$ soit ouvert (resp. fermé) dans F, il faut et il suffit , qu'il existe un ouvert (resp. fermé) A de E tel que*

$$B = A \cap F.$$

**Preuve.** (cf. devoir $n^0 1$)
Les ouverts, fermés et voisinages de $F$ sont les traces sur $F$ des ouverts, fermés et voisinages de $E$.

**Proposition 1.3.8.** *:*
*Soit $x \in F$. Pour qu'une partie $V_F \subset F$ soit un voisinage de x dans F, il faut et il suffit , qu'il existe un voisinage $V_E$ de x dans E tel que*

$$V_F = V_E \cap F.$$

**Preuve.** (cf. devoir $n^0 1$)

**Remarque 1.3.1.** *Les ouverts (resp. fermés) de F ne sont pas nécessairement des ouverts (resp. fermés) de E.*

Nous allons justifier cette remarque à l'aide d'un exemple.

**Exemple 1.3.5.** :
On prend $E = (\mathbb{R}, d_1)$ où $d_1(x, y) = |x - y|$, $F = ]0, 2]$ . L'intervalle $]1, 2]$ est un ouvert de $F$ car

$$]1, 2] = ]1, 3[ \cap ]0, 2] = ]1, 3[ \cap F.$$

Cependant, $]1, 2]$ n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}$. De même l'intervalle $]0, 1]$ est un fermé de $F$ car

$$]0, 1] = ]0, 2] \cap [0, 1] ,$$

mais $]0, 1]$ n'est pas un fermé de $\mathbb{R}$.

### 1.3.4 Intérieur, adhérence, point d'accumulation, frontière d'un ensemble

Soit $(E, d)$ un espace métrique et A une partie de $E$.

#### 1.3.4.1 Intérieur

**Définition 1.3.6.** :
On dit qu'un point $x_0$ de $E$ est un **point intérieur** à A si A est un voisinage de $x_0$. En d'autres termes, un point $x_0 \in E$ est intérieur à A s'il existe $r > 0$ tel que $B(x_0, r) \subset$A.
L'ensemble des points intérieurs à A s'appelle **intérieur de** A et se note $\overset{\circ}{\text{A}}$.

**Remarque 1.3.2.** *: Nous avons*

$$\overset{\circ}{A} \subset A, \text{et } A \subset B \Longrightarrow \overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}.$$

*En effet, si $x_0 \in \overset{\circ}{A}$, alors A$\in \mathcal{V}(x_0)$, donc B qui contient A est aussi un voisinage de $x_0$ et par suite $x_0 \in \overset{\circ}{B}$.*

**Proposition 1.3.9.** *:*
*L'intérieur $\overset{\circ}{A}$ est un ouvert et c'est le plus grand ouvert contenu dans A.*

**Preuve.** Soit $\mathrm{x}_0 \in \overset{\circ}{\text{A}}$, il existe donc $r > 0$ tel que $B(x_0, r) \subset$A. Chaque point de $B(x_0, r)$ est intérieur à A ceci entraine que $B(x_0, r) \subset \overset{\circ}{\text{A}}$. Donc, $\overset{\circ}{\text{A}}$ est un voisinage de chacun de ses points et en vertu de la proposition 1.3.3.2.2.4, $\overset{\circ}{\text{A}}$ est ouvert. Montrons maintenant que $\overset{\circ}{\text{A}}$ est le plus grand ouvert contenu dans A. Soit $O$ un ouvert contenu dans A. D'après la proposition 1.3.3.2.2.4, $O$ est un voisinage de chacun de ses points. Donc, chaque point de $O$ est intérieur à A. Par conséquent, $O \subset \overset{\circ}{\text{A}}$. D'où $\overset{\circ}{\text{A}}$ est le plus grand ouvert contenu dans A.

**Exemples 1.3.6.**
1. $E = \mathbb{R}$, muni de la distance naturelle et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$,

$$\overset{0}{\widehat{]a,b[}} = \overset{0}{\widehat{[a,b[}} = \overset{0}{\widehat{]a,b]}} = \overset{0}{\widehat{[a,b]}} = ]a,b[\,,$$

$$\overset{0}{\mathbb{Q}} = \varnothing; \ \ \overset{0}{\complement_{\mathbb{Q}}^{\mathbb{R}}} = \varnothing.$$

2. $E = (\mathbb{R}^p, d_i)\,, i = 1, 2, \infty,$

$$\overset{0}{\widehat{B'(x_0, r)}} = B(x_0, r)\,.$$

De la proposition 1.3.4.3 résulte le corollaire suivant.

**Corollaire 1.3.1.** *A est ouvert si et seulement si $\overset{\circ}{A}$ =A.*

**Preuve.** (cf. exercice 7 ; fiche TD $\mathrm{n}^0 2$)

#### 1.3.4.2 Adhérence

Soit $(E, d)$ un espace métrique, A une partie de $E$ et $x_0 \in A$.

**Définition 1.3.7.** :
On dit que $x_0$ est **adhérent** à A si tout voisinage de $x_0$ contient un point de $A$.
Autrement dit :

$$\begin{aligned} x_0 \text{ est adhérent à } A &\iff \forall V \in \mathcal{V}(x_0),\ V \cap A \neq \varnothing \\ &\iff \forall r > 0,\ B(x_0, r) \cap A \neq \varnothing. \end{aligned}$$

L'ensemble des points **adhérents** à $A$ se nomme **adhérence** de $A$ et on le note $\overline{A}$.

**Remarque 1.3.3.** *:*

1. $A \subset \overline{A}$.
2. $A \subset B \Longrightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$.

**Proposition 1.3.10.** *:*
*L'adhérence $\overline{A}$ d'un ensemble $A$ est un fermé et c'est le plus petit fermé qui contient $A$.*

**Preuve.** Posons $B = \complement_A^E$. On a

$$\begin{aligned} x_0 \quad \notin \quad & \overline{A} \iff x_0 \in \complement_{\overline{A}} \iff \exists V \in \mathcal{V}(x_0) \text{ tel que } V \cap A = \varnothing. \\ \iff \quad & \exists V \in \mathcal{V}(x_0) \text{ tel que } V \subset \complement_A^E = B \iff x_0 \in \overset{\circ}{B}. \end{aligned}$$

Donc, $\overline{A} = \complement^E_{\overset{\circ}{B}}$ et par conséquent, $\overline{A}$ est fermé. Montrons que $\overline{A}$ est le plus petit fermé contenant $A$. Soit $F$ un fermé qui contient $A$. $\complement_F^E$ est un ouvert contenu dans $\complement_A^E = B$. Donc, $\complement_F^E \subset \overset{\circ}{B} \subset B$. Par conséquent, $\overline{A} = \complement^E_{\overset{\circ}{B}} \subset F$. D'où le résultat.

**Exemple 1.3.7.** 1. $E = \mathbb{R}$, muni de la distance usuelle $a < b$,

$$\overline{[a, b]} = \overline{]a, b[} = \overline{]a, b]} = \overline{[a, b[} = [a, b]$$

$$\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R};\ \overline{\complement_{\mathbb{Q}}^{\mathbb{R}}} = \mathbb{R}.$$

2. $E = (\mathbb{R}^p, d_i)$, $i = 1, 2, \infty$, $p \geq 1$,

$$\overline{B(x_0, r)} = B'(x_0, r).$$

De la définition et la proposition 1.3.4.2.3, nous déduisons le corollaire suivant.

**Corollaire 1.3.2.** *:*
$(i)$ *$\forall x_0 \in A$, $x_0 \in \overline{A}$.*
$(ii)$ *$A$ est fermé $\iff A = \overline{A}$.*

**Preuve.** (cf : exercice 7 fiche n$^0$2)

#### 1.3.4.4. Ensembles denses

**Définition 1.3.8.** :
Soient $A$ et $B$ deux parties d'un espace métrique $(E, d)$ telles que $A \subset B$.
On dit que $A$ est **dense** dans $B$ si $B \subset \overline{A}$.
On dit que $A$ est **partout dense** si $\overline{A} = E$.

**Exemple 1.3.8.** Des exemples 1.3.4.2.4, nous déduisons que $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ sont des parties partout denses dans $\mathbb{R}$.

**Remarque 1.3.4.** *Les ensembles $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ ne sont ni ouverts ni fermés dans $\mathbb{R}$.*

**Définition 1.3.9.** :
On dit que $x_0$ est un point **isolé** de $A$ s'il existe un voisinage $V$ de $x_0$ tel que $V \cap A = \{x_0\}$.
En d'autres termes, le point $x_0 \in A$ est isolé s'il n'est pas adhérent à $A \setminus \{x_0\}$.

**Exemples 1.3.9.**

1. L'ensemble $\mathbb{Z}$ ne contient que des points isolés car

$$\forall n \in \mathbb{Z}, V_n = \left]n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}\right[ \in \mathcal{V}(n) \text{ et } V_n \cap \mathbb{Z} = \{n\}.$$

2. $\mathbb{Q}$ ne contient aucun point isolé car

$$\forall x \in \mathbb{Q} \text{ et } \forall \varepsilon > 0, ]x - \varepsilon, x + \varepsilon[ \cap \mathbb{Q} \setminus \{x\} \neq \varnothing.$$

**Définition 1.3.10.** :
On dit qu'un point $a \in E$ est un **point d'accumulation** de $A$ si tout voisinage de $x_0$ contient un point de $A$ autre que $x_0$.
En d'autres termes,

$$a \in E \text{ est un point d'accumulation de } A \iff \forall V \in \mathcal{V}(a), (V \setminus \{a\}) \cap A \neq \varnothing.$$

**Remarques 1.3.2.**

1. Si $a \in E$ est un point d'accumulation de $A$, alors $a$ n'est pas un pont isolé.
2. Si $a \in E$ est un point d'accumulation de $A$, alors $a \in \overline{A}$.
3. Un point d'accumulation de $A$ n'appartient pas nécessairement à $A$.

**Proposition 1.3.11.** *:*
*Soit $a \in E$. Pour que $a$ soit un point d'accumulation de $A$, il faut et il suffit que tout voisinage $V$ de $a$ contient une infinité de points de $A$.*

**Preuve.** (cf. exercice 11 ; fiche TD n$^0$2)

**Remarque 1.3.5.** *Tout point d'accumulation est adhérent à $A$.*
*Par contre, un point adhérent à $A$ n'est pas nécessairement un point d'accumulation.*

Ainsi, par exemple, dans $\mathbb{R}$ muni de la distance naturelle posons $A = \{0\} \cup ]1,2]$. On a,

$$A' = [1,2], \ \ \overline{A} = \{0\} \cup [1,2].$$

Donc, 0 est un point adhérent qui n'est pas un point d'accumulaltion.

#### 1.3.4.5 Frontière

**Définition 1.3.11.** :
Soient $(E,d)$ un espace métrique, $A$ une partie de $E$ et $x_0 \in E$. On dit que $x_0$ est un **point frontière** de $A$ si tout voisinage de $x_0$ rencontre à la fois $A$ et $\complement_A^E$.
**La frontière** de $A$ est l'ensemble de ses points frontières et se note $\partial(A)$ ou $Fr(A)$.

$$x_0 \in \partial(A) \Leftrightarrow \forall V \in \mathcal{V}(x_0), \ \ V \cap A \neq \varnothing \ \text{ et } \ V \cap \complement_A^E \neq \varnothing.$$

**Remarque 1.3.6.** *:* $\partial(A) = \overline{A} \cap \overline{\complement_A^E}$.

En effet,

$$\begin{aligned} x \in \partial A \quad & \Leftrightarrow \quad \forall V \in \mathcal{V}(x_0), \ V \cap A \neq \varnothing \ \text{ et } \ V \cap \complement_A^E \neq \varnothing \\ & \Leftrightarrow \quad x \in \overline{A} \text{ et } x \in \overline{\complement_A^E} \\ & \Leftrightarrow \quad x \in \overline{A} \cap \overline{\complement_A^E}. \end{aligned}$$

**Exemple 1.3.10.** 1. $\partial\, ]a,b[ = \partial\, [a,b] = \partial\, [a,b[ = \partial\, ]a,b] = \{a,b\}$.

2. $\partial B(a,r) = \partial B'(a,r) = S(a,r)$.

## 1.4 Limites de suites, suites de Cauchy

### 1.4.1 Suites et limites

**Définition 1.4.1.** :
On appelle suite d'éléments de $\mathbb{R}^p$, $p \geq 1$, une application

$$\begin{aligned} u : \mathbb{N} \quad & \longrightarrow \quad \mathbb{R}^p \\ n \quad & \mapsto \quad u_n = \left(u_n^{(1)}, u_n^{(2)}, \ldots, u_n^{(p)}\right), \end{aligned}$$

où $u_n^{(i)} \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \cdots, p$. Une telle suite sera notée $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou simplement $(u_n)$.
$u_n$ est le $n^{ième}$ terme de la suite ou le terme de rang $n$.

**Définition 1.4.2.** :

**Définition 1.4.1.2.** on appelle sous-suite (ou suite extraite) de $(u_n)$ une suite de la forme $\left(u_{\varphi(n)}\right)$ où $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ est une application strictement croissante.

**Exemple 1.4.1.** Les suites $(u_{2n})$ et $(u_{2n+1})$ sont deux suites extraites de la suite $(u_n)$.
Par la suite, $\mathbb{R}^p$, $p \geq 1$, sera muni d'une norme notée $\| \ \|$.

**Définition 1.4.3.** :
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}^p$. On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge** (ou **tend**) vers une limite $l = (l_1, l_2, \cdots, l_p) \in \mathbb{R}^p$ si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, n \geq n_\varepsilon \Longrightarrow \|u_n - l\| < \varepsilon.$$

Notation : $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n = l$ ou $u_n \longrightarrow l$ quand $n \longrightarrow +\infty$.

**Remarque 1.4.1.** *: Si $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n = l$, alors pour tout $r > 0$,*

$$B(l, r) = \{x \in \mathbb{R}^p / d(x, l) < r\} = \{x \in \mathbb{R}^p / \|x - l\| < r\},$$

*contient tous les termes de la suite sauf un nombre fini. Ceci est équivalent à dire que tout voisinage $V$ de $l$ contient tous les termes de la suite sauf un nombre fini.*

**Remarque 1.4.2.** *: La convergence d'une suite dans $\mathbb{R}^p$ ne dépend pas de la norme choisie (car dans $\mathbb{R}^p$, toutes les normes sont équivalentes).*

**Exemple 1.4.2.** : Soit $(u_n)$ la suite de $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$u_n = \left(\frac{n}{n+1}, e^{-n}\right), n \in \mathbb{N}.$$

Montrons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l = (1, 0)$. Pour la norme $\| \ \|_\infty$, nous avons,

$$\|u_n - l\|_\infty = \sup\left(\frac{1}{n+1}, e^{-n}\right).$$

Comme $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty.} \frac{1}{n+1} = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty.} e^{-n} = 0$, alors, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned} \exists n_1 &\in \mathbb{N},\ n \geq n_1 \Longrightarrow \frac{1}{n+1} < \varepsilon, \\ \exists n_2 &\in \mathbb{N},\ n \geq n_2 \Longrightarrow e^{-n} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Posons $n_\varepsilon = \sup(n_1, n_2)$. Pour tout $n \geq n_\varepsilon$, on a

$$\frac{1}{n+1} < \varepsilon \text{ et } e^{-n} < \varepsilon.$$

D'où,

$$\|u_n - l\|_\infty = \sup\left(\frac{1}{n+1}, e^{-n}\right) < \varepsilon.$$

Donc, $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n = (1, 0)$.

**Unicité de la limite**

**Proposition 1.4.1.** *:*
*Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}^p$. Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors la limite est unique.*

**Preuve.** Supposons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers deux limites distinctes $l$ et $l'$. Donc,

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists n_\varepsilon\in\mathbb{N},\ n\geq n_\varepsilon \Longrightarrow \|u_n-l\|<\frac{\varepsilon}{2} \text{ et } \|u_n-l'\|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

En vertu de l'inégalité triangulaire, on obtient

$$\forall\varepsilon>0,\ \ \|l-l'\|\leq\|u_n-l\|+\|u_n-l'\|<\varepsilon.$$

Ce qui est absurde. Par conséquent, $l=l'$. D'où l'unicité.

**Définition 1.4.4.** :
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}^p$. On dit qu'un élément $a$ de $E$ est une **valeur d'adhérence** de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si pour tout $r>0$,

$$\{n\in\mathbb{N}/\ \|u_n-a\|<r\} \text{ est infini.}$$

**Remarque 1.4.3.** *: Toute valeur d'adhérence d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points d'un ensemble $A$ appartient à $\overline{A}$.*

En effet, soit $a$ une valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset A$. Par définition d'une valeur d'adhérence,

$$\forall r>0,\ \ \{n\in\mathbb{N}/\ \|u_n-a\|<r\} \text{ est infini.}$$

Donc, pour tout $r>0$, $B(a,r)\cap A\neq\varnothing$ et par suite $a\in\overline{A}$.

**Remarque 1.4.4.** *: Si $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}u_n=l$, alors $l$ est une valeur d'adhérence. La réciproque est, en général, fausse.*

En effet,

$$\begin{aligned}\lim_{n\longrightarrow+\infty}u_n &= l\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\ \exists n_\varepsilon\in\mathbb{N}, n\geq n_\varepsilon\Longrightarrow\|u_n-l\|<\varepsilon.\\ &\Longrightarrow \forall\varepsilon>0,\ \ \{n\in\mathbb{N}/\ \|u_n-l\|<\varepsilon\} \text{ est infini.}\end{aligned}$$

D'où la première assertion. Montrons à l'aide d'un contre-exemple que la réciproque est fausse. Pour cela, considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$x_n=(-1)^n,\ \ n\in\mathbb{N}.$$

On a

$$u_{2n} = 1 \text{ et } u_{2n+1} = -1.$$

1 et $-1$ sont des valeurs d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Cependant, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

**Proposition 1.4.2.** *:*
*Soit $(u_n)$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}^p$ convergente vers $l$. Alors $l$ est l'unique valeur d'adhérence de la suite.*

**Preuve.** Supposons que la suite $(u_n)$ admet une valeur d'adhérence $l' \neq l$. Soit $\varepsilon$ tel que $0 < \varepsilon < \dfrac{\|l-l'\|}{2}$. Comme $(u_n)$ tend vers $l$ et $l'$ est une valeur d'adhérence de $(u_n)$, alors on a

$$\begin{aligned} \exists n_0 &\in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \Longrightarrow \|u_n - l\| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ et} \\ A &= \left\{ n / \left\|u_n - l'\right\| < \frac{\varepsilon}{2} \right\} \text{ est infini.} \end{aligned}$$

Comme $A$ est infini, il existe $N \geq n_0$ tel que $N \in A$. Donc, en vertu de l'inégalité triangulaire, on a

$$\left\|l - l'\right\| \leq \|l - u_N\| + \left\|u_N - l'\right\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon = \frac{\|l-l'\|}{2}.$$

Ce qui est absurde. Donc, $l = l'$.

**Remarque 1.4.5.** *: Une suite qui admet une seule valeur d'adhérence ne converge pas nécessairement vers cette valeur. Considérons la suite $(u_n)$ définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$u_{2n} = n,\ \ u_n = \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^*.$$

*La suite $(u_n)$ n'admet pas d'autre valeur d'adhérence que l'origine. Cependant, la suite $(u_n)$ ne converge pas vers 0.*

La proposition suivante va nous permettre de se ramener au cas de suites d'éléments de $\mathbb{R}$. Soit $(u_n) = \left(u_n^{(1)}, u_n^{(2)}, \ldots, u_n^{(p)}\right)$ une suite de $\mathbb{R}^p$ ; $u_n^{(k)}$ est la $k^{\text{ème}}$ composante de $u_n$, $1 \leq k \leq p$.

**Proposition 1.4.3.** *:*
*Soit $(u_n) = \left(u_n^{(1)}, u_n^{(2)}, \ldots, u_n^{(p)}\right)$ une suite de $\mathbb{R}^p$. Alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l = (l_1, l_2, \ldots, l_p) \in \mathbb{R}^p$ si et seulement si pour tout $k = 1, \ldots, p$, la suite $\left(u_n^{(k)}\right)$ converge vers $l_k \in \mathbb{R}$.*

**Preuve.** Comme $\| \ \| \backsim \| \ \|_\infty$ (norme sup), alors il existe $\beta > 0$ tel que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^p, \ \ \|x - y\|_\infty \leq \beta \|x - y\| .$$

Nous avons

$$\begin{aligned}
\lim_{n \longrightarrow +\infty} u_n = l \quad & \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, n \geq n_\varepsilon \Longrightarrow \|u_n - l\| < \frac{\varepsilon}{\beta} \\
& \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, n \geq n_\varepsilon \Longrightarrow \|u_n - l\|_\infty < \varepsilon \\
& \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, n \geq n_\varepsilon \Longrightarrow \sup_{k=1,\ldots,p} \left| u_n^{(k)} - l_k \right| < \varepsilon \\
& \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, n \geq n_\varepsilon \Longrightarrow \left| u_n^{(k)} - l_k \right| < \varepsilon \ \ \forall k = 1, \ldots, p \\
& \Leftrightarrow \quad \lim_{n \longrightarrow +\infty} u_n^{(k)} = l_k, \ k = 1, \ldots, p.
\end{aligned}$$

D'où la proposition.

**Exemple 1.4.3.** : Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de $\mathbb{R}^3$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \left( \sin\left(\frac{1}{n}\right), \frac{1}{n+1}, e^{-\frac{1}{n}} \right)$. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $l = (0, 0, 1)$ car $\lim_{n \longrightarrow +\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ et $\lim_{n \longrightarrow +\infty} e^{-\frac{1}{n}} = 1$.

### 1.4.2 Caractérisation des points d'accumulation et des points d'adhérence

**Proposition 1.4.4.** *:*
*Soit $A$ une partie de $\mathbb{R}^p$ et $x \in \mathbb{R}^p$. Pour que $x \in \overline{A}$, il faut et il suffit qu'il existe une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que :*
*$(i)$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in A$.*
*$(ii)$ $(u_n)$ converge vers $x$ dans $\mathbb{R}^p$.*

**Preuve.** S'il existe une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant $(i)$ et $(ii)$ alors $x \in \overline{A}$. Réciproquement, supposons que $x \in \overline{A}$. Nous avons

$$\forall n \in \mathbb{N}, B\left(x, \frac{1}{n+1}\right) \cap A \neq \varnothing.$$

D'où,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists u_n \in B\left(x, \frac{1}{n+1}\right) \cap A.$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in A \text{ et } d(x,u_n) = \|u_n - x\| < \frac{1}{n+1}.$$

Donc, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in A$ et $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} u_n = x$.

**Proposition 1.4.5.** *:*
*Soit $A$ une partie de $\mathbb{R}^p$ et $x \in \mathbb{R}^p$. Pour que $x$ soit un point d'accumulation de $A$ il faut et il suffit qu'il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que*
*$(i)$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in A$.*
*$(ii)$ $(u_n)$ converge vers $x$.*
*$(iii)$ $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$ et $n \neq m \Longrightarrow u_n \neq u_m$.*

**Preuve.** L'existance d'une suite $(u_n)$ vérifiant $(i)$, $(ii)$ et $(iii)$ entraîne que $x$ est un point d'accumulation de $A$. Réciproquement, supposons que $x$ est un point d'accumulation de $A$ et construisons une suite $(u_n)$ vérifiant les conditions $(i)$, $(ii)$ et $(iii)$ de la manière suivante.
Pour $r_0 = 1$, $B(x,r_0) \cap A \neq \varnothing$. Donc, $\exists u_0 \in B(x,r_0) \cap A$.
Pour $r_1 = \min\left(\frac{1}{2}, \|u_0 - x\|\right) > 0$, $B(x,r_1) \cap A \neq \varnothing$. Donc, $\exists u_1 \in B(x,r_1) \cap A$.
Ainsi, par récurrence, on construit

$$r_{n+1} = \min\left(\frac{1}{2^{n+1}}, \|u_n - x\|\right) > 0.$$

Nous avons $B(x,r_{n+1}) \cap A \neq \varnothing$. Donc, il existe $u_{n+1} \in B(x,r_{n+1}) \cap A$. La suite ainsi construite vérifie les conditions $(i)$, $(ii)$ et $(iii)$.

### 1.4.3 Suites de Cauchy

**Définition 1.4.5.** :
On dit que la suite $(u_n)$ est de **Cauchy** si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, n \geq n_\varepsilon \text{ et } m \geq n_\varepsilon \Longrightarrow \|u_n - u_m\| < \varepsilon.$$

**Remarque 1.4.6.**
1. *La définition exprime le fait qu'aussi petit que soit $\varepsilon$, les termes de la suite $(u_n)$ ont à partir d'un certain rang $n_\varepsilon$ des distances mutuelles plus petites que $\varepsilon$.*
2. *La notion de suite de Cauchy reste invariante si la norme est remplacée par une une autre norme (car dans $\mathbb{R}^p$, toutes les normes sont équivalentes).*

**Proposition 1.4.6.** *:*
*Toute suite convergente est de Cauchy.*

**Preuve.** Soit $(u_n)$ une suite qui converge vers $l$. On a

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, n \geq n_\varepsilon \Longrightarrow \|u_n - l\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

En vertu de l'inégalité triangulaire, on déduit

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, n \geq n_\varepsilon \text{ et } m \geq n_\varepsilon \Longrightarrow \|u_n - u_m\| < \varepsilon.$$

**Proposition 1.4.7.** *:*
*Toute suite de Cauchy est bornée. En particulier, toute suite convergente est bornée.*

**Preuve.** Soit $(u_n)$ une suite de Cauchy. Pour $\varepsilon = 1$,

$$\exists n_1 \in \mathbb{N}, n \geq n_1 \text{ et } m \geq n_1 \Longrightarrow \|u_n - u_m\| < 1$$

Posons

$$A = \{u_n, n \in \mathbb{N}\}.$$

Soient $u_n$ et $u_m$ deux éléments de $A$. On a

$$\begin{aligned} \|u_n - u_m\| &\leq \|u_n - u_{n_1}\| + \|u_{n_1} - u_m\| \\ &\leq 2 + 2\sup_{j<n_1} \|u_j - u_{n_1}\| = r < \infty. \end{aligned}$$

D'où,

$$\delta(A) = \sup_{u_n \in A, u_m \in A} d(u_n, u_m) = \sup_{u_n \in A, u_m \in A} \|u_n - u_m\| \leq r < \infty.$$

Donc, $A$ est borné. Le cas particulier est immédiat.

**Proposition 1.4.8.** *:*
*Soit $(u_n) = \left(u_n^{(1)}, u_n^{(2)}, \ldots, u_n^{(p)}\right)$ une suite de $\mathbb{R}^p$. Pour que $(u_n)$ soit une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}^p$, il faut et il suffit, que pour tout $k = 1, 2, \ldots, p$, la suite $\left(u_n^{(k)}\right)$ soit de Cauchy dans $\mathbb{R}$.*

**Preuve.** On fera la démonstration pour la distance $\|.\|_\infty$.
Montrons que la condition est nécessaire. Supposons que la suite $(u_n)$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}^p$.

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, n \geq n_\varepsilon \text{ et } m \geq n_\varepsilon \Longrightarrow \|u_n - u_m\|_\infty < \varepsilon.$$

D'où,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, n \geq n_\varepsilon \text{ et } m \geq n_\varepsilon \Longrightarrow \sup_{k=1,\ldots,p} \left|u_n^{(k)} - u_m^{(k)}\right| < \varepsilon.$$

Donc,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, n \geq n_\varepsilon \text{ et } m \geq n_\varepsilon \Longrightarrow \left| u_n^{(k)} - u_m^{(k)} \right| < \varepsilon,\ \ \forall k = 1, \ldots, p.$$

D'où $\forall k = 1, \ldots, p$, $\left(u_n^{(k)}\right)$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$.
Montrons que la condition est suffisante. Supposons que pour tout $k = 1, 2, \ldots, p$, $\left(u_n^{(k)}\right)$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$. Donc,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall k = 1, 2, \ldots, p,\ \exists n_{\varepsilon,k} \in \mathbb{N}, n \geq n_{\varepsilon,k} \text{ et } m \geq n_{\varepsilon,k} \Longrightarrow \left| u_n^{(k)} - u_m^{(k)} \right| < \varepsilon.$$

Posons

$$n_\varepsilon = \sup_{k=1,\ldots,p} n_{\varepsilon,k}.$$

On a donc

$$\forall n \geq n_\varepsilon \text{ et } \forall m \geq n_\varepsilon,\ \sup_{k=1,\ldots,p} \left| u_n^{(k)} - u_m^{(k)} \right| < \varepsilon.$$

Par conséquent, la suite $(u_n)$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}^p$.

## 1.5 Ensembles compacts

**Définition 1.5.1.** :
Une partie $A$ de $\mathbb{R}^p$ est dite **compacte** si $A$ est une partie fermée est bornée.

**Exemple 1.5.1.**
1. L'intervalle $[a, b]$ est un ensemble compact de $\mathbb{R}$.
2. La boule fermée $B'(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^p / \|x - a\| \leq r\}$ est un compact de $\mathbb{R}^p$.
3. $B(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^p / \|x - a\| < r\}$ et $B^\star(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^p / 0 < \|x - a\| < r\}$ ne sont pas des parties compactes de $\mathbb{R}^p$ car elles ne sont pas fermées,

$$B(a,r) \neq \overline{B(a,r)} = B'(a,r) \text{ et}$$

$$B^\star(a,r) \neq \overline{B^\star(a,r)} = B'(a,r).$$

4. $D(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^p / \|x - a\| \geq r\}$ et $E(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^p / \|x - a\| > r\}$ ne sont pas des ensembles compacts de $\mathbb{R}^p$ car ils ne sont pas bornés.

**Définition 1.5.2.** :
Soit $A$ une partie de $\mathbb{R}^p$ et $\mathcal{R} = (R_i)_{i \in I}$ une famille de parties de $\mathbb{R}^p$. On dit que la famille $\mathcal{R}$ **recouvre** $A$ (ou constitue **un recouvrement** de $A$) si

$$A \subset \bigcup_{i \in I} R_i.$$

• Le recouvrement est dit <u>fini</u> si $I$ est un ensemble fini.
• Le recouvrement est dit <u>ouvert</u> si les $R_i, i \in I$, sont des parties ouvertes de $\mathbb{R}^p$.

**Exemple 1.5.2.** 1. La famille $\mathcal{R} = (]-n, n[)_{n\in\mathbb{N}}$ est un recouvrement ouvert de $\mathbb{R}$ car

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} ]-n, n[\,.$$

2. La famille $\mathcal{R} = \left(\left[0, \frac{1}{n}\right]\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est un recouvrement de $[0,1]$ car

$$[0,1] \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \left[0, \frac{1}{n}\right].$$

**Proposition 1.5.1.** *:*
*Soit $A$ une partie de $\mathbb{R}^p$. Les propositions suivantes sont équivalentes.*
*$(i)$ $A$ est compacte.*
*$(ii)$ $A$ possède la propriété de* ***Bolzano-Weierstrass :*** *Toute suite d'éléments de $A$ admet une sous-suite qui converge vers un élément <u>appartenant</u> à $A$.*
*$(iii)$ Tout sous-ensemble infini d'éléments de $A$ possède un point d'accumulation <u>appartenant</u> à $A$.*
*$(iv)$ $A$ possède la propriété de* ***Borel-Lebesgue :*** *de <u>tout recouvrement ouvert</u> de $A$, on peut extraire un <u>recouvrement fini.</u>*

**Exemples 1.5.3.** 1. $\varnothing$ est compact.

2. $\forall a \in \mathbb{R}^p$, $\{a\}$ est compact, et tout ensemble fini $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ est compact.

3. $\mathbb{R}$ n'est pas compact.

4. Le sous-ensemble de $\mathbb{R}$

$$A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\},$$

n'est pas compact car 0 est un point d'accumulation de $A$ et $0 \notin A$.

5. Soit $(x_n)$ une suite de réels qui converge vers $x$, alors, Le sous-ensemble de $\mathbb{R}$

$$A = \{x_n / n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\},$$

est un compact de $\mathbb{R}$ c'est un ensemble fermé et borné. Il est fermé car toute suite convergente à valeurs dans cet ensemble est soit stationnaire, soit converge vers $x$, puisque les points $x_n$ sont tousI isolés.

**Remarques 1.5.1.** 1. Si $A$ est un compact de $\mathbb{R}^p$ et $B$ un compact de $\mathbb{R}^q$, alors

$$A \times B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^{p+q} / x \in A \text{ et } y \in B\right\},$$

est un compact de $\mathbb{R}^{p+q}$.

2. Si $A$ est un ensemble borné de $\mathbb{R}$, alors $\overline{A}$ est compact.

## 1.6 EXERCICES

# EXERCICES

**Exercice 1 :** Les fonctions suivantes sont-elles des distances sur $\mathbb{R}$?

$d_1(x,y) = (x-y)^2$ ; $d_2(x,y) = \sqrt{|y-x|}$; $d_3(x,y) = \left|y^3 - x^3\right|$ ;

$d_4(x,y) = \left|y^2 - x^2\right|$ ; $d_5(x,y) = |y-2x|$ .

**Exercice 2 :** (Norme de Hölder)

1) Soient $p$ et $q$ deux réels positifs vérifiant $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$. Déterminer le minimum de la fonction

$$f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longrightarrow \frac{t^p}{p}+\frac{t^{-q}}{q}.$$

En déduire que pour tout $a, b \in \mathbb{C}$, on a

$$|ab| \leq \frac{|a|^p}{p}+\frac{|b|^q}{q}.$$

2) On désigne par $a_1,\ldots,a_n$; $b_1,\ldots,b_n$, $2n$ nombres réels ou complexes ; et on pose

$$\alpha = \left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}},\ \ \beta = \left(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Montrer à l'aide de 1), que pour tout $k = 1,2,,\ldots,n$, on a

$$\frac{|a_k b_k|}{\alpha\beta} \leq \frac{|a_k|^p}{p\alpha^p}+\frac{|b_k|^q}{q\beta^q},$$

et en déduire l'inégalité de Hölder

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \leq \left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

3) Etablir l'inégalité de Minkowski

$$\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k+b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

(On pourra écrire $(a_k+b_k)^p = a_k(a_k+b_k)^{p-1}+b_k(a_k+b_k)^{p-1}$ et utiliser (2)).

4) On définit l'application $\| \,.\, \|_p$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^+$ par :

$$\|x\|_p = \|(x_1, x_2, \ldots, x_n)\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\dfrac{1}{p}}, \quad p \geq 1.$$

Prouver que $\| \,.\, \|_p$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$.

**Exercice 3 :** Soit $\Phi$ une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^+$, strictement croissante, vérifiant $\Phi(0) = 0$ et qui est sous-additive ie., $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2$,

$$\Phi(x + y) \leq \Phi(x) + \Phi(y).$$

1) Montrer que si $d$ est une distance sur un ensemble $E$, $d_* = \Phi o d$ en est aussi une.

2) Montrer que si $d$ est une distance sur $E$,

$$d_1 = \frac{d}{1+d}; \quad d_2 = \ln(1 + d),$$

sont des distances sur $E$.

**Exercice 4 :** Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction strictement croissante. On définit $d$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^+$ par :

$$d(x, y) = |f(y) - f(x)|,$$

1) Montrer que $d$ est une distance sur $\mathbb{R}$.

2) On prend $f(x) = x^{\dfrac{1}{3}}$; la distance $d$ correspondante est-elle équivalente à la distance $d_1$ définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $d_1(x, y) = |y - x|$?

**Exercice 5 :** Soit $d$ la distance usuelle sur $\mathbb{R}$ définie par : $d(x, y) = |y - x|$ et $d_1$ l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $d_1(x, y) = |\arctan(y) - \arctan(x)|$.

1) Montrer que $d_1$ est une distance sur $\mathbb{R}$. $\mathbb{R}$ est-il borné pour la distance $d_1$?

2) Décrire et représenter la boule ouverte $B(0, 1)$ relativement à $d_1$.

3) Les distances $d$ et $d_1$ sont-elles équivalentes ?

**Exercice 6 :** Soit $a$ et $b$ deux réels strictement positifs. On pose

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \ \mathbf{N}(x, y) = \sqrt{a^2x^2 + b^2y^2}.$$

On rappelle que la norme $\mathbf{N}_2$ est définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $\mathbf{N}_2(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

1) Prouver que $\mathbf{N}$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$. Que peut-on dire des normes $\mathbf{N}$ et $\mathbf{N}_2$?

2) Déterminer et dessiner la boule fermée de centre 0 et de rayon 1 pour les deux normes $\mathbf{N}$ et $\mathbf{N}_2$.

3) Déterminer $p$ et $q$ tel que

$$\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ p\,\mathbf{N}_2(x,y) \leq \mathbf{N}(x,y) \leq q\,\mathbf{N}_2(x,y).$$

<u>**Exercice 7 :**</u> Soit $\mathbb{R}^n$ muni d'une norme $\|\ .\ \|$.

1) Montrer que pour tous $x$, $y$ éléments de $\mathbb{R}^n$, on a

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x-y\|\,.$$

2) Si $x \neq 0$ et $y \neq 0$, montrer que

$$\begin{aligned} &\|x\| \left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\| \leq 2\,\|x-y\|\,, \\ &\|x-y\| \geq \frac{1}{2} \sup\left[\|x\|\,, \|y\|\right] \cdot \left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\|. \end{aligned}$$

<u>**Exercice 8 :**</u> Soit $\delta$ une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^+$ définie par :

$$\delta\,(x,y) = \begin{cases} 0 \text{ si } x = y, \\ 1 \text{ si } x \neq y. \end{cases}$$

1) Montrer que $\delta$ est une distance sur $\mathbb{R}^n$.

2) Déterminer toutes les boules ouvertes et fermées de centre $x \in \mathbb{R}$ et de rayon $r > 0$.

**Dans toute la suite, $E$ désignera un espace métrique.**

<u>**Exercice 9 :**</u> Montrer que

1) Toute intersection d'ensembles fermés de $E$ est fermée dans $E$.

2) Toute réunion finie d'ensembles fermés de $E$ est fermée dans $E$.

<u>**Exercice 10 :**</u> Soit $a \in E$.

Montrer que la sphère $S\,(a,r)$, de centre $a$ et de rayon $r$, de $E$ est un ensemble fermé dans $E$.

<u>**Exercice 11 :**</u> Montrer que tout sous-ensemble fini de $E$ est fermé dans $E$.

**Exercice 12 :** Soit $A$ une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$. Montrer que $\sup A$ et $\inf A$ sont des éléments de $\overline{A}$.

**Exercice 13 :** Soit $A$ une partie de $E$. Montrer que

1) $A$ est fermée $\Longleftrightarrow A = \overline{A}$.

2) $A$ est ouverte $\Longleftrightarrow A = \overset{0}{A}$.

3) Soit $\mathbb{R}$ muni de la métrique habituelle. On pose

$$A = (\mathbb{Q} \cap ]-1, 0[) \cup ]0, 1[ \cup ]1, 2[ \cup \{3\}\,.$$

Déterminer $\overset{0}{A}$, $\overline{A}$, $\overset{0}{\overline{A}}$, $\overline{\overset{0}{A}}$ et vérifier qu'ils sont tous distincts.

**Exercice 14 :** Soit $A$ une partie non vide de $E$. Pour $x \in E$, on pose

$$d(x, A) = \inf_{y \in A} [d(x, y)]\,, \text{ (distance du point } x \text{à } A).$$

Prouver que

1) $d(x, A) = 0 \Leftrightarrow x \in \overline{A}$.

2) $\forall\,(x, y) \in E^2$, $|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$.

**Exercice 15 :** Soient $A$ et $B$ deux parties non vides de $E$. Montrer que

1) $\overset{0}{\widehat{A \cap B}} = \overset{0}{A} \cap \overset{0}{B}$.

2) $\overset{0}{A} \cup \overset{0}{B} \subset \overset{0}{\widehat{A \cup B}}$.

3) $\overset{0}{\complement_A} = \complement_{\overline{A}}$.

4) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

5) $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.

6) Montrer par des exemples simples qu'en général, on a pas

$$\overset{0}{\widehat{A \cup B}} = \overset{0}{A} \cup \overset{0}{B}; \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

**Exercice 16 :** Soit $d$ la distance usuelle sur $\mathbb{R}$ et $d_1$ l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $d_1(x,y) = |e^y - e^x|$.

1) Montrer que $d_1$ est une distance sur $\mathbb{R}$.

2) $\mathbb{R}$ est-il borné pour la distance $d_1$ ?

3) Décrire et représenter la boule ouverte $B(0,1)$ relativement à $d_1$.

4) Les distances $d$ et $d_1$ sont-elles équivalentes ?

5) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = -n$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle de Cauchy relativement à $d_1$ ? Est-elle convergente ?

<u>**Exercice 17 :**</u>

1) Montrer que pour tout $A \subset \mathbb{R}^p$, $\partial(A) = Fr(A) = \overline{A} \setminus \overset{0}{A}$.

2) On munit $\mathbb{R}$ de sa norme usuelle $\|x\| = |x|$.

a) Déterminer $\overset{0}{\mathbb{Q}}$, $\overline{\mathbb{Q}}$ et $\partial(\mathbb{Q}) = Fr(\mathbb{Q})$. En déduire que $\mathbb{Q}$ n'est ni ouvert ni fermé. Est ce que $\mathbb{Q}$ a des points isolés ?

b) Considérons la partie $X = ]-\infty, -1[ \cup \left\{0, \frac{\pi}{4}, \sqrt{3}\right\} \cup \left\{3 - \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$.
Déterminer $\overset{0}{X}$, $\overline{X}$, $\partial(X) = Fr(X)$ et les points isolés de $X$.

**Exercice 18 :** Soit $A$ une partie de $\mathbb{R}^p$ et $x \in \mathbb{R}^p$. Montrer l'équivalence des deux assertions suivantes.

1) $x \in \overline{A}$.

2) Il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$(i)$ $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in A$.

$(ii)$ $(u_n)$ converge vers $x$ dans $\mathbb{R}^p$.

**Exercice 19 :** Les ensembles suivants sont-ils compacts ? Justifier votre réponse.

a) $\mathbb{Z}$ ; b) $[0,1] \cap \mathbb{Q}$ ; c) $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \ldots \times [a_p, b_p]$.

d) Une union finie de réels.

e) Une union infinie de réels distincts.

f) La boule fermée de centre $a$ et de rayon $r > 0$ dans $\mathbb{R}^p$.

**Exercice 20 :** Soit $(a_n)$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}^p$ de limite $a \in \mathbb{R}^p$. Le sous-ensemble $A = \{a_n; n \in \mathbb{N}\} \cup \{a\}$ est-il compact dans $\mathbb{R}^p$?

**Exercice 21 :** Montrer que

a) Toute intersection de compacts de $\mathbb{R}^p$ est un compact de $\mathbb{R}^p$.

b) Toute réunion finie de compacts de $\mathbb{R}^p$ est un compact de $\mathbb{R}^p$.

**Exercice 22 :** Soit $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante d'ensembles fermés non vides de $\mathbb{R}^p$ tel que $K_0$ est compact.

a) Montrer que $K_n$ est compact pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) Prouver que

$$K = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n \neq \varnothing.$$

c) En déduire que si le diamètre de $K_n$ tend vers 0, alors $K$ est réduit au singleton.

d) Soit $O$ un ouvert contenant $K$. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $K_n \subset O$.

**Corrigé**

**Exercice 1 :**

a) $d_1$ n'est pas une distance car pour $z > y > x$

$$\begin{aligned} d_1(z,x) &= (z-x)^2 = (z-y+y-x)^2 \\ &= (z-y)^2 + (y-x)^2 + 2(z-y)(y-x) \\ &= d_1(x,y) + d_1(x,z) + 2(z-y)(y-x) \\ &> d_1(x,y) + d_1(x,z). \end{aligned}$$

b) $d_2$ est une distance car les 3 conditions d'une distance sont satisfaites.

- $d_2(x,y) = 0 \Leftrightarrow |y-x| = 0 \Leftrightarrow x = y$
- $d_2(x,y) = d_2(y,x)$ évident.
- $[d_2(x,z)]^2 = |x-z| = |x-y+y-z| \leq |x-y| + |y-z|$
$\leq \left[\sqrt{|x-y|} + \sqrt{|y-z|}\right]^2$. Donc, $d_2(x,z) \leq d_2(x,y) + d_2(y,z)$.

c) $d_3$ est une distance car les 3 conditions d'une distance sont satisfaites.

- $d_3(x,y) = 0 \Leftrightarrow \left|y^3 - x^3\right| = 0 \Leftrightarrow x = y$
- $d_3(x,y) = d_3(y,x)$ évident.
- $d_3(x,z) = \left|z^3 - x^3\right| = \left|z^3 - y^3 + y^3 - x^3\right| \leq \left|z^3 - y^3\right| + \left|y^3 - x^3\right|$ Donc,

$d_3(x,z) \leq d_3(x,y) + d_3(y,z)$.

d) $d_4$ n'est pas une distance car $d_4(x,y) = 0 \Longrightarrow y = \pm x$.

e) $d_5$ n'est pas une distance car la symétrie n'est pas satisfaite. $d_5(x,y) \neq d_5(y,x)$.

**Exercice 2 :** 1) Posons

$$f(t) = \frac{t^p}{p} + \frac{t^{-q}}{q}.$$

$f$ est continue sur $]0,+\infty[$ et atteint son minimum au point $x_0 = 1$. Pour tout

$t > 0$, on a $f(t) = \dfrac{t^p}{p} + \dfrac{t^{-q}}{q} \geq 1$. En particulier pour $x_0 = \dfrac{|a|^{\frac{p-1}{p}}}{|b|^{\frac{1}{p}}}$ on a

$$\begin{aligned}
f(x_0) &= \frac{x_0^p}{p} + \frac{x_0^{-q}}{q} = \frac{|a|^{p-1}}{p\,|b|} + \frac{|a|^{\frac{1-p}{p}q}}{q\,|b|^{\frac{-q}{p}}} = \frac{1}{|ab|}\left[\frac{|a|^p}{p} + \frac{|a|^{\frac{1-p}{p}q+1}}{q}|b|^{1+\frac{q}{p}}\right] \\
&= \frac{1}{|ab|}\left[\frac{|a|^p}{p} + \frac{|b|^q}{q}\right] \geq 1.
\end{aligned}$$

Donc,

$$|ab| \leq \frac{|a|^p}{p} + \frac{|b|^q}{q}. \tag{1.6.1}$$

2) En posant $a = \dfrac{a_k}{\alpha}$ et $b = \dfrac{b_k}{\beta}$ dans la relation (1), on obtient

$$\frac{|a_k b_k|}{\alpha\beta} \leq \frac{|a_k|^p}{p\alpha^p} + \frac{|b_k|^q}{q\beta^q}. \tag{1.6.2}$$

Par sommation de la relation (2), on déduit que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\alpha\beta}\sum_{k=1}^{n}|a_k b_k| &\leq \frac{1}{p\alpha^p}\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p + \frac{1}{q\beta^q}\sum_{k=1}^{n}|b_k|^q \\
&= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.
\end{aligned}$$

Donc,

$$\sum_{k=1}^{n}|a_k b_k| \leq \alpha\beta = \left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{1.6.3}$$

3) Nous avons

$$|(a_k + b_k)|^p = |a_k|\,|(a_k + b_k)|^{p-1} + |b_k|\,|(a_k + b_k)|^{p-1}. \tag{1.6.4}$$

Par application de l'inégalité de Hölder à $|a_k|\,|(a_k + b_k)|^{p-1}$, on obtient

$$\sum_{k=1}^{n}|a_k|\,|(a_k + b_k)|^{p-1} \leq \left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{n}|(a_k + b_k)|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{1.6.5}$$

Par application encore de l'inégalité de Hölder à $|b_k| \, |(a_k + b_k)|^{p-1}$ , on obtient

$$\sum_{k=1}^{n} |b_k| \, |(a_k + b_k)|^{p-1} \leq \left( \sum_{k=1}^{n} |b_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum_{k=1}^{n} |(a_k + b_k)|^{(p-1)q} \right)^{\frac{1}{q}} . \qquad (1.6.6)$$

En faisant la somme des relations (5) et (6) et en utilisant (4), nous déduisons

$$\sum_{k=1}^{n} |(a_k + b_k)|^p \leq \left[ \left( \sum_{k=1}^{n} |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \sum_{k=1}^{n} |b_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right] \left( \sum_{k=1}^{n} |(a_k + b_k)|^p \right)^{\frac{1}{q}} .$$

D'où,

$$\left( \sum_{k=1}^{n} |(a_k + b_k)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left( \sum_{k=1}^{n} |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \sum_{k=1}^{n} |b_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} .$$

4) Montrons que $\| \, . \, \|_p$ est une norme.

- $\|x\|_p = 0 \Longrightarrow x = 0.$

- $\|\lambda x\|_p = \left( \sum_{k=1}^{n} |\lambda x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} = |\lambda| \, \|x\|_p .$

- $\|x + y\|_p = \left( \sum\limits_{k=1}^{n} |(x_k + y_k)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left( \sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \sum_{k=1}^{n} |y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$ (inégalité de Minkowski). Donc

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p .$$

Donc, est une norme sur $\mathbb{R}^n$.

**Exercice 3 :** 1) Les axiomes de symétrie et de séparation sont vérifiées. Montrons l'inégalité triangulaire. Puisque $d$ est une distance, alors pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).$$

Comme $\Phi$ est croissante, alors

$$\begin{aligned} d_* (x, z) &= \Phi \left[ d(x, z) \right] \leq \Phi \left[ d(x, y) + d(y, z) \right] \\ &\leq \Phi \left[ d(x, y) \right] + \Phi \left[ d(y, z) \right] \text{ (car } \Phi \text{ est sous-additive)} \\ &= d_* (x, y) + d_* (y, z) . \end{aligned}$$

Donc, $d_*$ est une distance sur $E$.

2) Les fonctions

$$\begin{array}{lcl} \Phi_1 : \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & & \dfrac{x}{1+x} \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{lcl} \Phi_2 : \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & & \ln(1+x) \end{array}$$

vérifient les conditinos de 1). Donc, si $d$ est une distance sur $E$,

$$\Phi_1 o d = \frac{d}{1+d} \ \text{ et } \ \Phi_2 o d = \ln(1+d)$$

le sont aussi.

**Exercice 4 :** 1) Les axiomes de symétrie et de l'inégalité triangulaire sont vérifiées. Pour l'axiome de séparation, nous avons

$d(x,y) = 0 \Leftrightarrow f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y$ (car $f$ est une injection puisque strictement croissante).

2) Pour tout $x \neq y$, nous avons

$$\frac{d(x,y)}{d_1(x,y)} = \frac{|x-y|}{\left| x^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{1}{3}} \right|} = x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{1}{3}}.$$

Donc, $\dfrac{d(x,y)}{d_1(x,y)}$ n'est ni majorée ni minorée.

$$\forall k > 0, \ x > k^{\frac{3}{2}} \text{ et } y > k^{\frac{3}{2}} \longrightarrow \frac{d(x,y)}{d_1(x,y)} > 3k$$

$$\forall \alpha > 0, \ 0 < x < \alpha^{\frac{3}{2}} \text{ et } 0 < y < \alpha^{\frac{3}{2}} \Longrightarrow \frac{d(x,y)}{d_1(x,y)} < 3\alpha.$$

Par conséquent, ces distances ne sont pas équivalentes.

**Exercice 4' :** 1) Il est clair que $\| \, . \, \|_\infty$ est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$. Montrons que les trois axiomes sont satisfaits.

-

$$\|f\|_\infty = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \ \forall x \in [0,1] \ \Leftrightarrow f = 0.$$

- Homogénéité. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, pour tout $f \in E$ et pour tout $x \in [0,1]$, nous avons

$$|\lambda f(x)| = |\lambda| \, |f(x)| \, .$$

Par passage au max, on déduit que

$$\|\lambda f\|_\infty = |\lambda| \, \|f\|_\infty .$$

- Inégalité triangulaire. Soit $f$ et $g$ deux éléménts de $E$. Pour tout $x \in [0,1]$ , nous avons

$$|f(x) + g(x)| \leq |g(x)| + |g(x)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty .$$

En prenant le max, nous déduisons que

$$\|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty .$$

De même, $\| \, . \, \|_1$ est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$. Montrons que les trois axiomes sont satisfaites.

$$\|f\|_1 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \; \forall x \in [0,1] \quad \Leftrightarrow f = 0.$$

(car l'intégrale d'une fonction $g$ positive est nulle si et seulement si $g = 0$).

- Homogénéité. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, pour tout $f \in E$ et pour tout $x \in [0,1]$ , nous avons

$$|\lambda f(x)| = |\lambda| \, |f(x)| .$$

En prenant l'intégrale des deux cotés, on déduit que

$$\|\lambda f\|_1 = |\lambda| \, \|f\|_1 .$$

- Inégalité triangulaire. Soit $f$ et $g$ deux éléménts de $E$. Pour tout $x \in [0,1]$ , nous avons

$$|f(x) + g(x)| \leq |g(x)| + |g(x)| .$$

En prenant l'intégrale des deux cotés et en utilisant la linéarité, nous déduisons que

$$\|f+g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1 .$$

2) Pour tout $x \in [0,1]$ , on a

$$|f(x)| \leq \|f\|_\infty .$$

En prenant l'intégrale entre 0 et 1, on obtient

$$\|f\|_1 \leq \|f\|_\infty .$$

3) Pour $f_n(x) = x^n$, nous avons

$$\|f_n\|_\infty = 1 \text{ et } \|f_n\|_1 = \frac{1}{n+1}.$$

Si les normes sont équivalentes, il existerait une constante $\alpha > 0$ telle que

$$\|f_n\|_\infty \leq \alpha \|f_n\|_1 \Longrightarrow 1 \leq \frac{\alpha}{n+1} \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ce qui est impossible car lorsque $n \longrightarrow +\infty$, $\dfrac{\alpha}{n+1} \longrightarrow 0$.

**<u>Exercice 6 :</u>** 1) $\boxed{\textbf{2 points}}$

• $\mathbf{N}(x, y) = \sqrt{a^2x^2 + b^2y^2} = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$

• Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\mathbf{N}(\lambda x) = \sqrt{a^2\lambda^2x^2 + b^2\lambda^2y^2} = \sqrt{\lambda^2}\sqrt{a^2x^2 + b^2y^2} = |\lambda| \, \mathbf{N}(x).$$

• Pour tout $X = (x_1, y_1)$ et $Y = (x_2, y_2)$, on a

$$\begin{aligned}
[\mathbf{N}(X+Y)]^2 &= [\mathbf{N}(x_1 + x_2, y_1 + y_2)]^2 \\
&= a^2(x_1 + x_2)^2 + b^2(y_1 + y_2)^2 \\
&= a^2x_1^2 + a^2x_2{}^2 + 2a^2x_1x_2 + b^2y_1^2 + b^2y_2{}^2 + 2b^2y_1y_2 \\
&= a^2x_1^2 + b^2y_1^2 + a^2x_2{}^2 + b^2y_2{}^2 + 2\left[(ax_1)(ax_2) + (by_1)(by_2)\right] \\
&\leq a^2x_1^2 + b^2y_1^2 + a^2x_2{}^2 + b^2y_2{}^2 + 2\sqrt{a^2x_1^2 + b^2y_1^2} \times \sqrt{a^2x_2^2 + b^2y_2^2} \\
&= \left(\sqrt{a^2x_1^2 + b^2y_1^2} + \sqrt{a^2x_2^2 + b^2y_2^2}\right)^2 = \mathbf{N}(X) + \mathbf{N}(Y).
\end{aligned}$$

D'où l'inégalité triangulaire. Par conséquent, $\mathbf{N}$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$. Puisque $\mathbb{R}^2$ est un **e.v.n.** de dimension finie, alors les deux normes $\mathbf{N}$ et $\mathbf{N}_2$ sont équivalentes.

2) $\boxed{\textbf{2 points}}$

• La boule fermée de centre 0 et de rayon 1 pour la norme $\mathbf{N}_2$ est définie par :

$$\mathbf{B}_2(0,1) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 1\right\}.$$

C'est le disque fermé de centre 0 et de rayon 1.

• La boule fermée de centre 0 et de rayon 1 pour la norme $\mathbf{N}$ est définie par :

$$\mathbf{B}_2(0,1) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / a^2x^2 + b^2y^2 \leq 1\right\}.$$

C'est une ellipse

3) $\boxed{\textbf{1 point}}$

Soit $p = \min(a,b)$ et $q = \max(a,b)$. On a pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$p\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{p^2x^2+p^2y^2} \le \sqrt{a^2x^2+b^2y^2} \le \sqrt{q^2x^2+q^2y^2} = q\sqrt{x^2+y^2}.$$

Donc, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$p\mathbf{N}_2(x,y) \le \mathbf{N}(x,y) \le q\mathbf{N}_2(x,y).$$

**Exercice 16 :**

- $d_1(x,y) = 0 \Leftrightarrow |e^y - e^x| = 0 \Leftrightarrow x = y$.
- $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, d_1(x,y) = d_1(y,x)$.
- $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, on a

$$\begin{aligned} d_1(x,z) &= |e^x - e^z| \le |e^x - e^y| + |e^y - e^z| \\ &= d_1(x,y) + d_1(y,z). \end{aligned}$$

Donc, $d_1$ est une distance.

$\mathbb{R}$ n'est pas borné pour la distance $d_1$ car

$$\sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} d_1(x,y) = \sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} |e^y - e^x| = +\infty.$$

2)

$$\begin{aligned} B(0,1) &= \{x \in \mathbb{R} / d_1(0,x) < 1\} = \{x \in \mathbb{R} / |e^x - 1| < 1\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} / 0 < e^x < 2\} = ]-\infty, \ln 2[. \end{aligned}$$

3) Pour tout $x \neq y$, on a

$$\frac{d_1(x,y)}{d(x,y)} = \frac{|e^y - e^x|}{|y-x|}.$$

Par application du théorème des accroissements finis entre $x$ et $y$, on obtient

$$\frac{|e^y - e^x|}{|y-x|} = e^{\theta(x,y)},$$

où $\theta(x,y)$ est un réel compris entre $x$ et $y$. Nous avons

$$\forall k > 0,\ x > k \text{ et } y > k \Longrightarrow \frac{|e^y - e^x|}{|y-x|} > e^k \longrightarrow +\infty \text{ quand } k \longrightarrow +\infty,$$

$$\forall k > 0,\ x < -k \text{ et } y < -k \Longrightarrow \frac{|e^y - e^x|}{|y-x|} < e^{-k} \longrightarrow 0 \text{ quand } k \longrightarrow +\infty.$$

Donc, $\dfrac{d_1(x,y)}{d(x,y)}$ n'est ni majoré ni minoré. Par conséquent, les distances $d$ et $d_1$ ne sont pas équivalentes.

4) Pour tout $(n,m) \in \mathbb{N}^2$, on a

$$d_1(u_n, u_m) = \left|e^{-n} - e^{-m}\right|.$$

Donc, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy pour la distance $d_1$. Cependant, elle n'est pas convergente. Supposons qu'elle converge vers $l \in \mathbb{R}$. Nous aurons alors

$$d_1(u_n, l) = \left|e^{-n} - e^{-l}\right| \longrightarrow 0 \text{ quand } n \longrightarrow +\infty.$$

Ce qui est impossible car $e^{-l} > 0$ et $e^{-n} \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow +\infty$.

**Exercice 17 :**

1) On a $\partial(A) = \overline{A} \cap \overline{\complement_A}$. D'où,

$$\begin{aligned} x &\in \partial(A) \Leftrightarrow x \in \overline{A} \cap \overline{\complement_A} \Leftrightarrow x \in \overline{A} \text{ et } x \in \overline{\complement_A} \\ &\Leftrightarrow \forall r > 0,\ B(x,r) \cap A \neq \emptyset \text{ et } B(x,r) \cap \complement_A \neq \emptyset \\ &\Leftrightarrow \forall r > 0,\ B(x,r) \cap A \neq \emptyset \text{ et } B(x,r) \nsubseteq A \\ &\Leftrightarrow \forall r > 0,\ B(x,r) \cap A \neq \emptyset \text{ et } x \notin \overset{0}{A} \\ &\Leftrightarrow x \in \overline{A} \backslash \overset{0}{A}. \qquad \boxed{\textbf{1 point}} \end{aligned}$$

D'où l'égalité.

2)

a) Nous avons

$$\overset{0}{\mathbb{Q}} = \emptyset,\ \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R} \text{ et } \partial(\mathbb{Q}) = \overline{\mathbb{Q}} \backslash \overset{0}{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}. \qquad \boxed{\textbf{1,5 points}}$$

$\mathbb{Q}$ n'est ni ouvert ni fermé car

$$\overset{0}{\mathbb{Q}} = \emptyset \neq \mathbb{Q} \text{ et } \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R} \neq \mathbb{Q}. \qquad \boxed{\textbf{1 point}}$$

$\mathbb{Q}$ n'a pas de points isolés car pour tout $\dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ et pour tout $r > 0$

$$\left]\frac{p}{q} - r, \frac{p}{q} + r\right[ \backslash \left\{\frac{p}{q}\right\} \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset. \partial(\mathbb{Q}) = \overline{\mathbb{Q}} \backslash \overset{0}{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}. \ . \qquad \boxed{\textbf{0,5 point}}$$

b) On a

$$\begin{aligned}
\overset{0}{X} &= \left]-\infty, -1\right[\,, \quad \boxed{\textbf{0,5 point}} \\
\overline{X} &= \left]-\infty, -1\right] \cup \left\{0, \frac{\pi}{4}, \sqrt{3}, 3\right\} \cup \left\{3 - \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\right\}, \quad \boxed{\textbf{0,5 point}} \\
\partial(X) &= \left\{-1, 0, \frac{\pi}{4}, \sqrt{3}, 3\right\} \cup \left\{3 - \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\right\} \cup \{3\}, \quad \boxed{\textbf{0,5 point}} \\
X' &= \left\{0, \frac{\pi}{4}, \sqrt{3}\right\} \cup \left\{3 - \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\right\}, \quad \boxed{\textbf{0,5 point}}
\end{aligned}$$

où $X'$ est l'ensemble des points isolés de $X$.

# Chapitre 2

# APPLICATIONS DE $\mathbb{R}^p$ DANS $\mathbb{R}^q$

## 2.1 Généralités

Dans ce chapitre, pour tout entier $q \neq 0$, $\mathbb{R}^q$ est considéré comme un espace métrique. La distance $d_q$ étant la disance associée à la norme $\| \, . \, \|_q$ ie.,

$$\forall \, (x, y) \in \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^q, d \, (x, y) = \|y - x\|_q \, .$$

Soient $n$ et $p$ deux entiers naturels strictements positifs.

**Définition 2.1.1.** :
Soient $A$ une partie de $\mathbb{R}^n$ et $f$ une une fonction définie sur $A$ à valeurs dans $\mathbb{R}^p$. $A$ est appelé le **domaine** de $f$.
Le sous-ensemble de $\mathbb{R}^p$ défini par :

$$f \, (A) = \{ y \in \mathbb{R}^p / \exists x \in \mathbb{R}^n \text{ avec } y = f \, (x) \} \, ,$$

est **l'image** de $f$.
Notation : $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$.
$f$ se nomme aussi fonction de $n$ variables.
Si $p = 1$, $f$ est dite **fonction numérique,** càd, $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$.

**Définition 2.1.2.** Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ . On appelle $i^{\text{ème}}$ **projection** de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}$, l'application

$$\begin{array}{rccc} p_i : & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x = (x_1, \ldots x_n) & \mapsto & p_i \, (x) = x_i. \end{array}$$

Notons que $p_i$ est une fonction numérique.

**Définition 2.1.3.** :
Soient $A \subset \mathbb{R}^n$, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^p$ et $j \in \{1, 2, \ldots, p\}$ . On appelle $j^{\text{ème}}$ **composante** de $f$, la fonction,

$$\begin{array}{rcl} f_j : A & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f_j(x) = p_j o f(x) . \end{array}$$

Pour tout $x \in A$, on a

$$f(x) = \big(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_p(x)\big) .$$

## 2.2 Limites

### 2.2.1 Définitions

. Soient $A \subset \mathbb{R}^n$, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^p$, $x_0 \in \overline{A}$ et $l = \big(l_1, l_2, \ldots, l_p\big) \in \mathbb{R}^p$. On dit que $f$ a pour **limite** $l$ au point $x_0$ si

$$\begin{array}{rcl} \forall\varepsilon & > & 0,\ \exists\eta > 0, (x \in A \text{ et } \|x - x_0\|_n < \eta) \Longrightarrow \|f(x) - l\|_p < \varepsilon. \\ & \Leftrightarrow & \\ \forall\varepsilon & > & 0,\ \exists\eta > 0, (x \in A \text{ et } d_n(x, x_0) < \eta) \Longrightarrow d_p(f(x), l) < \varepsilon. \\ & \Leftrightarrow & \\ \forall V & \in & \mathcal{V}(l) \subset \mathbb{R}^p,\ \exists U \in \mathcal{V}(x_0) \text{ tel que } f(A \cap U) \subset V. \end{array}$$

Notation : $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = l$ ou $\lim\limits_{x \in A, x \longrightarrow x_0} f(x) = l$ ou $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0, x \neq x_0} f(x) = l.$

**Remarque 2.2.1.** 1. *Si $x_0 \in A$, on n'exige pas que $l = f(x_0)$ .*

2. *Si $x_0 \notin \overline{A}$, la définition n'aurait pas de sens, car il existerait $U \in \mathcal{V}(x_0)$ tel que $U \cap A = \varnothing$.*

### 2.2.2 Unicité de la limite

**Proposition 2.2.1.** *:*
*Soient $A \subset \mathbb{R}^n$, $x_0 \in \overline{A}$ et $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^p$. Si $f$ admet une limite en $x_0$, cette limite est unique.*

**Preuve.** Supposons que

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = l \text{ et } \lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = l' \text{ avec } l \neq l'.$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver $\eta_1 > 0$ et $\eta_2 > 0$ tel que

$$\begin{aligned}
(x \in A \text{ et } \|x - x_0\|_n < \eta_1) &\implies \|f(x) - l\|_p < \frac{\varepsilon}{2}, \\
(x \in A \text{ et } \|x - x_0\|_n < \eta_2) &\implies \|f(x) - l'\|_p < \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Posons $\eta = \inf(\eta_1, \eta_2)$. Pour tout $x \in A$ et $\|x - x_0\|_n < \eta$, nous avons

$$\|f(x) - l\|_p < \frac{\varepsilon}{2} \text{ et } \|f(x) - l'\|_p < \frac{\varepsilon}{2}.$$

En vertu de l'inégalité triangulaire, on obtient

$$\forall \varepsilon > 0, \; \|l - l'\|_p < \varepsilon.$$

D'où $l = l'$.

**Remarque 2.2.2.** *La proposition 2.2.1. est souvent utile pour montrer que la limite n'existe pas.*

### 2.2.3 Opérations sur les limites

**Proposition 2.2.2.** *:*
*Soient $A \subset \mathbb{R}^n$, $x_0 \in \overline{A}$, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^p$, $g : A \longrightarrow \mathbb{R}^p$ et $h : A \longrightarrow \mathbb{R}$. On suppose*

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}^p, \; \lim_{x \longrightarrow x_0} g(x) = l' \in \mathbb{R}^p \textit{ et } \lim_{x \longrightarrow x_0} h(x) = l'' \in \mathbb{R}.$$

*Alors, on a*
*(i)* $\lim_{x \longrightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = l + l'$.
*(ii)* $\lim_{x \longrightarrow x_0} h(x) f(x) = ll''$.

**Preuve.** Démontrons $(i)$. On a

$$\begin{aligned}
\|f(x) + g(x) - (l + l')\|_p &= \|f(x) - l + (g(x) - l')\|_p \\
&\leq \|f(x) - l\|_p + \|g(x) - l'\|_p. \qquad (2.2.1)
\end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\eta_1 > 0$ et $\eta_2 > 0$ tel que

$$(x \in A \text{ et } \|x - x_0\|_n < \eta_1) \implies \|f(x) - l\|_p < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad (2.2.2)$$

$$(x \in A \text{ et } \|x - x_0\|_n < \eta_2) \implies \|g(x) - l'\|_p < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (2.2.3)$$

Posons $\eta = \inf(\eta_1, \eta_2)$. De (4), (5) (6) et l'inégalité triangulaire, on déduit

$$(x \in A \text{ et } \|x - x_0\|_n < \eta) \implies \|f(x) + g(x) - (l + l')\|_p < \varepsilon.$$

Prouvons $(ii)$. On peut écrire,

$$h(x) f(x) - ll'' = h(x)(f(x) - l) + \left(h(x) - l''\right) l.$$

D'où,

$$\left\|h(x) f(x) - ll''\right\|_p \leq |h(x)| \, \|f(x) - l\|_p + \left|h(x) - l''\right| \|l\|_p . \tag{2.2.4}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\eta_1 > 0$ tel que

$$(x \in A \text{ et } \|x - x_0\|_n < \eta_1) \Longrightarrow \left|h(x) - l''\right| < \frac{\varepsilon}{2}\delta, \tag{2.2.5}$$

avec

$$\delta = \begin{cases} \dfrac{1}{\|l\|_p} & \text{si} \quad l \neq 0, \\ \\ 1 & \text{si} \quad l = 0. \end{cases}$$

De $(8)$, on déduit que

$$(x \in A \text{ et } \|x - x_0\|_n < \eta_1) \Longrightarrow |h(x)| < \frac{\varepsilon}{2}\delta + \left|l''\right| = M. \tag{2.2.6}$$

D'autre part, il existe $\eta_2 > 0$ tel que

$$(x \in A \text{ et } \|x - x_0\|_n < \eta_2) \Longrightarrow \|f(x) - l\|_p < \frac{\varepsilon}{2M}. \tag{2.2.7}$$

Posons $\eta = \inf(\eta_1, \eta_2)$. De $(7)$, $(8)$, $(9)$ et $(10)$,on obtient

$$(x \in A \text{ et } \|x - x_0\|_n < \eta) \Longrightarrow \left\|h(x) f(x) - ll''\right\|_p < \varepsilon.$$

**Remarque 2.2.3.** *1. Si $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^p$ et $g : B \longrightarrow \mathbb{R}^p$, la fonction $f + g$ peut être étudiée sur $A \cap B$.*

*2. Si $h(x) = \lambda \in \mathbb{R}$ et si $\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = l$, alors $\lim_{x \longrightarrow x_0} h(x) f(x) = \lambda l$.*

**Proposition 2.2.3.** *:*
*Soit $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. Si $f$ ne s'annule pas sur une partie $B \subset A$, on peut définir $\dfrac{1}{f} : B \longrightarrow \mathbb{R}$ par :*

$$\frac{1}{f}(x) = \frac{1}{f(x)}, \; x \in B.$$

*Soit $x_0 \in \overline{B}$ tel que $\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = l \neq 0$. Alors $\lim_{x \longrightarrow x_0} \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{l}$.*

**Preuve.** Soit $x \in B$. Nous avons

$$\left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{l}\right| = \frac{|f(x) - l|}{|lf(x)|}. \tag{2.2.8}$$

Puisque $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = l$, il existe $\eta_1 > 0$ tel que

$$(x \in B \text{ et } \|x - x_0\|_n < \eta_1) \Longrightarrow |f(x) - l| < \frac{|l|}{2}.$$

Donc,

$$(x \in B \text{ et } \|x - x_0\|_n < \eta_1) \Longrightarrow |f(x)| > \frac{|l|}{2}. \tag{2.2.9}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\eta_2 > 0$ tel que

$$(x \in B \text{ et } \|x - x_0\|_n < \eta_2) \Longrightarrow |f(x) - l| < \frac{\varepsilon l^2}{2}. \tag{2.2.10}$$

Posons $\eta = \inf(\eta_1, \eta_2)$. De $(11)$, $(12)$ et $(13)$, nous déduisons

$$(x \in B \text{ et } \|x - x_0\|_n < \eta) \Longrightarrow \left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{l}\right| < \varepsilon.$$

**Remarque 2.2.4.** *1. Soit $f : A \subset \mathbb{R}^n$, $x_0 \in \overline{A}$ et $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$.*

*a) On dit que $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = +\infty$ si*

$$\begin{aligned} \forall M &> 0,\ \exists \eta > 0, (x \in A \textit{ et } d_n(x, x_0) < \eta) \Longrightarrow f(x) > M, \\ &\textit{ou} \\ \forall M &> 0,\ \exists \eta > 0, (x \in A \textit{ et } \|x - x_0\|_n < \eta) \Longrightarrow f(x) > M. \end{aligned}$$

*b) On dit que $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = -\infty$ si*

$$\begin{aligned} \forall M &> 0,\ \exists \eta > 0, (x \in A \textit{ et } d_n(x, x_0) < \eta) \Longrightarrow f(x) < -M, \\ &\textit{ou} \\ \forall M &> 0,\ \exists \eta > 0, (x \in A \textit{ et } \|x - x_0\|_n < \eta) \Longrightarrow f(x) < -M. \end{aligned}$$

*2. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^p$.*

*a) On dit que $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = l$ si*

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon &> 0,\ \exists M > 0, x > M \Longrightarrow d_p(f(x), l) < \varepsilon, \\ &\textit{ou} \\ \forall \varepsilon &> 0,\ \exists M > 0, x > M \Longrightarrow \|f(x) - l\|_p < \varepsilon. \end{aligned}$$

*On dit que* $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = l$ *si*

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon &> 0, \exists M > 0, x < -M \Longrightarrow d_p(f(x), l) < \varepsilon, \\ & \qquad ou \\ \forall \varepsilon &> 0, \exists M > 0, x < -M \Longrightarrow \|f(x) - l\|_p < \varepsilon. \end{aligned}$$

**Proposition 2.2.4.** *:*
*Soient* $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset A$, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^p$ *et* $x_0 \in \overline{B}$. *Si* $f$ *admet une limite* $l$ *au point* $x_0$, *la restriction de* $f$ *à* $B$ *a une limite au point* $x_0$ *et on a*

$$\lim_{x \in B, x \longrightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \in A, x \longrightarrow x_0} f(x) = l.$$

**Preuve.** On a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \ (x \in A \text{ et } d_n(x, x_0) < \eta) \Longrightarrow d_p(f(x), l) < \varepsilon.$$

Donc,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \ (x \in B \subset A \text{ et } d_n(x, x_0) < \eta) \Longrightarrow d_p(f(x), l) < \varepsilon.$$

D'où la proposition.

**Remarque 2.2.5.** *:*
*La proposition 2.2.4 est souvent utile pour montrer qu'une fonction n'admet pas de limite en un point.*

Soit par exemple,

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 / \{(0,0)\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}. \end{aligned}$$

Posons

$$B_1 = \{0\} \times \mathbb{R}^*; B_2 = \mathbb{R}^* \times \{0\}.$$

Nous avons $(0, 0) \in \overline{B_1} \cap \overline{B_2}$ et

$$f_{B_1}(x, y) = f(0, y) = -1 \text{ si } y \neq 0 \text{ et } f_{B_2}(x, y) = f(x, 0) = 1 \text{ si } x \neq 0.$$

D'où

$$\lim_{x \in B_1, x \longrightarrow x_0} f(x) = -1 \neq \lim_{x \in B_2, x \longrightarrow x_0} f(x) = 1.$$

En vertu de la proposition 2.2.4, $f$ n'admet pas de limite au point $(0, 0)$.

**Proposition 2.2.5.** *:*
*Soit $A \subset \mathbb{R}^n$, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^p$, $x_0 \in \overline{A}$ et $l = (l_1, l_2, \ldots, l_p) \in \mathbb{R}^p$. Pour que $f$ ait la limite $l$ au point $x_0$, il faut et il suffit, que pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, p\}$, la $i^{ème}$ composante $f_i$ de $f$ (càd $p_i o f$) ait pour limite $l_i$ au point $x_0$.*

**Preuve.** On choisit sur $\mathbb{R}^p$ la distance sup définie par :

$$d_p(x, y) = \sup_{1 \leq i \leq p} |x_i - y_i|.$$

Sur $\mathbb{R}^n$, on choisit une distance $d_n$ équivalente à la distance euclidienne.
Démontrons que la condition est nécessaire. Supposons que $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = l$. On a donc,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, (x \in A \text{ et } d_n(x, x_0) < \eta) \Longrightarrow d_p(f(x), l) = \sup_{1 \leq i \leq p} |f_i(x) - l_i| < \varepsilon.$$

D'où,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, (x \in A \text{ et } d_n(x, x_0) < \eta) \Longrightarrow |f_i(x) - l_i| < \varepsilon,\ \forall i \in \{1, \ldots, p\}.$$

Montrons que la condition est suffisante. Supposons que pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, p\}$, $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f_i(x) = l_i$. Pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$, nous avons,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta_{\varepsilon, i, x_0} > 0, (x \in A \text{ et } d_n(x, x_0) < \eta_{\varepsilon, i, x_0}) \Longrightarrow |f_i(x) - l_i| < \varepsilon.$$

Posons $\eta = \inf\limits_{1 \leq i \leq p} \eta_{\varepsilon, i, x_0}$. On a,

$$(x \in A \text{ et } d_n(x, x_0) < \eta) \Longrightarrow \sup_{1 \leq i \leq p} |f_i(x) - l_i| = d_p(f(x), l) < \varepsilon.$$

**Proposition 2.2.6.** *:*
*Soient : $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$, $g : B \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^q$, $x_0 \in \overline{A}$. On suppose que $f(A) \subset B$, $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = b$ et $\lim\limits_{y \longrightarrow b} g(y) = c$. Alors, $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} gof(x) = c$.*

**Preuve.** Montrons d'abord que $b \in \overline{B}$. Soit $V_1 \in \mathcal{V}(b)$. Comme $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = b$, alors

$$\exists U_1 \in \mathcal{V}(x_0) \text{ tel que } f(U_1 \cap A) \subset V_1.$$

Puisque $x_0 \in \overline{A}$, on a $U_1 \cap A \neq \emptyset$. Donc, il existe $x \in U_1 \cap A$. Par suite, $f(U_1 \cap A) \subset V_1 \cap B$. Ce qui montre que $b \in \overline{B}$. D'autre part,

$$\forall W \in \mathcal{V}(c), \exists V \in \mathcal{V}(b) \text{ tel que } g(V \cap B) \subset W.$$

Pour ce voisinage $V$,

$$\exists U \in \mathcal{V}(x_0) \text{ tel que } f(U \cap A) \subset V.$$

Comme $f(U \cap A) \subset V \cap B$, on déduit que

$$\forall W \in \mathcal{V}(c), \exists U \in \mathcal{V}(x_0) \text{ tel que } gof(U \cap A) \subset W.$$

### 2.2.4 Relation entre limites de suites et limites de fonctions

**Proposition 2.2.7.** *:*
*Soient : $A \subset \mathbb{R}^n$, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^p$, $x_0 \in \overline{A}$ et $l \in \mathbb{R}^p$. Les deux propositions suivantes sont équivalentes.*
$(i)$ $\lim\limits_{x \in A, x \longrightarrow x_0} f(x) = l.$
$(ii)$ *Pour toute suite $\left(u_q\right)_{q \in \mathbb{N}}$, d'éléments de $A$ convergeante vers $x_0$, la suite $\left(f\left(u_q\right)\right)_{q \in \mathbb{N}}$ converge vers $l$.*

**Preuve.** Montrons que $(i) \Longrightarrow (ii)$. Supposons que $\lim\limits_{x \in A, x \longrightarrow x_0} f(x) = l$. Alors,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \left(x \in A \text{ et } \|x - x_0\|_n < \eta\right) \Longrightarrow \|f(x) - l\|_p < \varepsilon. \tag{2.2.11}$$

Soit maintenant une suite $\left(u_q\right)_{q \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $A$ telle que $\lim\limits_{q \longrightarrow +\infty} u_q = x_0$. Pour le $\eta$ trouvé,

$$\exists\, q_0 \in \mathbb{N},\ q \geq q_0 \implies \left\|u_q - x_0\right\|_n < \eta. \tag{2.2.12}$$

De (14) et (15), nous obtenons

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists q_0 \in \mathbb{N},\ q \geq q_0 \Longrightarrow \left\|f\left(u_q\right) - l\right\|_p < \varepsilon.$$

Prouvons que $(ii) \Longrightarrow (i)$. Pour montrer cette implication, il suffit de montrer que non $(i) \Longrightarrow$ non $(ii)$. Supposons que $f$ n'admet pas de limite au point $x_0$. Donc,

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall \eta > 0,\ \left(\exists x \in A \text{ et } \|x - x_0\|_n < \eta\right) \text{ tel que } \|f(x) - l\|_p > \varepsilon.$$

Donc,

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall q \in \mathbb{N},\ \left(\exists u_q \in A \text{ et } \left\|u_q - x_0\right\|_n < \frac{1}{q+1}\right) \text{ tel que } \left\|f\left(u_q\right) - l\right\|_p > \varepsilon.$$

La suite $\left(u_q\right)$ converge vers $x_0$ tandis que $f\left(u_q\right)$ ne converge pas vers $l$ et non $(ii)$ est vrai. D'où la proposition.

## 2.3 Continuité

### 2.3.1 Définitions et propriétés

**Définition 2.3.1.** :
Soient : $A \subset \mathbb{R}^n$, $x_0 \in A$ et $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^p$. On dit que $f$ est **continue** au point $x_0$ si $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. Autrement dit : $f$ est continue en $x_0$ si

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon &> 0,\ \exists \eta > 0,\ \left(x \in A \text{ et } \|x - x_0\|_n < \eta\right) \Longrightarrow \|f(x) - f(x_0)\|_p < \varepsilon. \\ &\Leftrightarrow \\ \forall V &\in \mathcal{V}\left(f(x_0)\right) \subset \mathbb{R}^p,\ \exists U \in \mathcal{V}(x_0) \text{ tel que } f(A \cap U) \subset V. \end{aligned}$$

Si $f$ est continue en tout point de $A$, on dit que $f$ est continue sur $A$.

Des propositions 2.2.2, 2.2.3, 2.2.5, 2.2.6 et 2.2.7, on déduit facilement les résultats suivants.

**Proposition 2.3.1.** *:*
*Soient : $A \subset \mathbb{R}^n$, $x_0 \in A$ et $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^p$. $f$ est continue au point $x_0$ (resp. sur $A$) si et seulement si toutes les composantes $f_i = p_i o f$ sont continues au point $x_0$ (resp. sur $A$).*

**Proposition 2.3.2.** *:*
*Soient $A \subset \mathbb{R}^n$, $x_0 \in A$, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^p$, $g : A \longrightarrow \mathbb{R}^p$ et $h : A \longrightarrow \mathbb{R}$. On suppose que $f$, $g$ et $h$ sont continues en $x_0$ (resp. sur $A$). Alors, les fonctions $f + g$ et $hf$ sont continues en $x_0$ (resp. sur $A$).*

**Proposition 2.3.3.** *:*
*Soit $A \subset \mathbb{R}^n$, $x_0 \in A$ et $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x_0) \neq 0$. Si $f$ est continue au point $x_0$, alors il existe $U \in \mathcal{V}(x_0)$ tel que $f$ ne s'annule pas sur $U \cap A$ et la fonction*

$$\frac{1}{f} : U \cap A \longrightarrow \mathbb{R},$$

*est continue en $x_0$.*

**Proposition 2.3.4.** *:*
*Soient : $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$, $g : B \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^q$ et $x_0 \in A$. On suppose que $f(A) \subset B$. Si $f$ est continue au point $x_0$ et $g$ est continue au point $f(x_0)$, alors $gof$ est continue au point $x_0$.*

**Proposition 2.3.5.** *:*
*Soient : $A \subset \mathbb{R}^n$, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^p$, $x_0 \in A$. Les deux propositions suivantes sont équivalentes.*
*$(i)$ $f$ est continue au point $x_0$.*
*$(ii)$ Pour toute suite $(u_q)_{q\in\mathbb{N}}$, d'éléments de $A$ convergeante vers $x_0$, la suite $(f(u_q))_{q\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x_0)$.*

**Définition 2.3.2.** :
On appelle fonction polynôme, une fonction $P : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ par :

$$P(x) = \sum_{(m_1,m_2,\ldots,m_n)\in I} \lambda_{m_1,m_2,\ldots,m_n} \prod_{k=1}^{n} x_k^{m_k},$$

où $I$ est un sous-ensemble fini de $\mathbb{N}^n$ et $\lambda_{m_1,m_2,\ldots,m_n} \in \mathbb{R}\ \forall (m_1, m_2, \ldots, m_n) \in I$.

Par exemple, le polynôme

$$P(x,y,z) = x^2yz^4 + x^2 + x^3y^5z + xyz,$$

est un polynôme à 3 variables de degré 9.

**Proposition 2.3.6.** *:*
*Toute fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}^n$.*

**Définition 2.3.3.** :
Soient : $A \subset \mathbb{R}^n$, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^p$ et $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in A$.
Pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, on pose

$$A_i = \{x_i \in \mathbb{R} / (a_1, a_2, \ldots a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_n) \in A\}.$$

Définissons la fonction

$$\begin{array}{rcl} \varphi_i : A_i & \longrightarrow & \mathbb{R}^p \\ x_i & \mapsto & \varphi_i(x) = f(a_1, a_2, \ldots a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_n). \end{array}$$

On dit que $f$ est continue par rapport à sa $i^{\text{ème}}$ variable (ou par rapport à $x_i$) au point $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ si et seulement si $\varphi_i$ est continue au point $a_i$.

**Remarque 2.3.1.** *:*
*Soit $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$. Si $f$ est continue au point $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Alors $f$ est continue par rapport à chacune des variables en ce point (ie, les fonctions d'une variable $\varphi_1$, $\varphi_2, \ldots, \varphi_n$ sont continues respectivement aux points $a_1, a_2, \ldots, a_n$).*

**Remarque 2.3.2.** *:*
*La réciproque de la remarque 2.3.1.1 est fausse (ie, la continuité des fonctions d'une variable $\varphi_1$, $\varphi_2, \ldots, \varphi_n$ n'entraîne pas la continuité de $f$).*

Nous allons justifier cette remarque à l'aide d'un exemple. Soit $f$ la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq 0, \\ \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = 0. \end{cases}$$

Les fonctions $\varphi_1$ et $\varphi_2$ définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi_1(x) = f(x,0) \text{ et } \varphi_2(y) = f(0,y),$$

sont continues pour $x = 0$ et $y = 0$ car pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\varphi_1(x) = \varphi_2(y) = 0.$$

Considérons la restriction $g$ de $f$ à l'ensemble

$$B_\lambda = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = \lambda x\right\}.$$

on a

$$g(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{1+\lambda^2} & \text{si} \quad (x, y) \neq 0, \\ \\ 0 & \text{si} \quad (x, y) = 0. \end{cases}$$

D'où,

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} g(x, y) = \frac{\lambda}{1+\lambda^2} \neq g(0, 0) = 0.$$

Donc, la fonction $g$ n'est pas continue en $(0, 0)$. Par conséquent, la fonction $f$ n'est pas continue en $(0, 0)$.

### 2.3.2 Caractéristique des fonctions continues

**Proposition 2.3.7.** *:*
*Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$. Les trois propositions suivantes sont équivalentes.*
*$(i)$ $f$ est continue sur $\mathbb{R}^n$.*
*$(ii)$ Pour tout ouvert $O$ de $\mathbb{R}^p$, $f^{-1}(O)$ est ouvert dans $\mathbb{R}^n$.*
*$(iii)$ Pour tout fermé $F$ de $\mathbb{R}^p$, $f^{-1}(F)$ est fermé dans $\mathbb{R}^n$.*

**Preuve.** Cf. devoir $n^0 1$.

**Exemple 2.3.1.** :

1. L'ensemble

   $$B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 > 10\right\}$$

   est ouvert dans $\mathbb{R}^2$ car la fonction

   $$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & f(x, y) = x^2 + y^2, \end{array}$$

   est continue sur $\mathbb{R}^2$ et $B = f^{-1}(]10, +\infty[)$ est ouvert car c'est l'image réciproque de l'ouvert $]10, +\infty[$ par la fonction continue $f$.

2. $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = 2x - y\right\}$ est fermé car c'est l'image réciproque du fermé $\{0\}$ par la fonction continue $g(x,y) = x^2 + y^2 - 2x + y$; $D = g^{-1}(\{0\})$.

**Remarques 2.3.1.** :

1. Si $A$ est une partie de $\mathbb{R}^n$ et $f$ une application continue de $A$ dans $\mathbb{R}^p$, les images réciproques des ouverts (resp. fermés) de $\mathbb{R}^p$ sont des ouverts (resp. fermés) relatifs de $A$.
2. L'image d'un ouvert (resp. fermé) de $\mathbb{R}^n$ par une application continue n'est pas nécessairement un ouvert (resp. fermé) de $\mathbb{R}^p$.

Par exemple,
L'image de l'ouvert $]-1,1[$ par l'application $x \mapsto x^2$ est l'intervalle $[0,1[$ qui n'est pas ouvert.
L'image du fermé $\mathbb{R}$ par l'application $x \mapsto arctgx$ est l'ouvert $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ qui n'est pas un fermé de $\mathbb{R}$.

### 2.3.3 Prolongement par continuité

**Définition 2.3.4.** :
Soit $A$ une partie de $\mathbb{R}^n$ et $f$ une fonction définie sur $A$ à valeurs dans $\mathbb{R}^p$. Si $f$ admet une limite $l$ en un point $x_0$ de $\overline{A}/A$, on peut prolonger $f$ à l'ensemble $B = A \cup \{x_0\}$ en posant

$$\widetilde{f} = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x \in A, \\ l & \text{si} \quad x = x_0. \end{cases}$$

La fonction $\widetilde{f}$ est continue au point $x_0$;
$\widetilde{f}$ se nomme **prolongement par continuité** de $f$ au point $x_0$.
Si $f$ est continue sur $A$, alors $\widetilde{f}$ est continue sur $B$.

**Exemple 2.3.2.** :
Soit $f$ la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^2 / \{(0,0)\}$ par :

$$f(x,y) = \frac{x^3 y}{x^2 + y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0).$$

On a

$$0 \leq |f(x,y)| \leq |xy| \frac{x^2}{x^2 + y^2} \leq |xy|.$$

D'où

$$\lim_{(x,y) \longrightarrow (0,0)} f(x,y) = 0.$$

Donc, on peut prolonger $f$ par continuité en $(0,0)$, il suffit de poser

$$\widetilde{f}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq \quad (0,0), \\ \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = \quad (0,0). \end{cases}$$

### 2.3.4 Propriétés des fonctions continues sur un compact

**Proposition 2.3.8.** *:*
*Soit $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ et $B \subset A$. Si $f$ est continue sur $A$ et $B$ est une partie compacte de $\mathbb{R}^n$, alors $f(B)$ est un compact de $\mathbb{R}^p$.*

**Preuve.** Soit $(O_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts de $\mathbb{R}^p$ qui recouvre $f(B)$ càd $f(B) \subset \bigcup\limits_{i\in I} O_i$. Comme $f$ est continue, d'après la proposition 2.3.2.1, $\forall i \in I$, $f^{-1}(O_i)$ est ouvert dans $\mathbb{R}^n$. Or, la famille $\left[f^{-1}(O_i)\right]_{i\in I}$ est un recouvrement ouvert de $B$. Comme $B$ est compact, il existe une partie finie $J \subset I$ tel que

$$B \subset \cup_{j\in J} \left[f^{-1}\left(O_j\right)\right].$$

Donc,

$$f(B) \subset \bigcup_{j\in J} O_j.$$

Par suite, $f(B)$ est compact.

**Corollaire 2.3.1** (théorème du maximum)**.** *:*
*Toute fonction numérique continue sur un compact $A$ de $\mathbb{R}^n$ est bornée et atteint ses bornes (càd, $\exists (x_1, x_2) \in A^2$ tel que $\sup\limits_{x\in A} f(x) = f(x_1)$ et $\inf\limits_{x\in A} f(x) = f(x_2)$.*

**Preuve.** Puisque $A$ est compact et $f$ est continue sur $A$, d'après la proposition 2.4.1, $f(A)$ est compact dans $\mathbb{R}$. Donc, $f(A)$ est fermé et borné dans $\mathbb{R}$. Par conséquent, $\sup\limits_{x\in A} f(x) \in f(A)$ et $\inf\limits_{x\in A} f(x) \in f(A)$. D'où la proposition.

**Définition 2.3.5** (Application uniformément continue)**.** Soit $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$. On dit que $f$ est **uniformément continue** sur $A$ si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall (x,y) \in A^2;\ d_n(x,y) < \eta \implies d_p[f(x), f(y)] < \varepsilon.$$

**Exemple 2.3.3.** : Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ telle que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n,\ d_p[f(x), f(y)] < kd_n(x,y), \tag{2.3.1}$$

où $k$ est une constante strictement positive. Alors, $f$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}^n$. Pour montrer l'uniforme continuité, il suffit de prendre $\eta = \dfrac{\varepsilon}{k}$. Une fonction qui vérifie (16) est dite **Lipschitzienne** de rapport $k$.

**Remarque 2.3.3.** *:*
*Une fonction uniformément continue est évidemment continue. La réciproque est fausse comme le montre l'exemple suivant.*

La fonction

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & f(x)=x^2, \end{array}$$

est continue sur $\mathbb{R}^+$ mais non uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$. Choisissons sur $\mathbb{R}^+$ la distance naturelle. On a

$$d\left[f(x), f(y)\right] = \left|f(y) - f(x)\right| = \left|y^2 - x^2\right| = (y+x)\left|y-x\right|.$$

Soit $\varepsilon > 0$ et $\eta > 0$. Les réels $x = \dfrac{\varepsilon}{\eta}$ et $y = x + \dfrac{\eta}{2}$ vérifient

$$|y-x| = \frac{\eta}{2} < \eta \text{ et } (y+x)\left|y-x\right| > 2x\left|y-x\right| = \varepsilon.$$

Donc, $f$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$.

**Proposition 2.3.9** (Théorème de Heine)**.** *Toute fonction continue sur un compact est uniformément continue.*

**Preuve.** Supposons que $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ est continue. On a

$$\forall \varepsilon > 0, \forall x \in A, \exists \eta_x > 0 \text{ tel que } (y \in A \text{ et } d_n(x,y) < 2\eta_x) \Longrightarrow d_p\left[f(x), f(y)\right] < \frac{\varepsilon}{2}.$$

La famille $\left[B(x,\eta_x)\right]_{x\in A}$ constitue un recouvrement ouvet de $A$. Comme $A$ est compact, on peut extraire un recouvrement fini. Il existe donc $x_1, x_2, \ldots, x_m$ tel que

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{m} B\left(x_k, \eta_{x_k}\right).$$

Posons $\eta = \inf\limits_{k=1,\ldots,m} \eta_{x_k} > 0$. Soient $y$ et $z$ deux éléments de $A$ tel que $d_n(y,z) < \eta$. Puisque $y \in A$, il existe $k \in \{1, 2, \ldots, m\}$ tel que $y \in B\left(x_k, \eta_{x_k}\right)$. D'où, $d_n(x_k, y) < \eta_{x_k}$. D'autre part,

$$d_n(x_k, z) \leq d_n(x_k, y) + d_n(y, z) \leq \eta_{x_k} + \eta \leq 2\eta_{x_k}.$$

Donc, on a

$$d_p\left[f(x_k), f(y)\right] < \frac{\varepsilon}{2} \text{ et } d_p\left[f(x_k), f(z)\right] < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Par conséquent,

$$d_p\left[f(y), f(z)\right] \leq d_p\left[f(x_k), f(y)\right] + d_p\left[f(x_k), f(z)\right] < \varepsilon.$$

D'où le résultat.

# Chapitre 3

# FONCTIONS DIFFERENTIABLES

## 3.1 Applications linéaires

**Définition 3.1.1.** :
Soient $E$ et $F$ deuxespaces vectoriels sur $\mathbb{R}$. On appelle application linéaire de $E$ dans $F$, toute application $L$ définie sur $E$ à valeurs dans $F$ vérifiant :

$$L(\lambda x + \mu y) = \lambda L(x) + \mu L(y), \ \forall (x, y) \in E^2 \text{ et } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

L'ensemble des applications linéaires de $E$ dans $F$ sera noté $\mathcal{L}(E, F)$.

**Remarques 3.1.1.** :

1. On peut munir $\mathcal{L}(E, F)$ d'une structure d'espace vectoriel par les applications :
$$\begin{array}{rcl} f : \mathcal{L}(E,F) \times \mathcal{L}(E,F) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E,F) \\ (L, L') & \mapsto & L + L' \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rcl} g : \mathbb{R} \times \mathcal{L}(E,F) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E,F) \\ (L, L') & \mapsto & L + L' \end{array}$$
2. Lorsque $E$ et $F$ sont des espaces vectoriels de dimensions finies (par exemple, $E = \mathbb{R}^n$ et $F = \mathbb{R}^p$), le choix d'une base sur chaque espace permet de représenter les applications linéaires par des matrices.
3. Lorsque $E$ et $F$ sont des espaces vectoriels normés, on peut définir une norme sur $\mathcal{L}(E, F)$, en posant
$$\|L\| = \sup_{x \in E/\{0\}} \frac{\|L(x)\|_F}{\|x\|_E},$$
ce qui entraîne
$$\|L(x)\|_F \leq \|L\| \, \|x\|_E, \ \forall x \in E.$$

(voir devoir $n^0 2$).

Par la suite, $\mathbb{R}^q$, $q \in \mathbb{N}^*$ sera muni d'une norme, notée, $\| \ \|_q$ .

**Proposition 3.1.1.** *:*
*Soit $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ . Alors, il existe $M > 0$ tel que*

$$\|L(x)\|_p \leq M \|x\|_n$$

**Preuve.** (voir devoir $n^0 2$).

**Corollaire 3.1.1.** *:*
*Toute application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ est uniformément continue.*

**Preuve.** (voir devoir $n^0 2$).

## 3.2 Applications différentiables

La théorie des fonctions différentiables a de multiples applications et joue un rôle essentiel en physique et tout particulièrement en thermodynamique. Son succès vient de ce qu'elle permet d'approcher plusieurs fonctions, au voisinage d'un point, par des fonctions linéaires ou affines.

**Définition 3.2.1.** :
Soit $U$ un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$, $x_0 \in U$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^p$. On dit que $f$ est **différentiable** au point $x_0$ s'il existe $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ telle que

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - L(h)}{\|h\|_n} = 0, \tag{3.2.1}$$

soit au voisinage de 0,

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + L(h) + \|h\|_n \varepsilon(x_0, h), \text{ avec } \lim_{h \longrightarrow 0} \varepsilon(x_0, h) = 0,$$

ou encore avec les notations de Landau

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + L(h) + o\|h\|_n$$

L'application linéaire $L$ est appelée la **différentielle** de $f$ au point $x_0$ et on la note $df_{x_0}$ ou $f'(x_0)$ . Si $f$ est différentiable en tout point $x_0$ de $U$, on dit que $f$ est différentiable sur $U$.

**Remarques 3.2.1.** :

1. La différentielle $df_{x_0}$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ uniformément continue (voir : corollaire 3.1.1).
2. Les notions de fonctions différentiables restent inchangées si on remplace la norme $\| \|_n$ par une norme équivalente.
3. Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ est différentiable au point $x_0 \in U$, alors sa différentielle $df_{x_0}$ est représentée par une matrice $A$ à $p$ lignes et $n$ colonnes.

$$A = \left(a_{ij}\right),\ 1 \leq i \leq p \text{ et } 1 \leq j \leq n$$

Choisissons une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ et une base $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, ..., e'_n)$ de $\mathbb{R}^p$. La matrice de $df_{x_0}$dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ est la matrice , $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ notée $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(df_{x_0})$ (ou parfois $\mathcal{M}(df_{x_0}, \mathcal{B}, \mathcal{B}')$), dont la $j^{\text{ème}}$ colonne est constituée par les coordonnées du vecteur $f(e_j)$ dans la base $\mathcal{B}'$, $1 \leq j \leq n$.

$$f(e_j) = a_{1j}e'_1 + a_{2j}e'_2 + \ldots + a_{pj}e'_p,$$

c'est-à-dire, si $a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{pj}$ sont les coordonnées du vecteur $f(e_j)$ dans la base $\mathcal{B}'$, alors,

$$A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(df_{x_0}) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} f(e_1) & f(e_2) & & f(e_n) \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ e'_1 \\ e'_2 \\ \vdots \\ e'_p \end{array}$$

**Exemples 3.2.1.** :

1. Soit $U$ un ouvert non vide de $\mathbb{R}$, $x_0 \in U$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$. Alors, $f$ est différentiable en $x_0$ si et seulement si $f$ est dérivable en $x_0$. Sa différentielle en $x_0$ est l'application

$$\begin{array}{rcl} df_{x_0} : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ h & \mapsto & df_{x_0}(h) = f'(x_0)\,h \end{array}$$

En effet,

$$\begin{aligned} f \text{ est dérivable en } x_0 &\iff \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) \\ &\iff \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - hf'(x_0)}{h} = 0 \\ &\Leftrightarrow f \text{ est différentiable en } x_0 \text{ et } df_{x_0}(h) = hf'(x_0). \end{aligned}$$

2. La fonction $f$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(x,y) = xy$ est différentiable en $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ et sa différentielle en ce point est l'application

$$\begin{array}{rccc} df_{x_0} : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (h,k) & \mapsto & hy_0 + kx_0. \end{array}$$

En effet, on a

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) - df_{(x_0,y_0)}(h,k)}{\|(h,k)\|_2} \\ &= \frac{(x_0+h)(y_0+k) - x_0y_0 - hy_0 - kx_0}{|h|+|k|} = \frac{hk}{|h|+|k|}. \end{aligned}$$

Donc,

$$|\alpha| \leq |h| \longrightarrow 0 \text{ quand } (h,k) \longrightarrow (0,0).$$

3. Toute application linéaire $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ est différentiable sur $\mathbb{R}^n$ et sa différentielle est elle même, càd, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $df_x = L$. En effet, $\forall (x,u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$,

$$L(x+u) - L(x) - L(u) = 0.$$

En particulier, les $n$ projections

$$\begin{array}{rccc} p^{(i)} : & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) & \mapsto & x_i. \end{array}$$

sont différentiables sur $\mathbb{R}^n$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \ \forall i \in \{1,2,\ldots,n\}, \ dp_x^{(i)} = p_i.$$

**Unicité de la différentielle**

**Proposition 3.2.1.** *:*
*Avec les mêmes notation s de la définition 3.2.1, il existe au plus une application linéaire $L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ vérifiant (17).*

**Preuve.** Supposons qu'il existe deux applications linéaires $L_1$ et $L_2$ vérifiant (17) et notons $L = L_1 - L_2$. De la définition 3.2.1, on déduit que

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{L_1(h) - L_2(h)}{\|h\|_n} = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{L(h)}{\|h\|_n} = 0.$$

Donc,

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \eta > 0, \ \|h\|_n \leq \eta \Longrightarrow \|L(h)\|_p < \varepsilon \|h\|_n.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^n / \{0\}$ , le point $h = \eta \frac{x}{\|x\|_n}$ vérifie $\|h\|_n = \eta$. D'où,

$$\|L(h)\|_p \leq \varepsilon \|h\|_n = \varepsilon\eta.$$

D'autre part,

$$\|L(x)\|_p = \left\| L\left(\frac{\|x\|_n}{\eta} h\right) \right\|_p = \frac{\|x\|_n}{\eta} \|L(h)\|_p \leq \varepsilon\eta \frac{\|x\|_n}{\eta} = \varepsilon \|x\|_n .$$

Par suite,

$$\|L\| = \sup_{x \in \mathbb{R}^n / \{0\}} \frac{\|L(x)\|_p}{\|x\|_n} \leq \varepsilon.$$

Puisque est arbitraire, nous déduisons que $L = 0$ càd $L_1 = L_2$.

**Proposition 3.2.2.** *:*
*Soit $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ et $x_0 \in \overset{0}{A}$. Si $f$ est différentiable en $x_0$, alors $f$ est continue en $x_0$.*

**Preuve.** Supposons que $f$ est différentiable en $x_0$. Donc, pour tout $h \in$A tel que $x_0 + h \in \overset{0}{\mathrm{A}}$, on a

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = df_{x_0}(h) + o\|h\| .$$

Comme $df_{x_0}$ est continue sur A et $df_{x_0}(0) = 0$, on déduit que

$$\sup_{h \longrightarrow 0} f(x_0 + h) = f(x_0) .$$

D'où la continuité de $f$ en $x_0$. Il en résulte que si $f$ est différentiable sur $U$, alors $f$ est continue sur $U$.

## 3.3 Opérations algébriques (somme, produit, quotient, inverse)

### 3.3.1 Différentielle d'une combinaison linéaire

**Proposition 3.3.1.** *:*
*Soit $U$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $x_0 \in U$, $f$ et $g$ deux fonctions de $U$ dans $\mathbb{R}^p$ différentiables en $x_0$, $\lambda$ et $\mu$ deux réels. Alors, la fonction $\lambda f + \mu g$ est différentiable en $x_0$ et sa différentielle en ce point est*

$$d(\lambda f + \mu g)_{x_0} = \lambda df_{x_0} + \mu dg_{x_0}$$

**Preuve.** Soit $h$ assez petit tel que $(x_0+h) \in U$. Nous avons

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\longrightarrow 0} \frac{(\lambda f+\mu g)(x_0+h)-(\lambda f+\mu g)(x_0)-(\lambda df_{x_0}+\mu dg_{x_0})(h)}{\|h\|_n} \\
= &\ \lambda \lim_{h\longrightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)-df_{x_0}(h)}{\|h\|_n} + \mu \lim_{h\longrightarrow 0} \frac{g(x_0+h)-g(x_0)-dg_{x_0}(h)}{\|h\|_n} = 0.
\end{aligned}$$

D'où le résultat.

### 3.3.2 Différentielle du produit

**Proposition 3.3.2.** *:*
*Soit $U$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $x_0 \in U$, $f$ et $g$ deux fonctions de $U$ dans $\mathbb{R}$ différentiables en $x_0$. Alors, la fonction $fg$ est différentiable en $x_0$ et sa différentielle en ce point est*

$$d(fg)_{x_0} = g(x_0)\, df_{x_0} + f(x_0)\, dg_{x_0}.$$

**Preuve.** Soit $h$ assez petit tel que $(x_0+h) \in U$. On a

$$\begin{aligned}
f(x_0+h) &= f(x_0)+df_{x_0}(h)+\varepsilon(x_0,h)\|h\|_n \ \text{ avec} \lim_{h\longrightarrow 0}\varepsilon(x_0,h)=0, \\
g(x_0+h) &= g(x_0)+dg_{x_0}(h)+\delta(x_0,h)\|h\|_n \ \text{ avec} \lim_{h\longrightarrow 0}\delta(x_0,h)=0.
\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
\tau &= f(x_0+h)\,g(x_0+h)-f(x_0)\,g(x_0)-f(x_0)\,dg_{x_0}(h)-g(x_0)\,df_{x_0}(h) \\
&= f(x_0)\,\delta(x_0,h)\|h\|_n+df_{x_0}(h)\,dg_{x_0}(h)+df_{x_0}(h)\,\delta(x_0,h)\|h\|_n+ \\
&\quad +\left[g(x_0)+dg_{x_0}(h)+\delta(x_0,h)\|h\|_n\right]\varepsilon(x_0,h)\|h\|_n \\
&= \zeta(x_0,h)\|h\|_n, \qquad (3.3.1)
\end{aligned}$$

où

$$\zeta(x_0,h)=f(x_0)\,\delta(x_0,h)+\frac{df_{x_0}(h)\,dg_{x_0}(h)}{\|h\|_n}+df_{x_0}(h)\,\delta(x_0,h)+\left[g(x_0)+dg_{x_0}(h)+\delta(x_0,h)\|h\|_n\right]. \qquad (3.3.2)$$

On a

$$\lim_{h\longrightarrow 0} f(x_0)\,\delta(x_0,h)=\lim_{h\longrightarrow 0} df_{x_0}(h)\,\delta(x_0,h)=\lim_{h\longrightarrow 0}\left[g(x_0)+dg_{x_0}(h)+\delta(x_0,h)\|h\|_n\right]=0. \qquad (3.3.3)$$

D'autre part, on a de la proposition 3.2.3,

$$\frac{|df_{x_0}(h)\,dg_{x_0}(h)|}{\|h\|_n} \leq M^2\|h\|_n \longrightarrow \ \text{quand } h \longrightarrow 0.$$

En combinant (18) , (19) et (20) nous obtenons

$$f\left(x_0+h\right) g\left(x_0+h\right)=f\left(x_0\right) g\left(x_0\right)-\left[f\left(x_0\right) d g_{x_0}(h)+g\left(x_0\right) d f_{x_0}(h)\right]+\zeta\left(x_0, h\right)\|h\|_n,$$

avec $\lim\limits_{h \longrightarrow 0} \zeta\left(x_0, h\right)=0$. D'où le résultat.

**Proposition 3.3.3.** *:*
*Soit $U$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $x_0 \in U$, $f$ et $g$ deux fonctions de $U$ dans $\mathbb{R}$ différentiables en $x_0$. Alors, la fonction $fg$ est différentiable en $x_0$ et sa différentielle en ce point est*

$$d(fg)_{x_0}=g\left(x_0\right) d f_{x_0}+f\left(x_0\right) d g_{x_0}.$$

### 3.3.3 Différentielle du quotient

**Proposition 3.3.4.** *:*
*Soit $U$ un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$, $x_0 \in U$, $f$ une fonction de $U$ dans $\mathbb{R}$ différentiable en $x_0$ et telle que $f\left(x_0\right) \neq 0$. Alors, il existe un voisinage $V$ de $x_0$ tel que $f$ ne soit non nulle sur $U \cap V$. La fonction $\dfrac{1}{f}$ définie de $U \cap V$ dans $\mathbb{R}$ est différentiable en $x_0$ et sa différentielle est*

$$d\left(\frac{1}{f}\right)_{x_0}=-\frac{1}{\left[f\left(x_0\right)\right]^2} d f_{x_0}.$$

**Preuve.** Comme $f$ est différentiable en $x_0$, alors, $f$ est continue en $x_0$. Donc, il existe un voisinage $V$ de $x_0$ tel que $f$ ne s'annulle pas sur $U \cap V$. Soit $h$ assez tel que $\left(x_0+h\right) \in U \cap V$. on a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{f\left(x_0+h\right)}-\frac{1}{f\left(x_0\right)}+\frac{1}{\left[f\left(x_0\right)\right]^2} d f_{x_0}(h) &= \frac{\left[f\left(x_0\right)\right]^2-f\left(x_0+h\right) f\left(x_0\right)+f\left(x_0+h\right) d f_{x_0}(h)}{f\left(x_0+h\right)\left[f\left(x_0\right)\right]^2} \\
&= -f\left(x_0\right) \frac{f\left(x_0+h\right)-f\left(x_0\right)}{D}+\frac{f\left(x_0+h\right) d f_{x_0}(h)}{D} \\
&= -f\left(x_0\right) \frac{d f_{x_0}(h)+o\|h\|_n}{D}+\frac{f\left(x_0\right)+d f_{x_0}(h)+o\|h\|_n}{D} d f_{x} \\
&= -f\left(x_0\right) \frac{o\|h\|_n}{D}+\frac{\left[d f_{x_0}(h)\right]^2+d f_{x_0}(h)\, o\|h\|_n}{D},
\end{aligned}$$

où $D=f\left(x_0+h\right)\left[f\left(x_0\right)\right]^2$ . Nous avons $\dfrac{-f\left(x_0\right)}{D}$ et $\dfrac{d f_{x_0}(h)}{D}$ sont bornés. Donc,

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f\left(x_0\right)}{D} \frac{o\|h\|_n}{\|h\|_n}=\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{d f_{x_0}(h)}{D} \frac{o\|h\|_n}{\|h\|_n}=0.$$

D'autre part, en vertu de la proposition 3.2.3, $|df_{x_0}(h)| \leq M \|h\|_n$ et puisque $\dfrac{1}{D}$ set borné, on a $\lim\limits_{h \longrightarrow 0} \dfrac{[df_{x_0}(h)]^2}{D} = 0$. Donc,

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \left[ \frac{1}{f(x_0+h)} - \frac{1}{f(x_0)} + \frac{1}{[f(x_0)]^2} df_{x_0}(h) \right] \frac{1}{\|h\|_n} = 0.$$

D'où le résultat.

**Remarque 3.3.1.** *:*
*En combinant les résultats des propositions 3.3.2 et 3.3.3, nous déduisons que si $f$ et $g$ sont différentiables en $x_0$ et si $g(x_0) \neq 0$, alors $\dfrac{f}{g}$ est différentiable en $x_0$ et on a*

$$d\left(\frac{f}{g}\right)_{x_0} = -\frac{f(x_0)\, dg_{x_0} - g(x_0)\, df_{x_0}}{[f(x_0)]^2}.$$

### 3.3.4 Différentielle d'une application composée

**Proposition 3.3.5.** *:*
*Soit $U$ un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$, $V$ un ouvert non vide de $\mathbb{R}^p$ $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^p$, $g : V \longrightarrow \mathbb{R}^q$. On suppose $f(U) \subset V$, $f$ différentiable en $x_0 \in U$ et $g$ différentiable en $y_0 = f(x_0) \in V$. Alors $gof$ est différentiable en $x_0$ et on a*

$$d(gof)_{x_0} = dg_{f(x_0)} o df_{x_0}.$$

**Preuve.** Soit $h$ tel que $x_0 + h \in U$. Au voisinage de $x_0$, on a

$$f(x_0+h) = f(x_0) + df_{x_0}(h) + \varepsilon(x_0,h)\|h\|_n \quad \text{avec} \lim_{h \longrightarrow 0} \varepsilon(x_0,h) = 0.$$

Posons $k = df_{x_0}(h) + \varepsilon(x_0,h)\|h\|_n$. On a $\lim\limits_{h \longrightarrow 0} k = 0$. Donc, au voisinage de $y_0$, on a

$$\begin{aligned} g(y_0+k) &= g[f(x_0)+k] = g[f(x_0+h)] \\ &= g(y_0) + dg_{y_0}(k) + \theta(y_0,k)\|k\|_p \quad \text{avec} \lim_{h \longrightarrow 0} \theta(y_0,k) = 0. \end{aligned}$$

Donc,

$$gof(x_0+h) = gof(x_0) + dg_{y_0}(df_{x_0}(h)) + dg_{y_0}[\varepsilon(x_0,h)]\|h\|_n + \theta(y_0,k)\|k\|_p.$$

Or,

$$\frac{\|k\|_p}{\|h\|_n} = \frac{\|df_{x_0}(h) + \varepsilon(x_0,h)\|h\|_n\|_p}{\|h\|_n} \leq |\varepsilon(x_0,h)| + \frac{\|df_{x_0}(h)\|_p}{\|h\|_n}.$$

Il existe $U_1 \in \mathcal{V}(x_0)$ et $M > 0$ tel que $x_0 + h \in U_1$ et $\|k\|_p \leq M \|h\|_n$. D'où

$$\frac{gof(x_0+h) - gof(x_0) - dg_{f(x_0)}[df_{x_0}(h)]}{\|h\|_n} = dg_{y_0}[\varepsilon(x_0,h)] + \frac{\theta(y_0,k)\|k\|_p}{\|h\|_n} \longrightarrow 0 \text{ quand } h \longrightarrow 0.$$

**Proposition 3.3.6.** *:*
*Soit $U$ un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^p$. Pour que $f$ soit différentiable au point $x_0$ (resp. sur $U$), il faut et il suffit, que les $p$ composantes $f_1, f_2, \ldots, f_p$ de $f$ soit différentiables au point $x_0$ (resp. sur $U$) et pour tout $h = (h_1, h_2, \ldots, h_n)$ de $\mathbb{R}^n$, on a*

$$df_{x_0} = \left(d(f_1)_{x_0}.h, \ldots, d(f_p)_{x_0}.h\right).$$

**Preuve.** $\Longrightarrow$) Supposons que $f$ est différentiable en $x_0$. Comme les projections $p_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, sont différentiables, en vertu de la propsition 3.3.4.1, por tout $i = 1, 2, \ldots, n$, la fonction $f_i = p_i o f$ est différentiable en $x_0$ et ona

$$d(f_i)_{x_0} = d(p_i)_{f(x_0)} odf_{x_0} = p_i odf_{x_0} = dx_i odf_{x_0},$$

avec $dx_i = p_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.
$\Leftarrow$) Supposons que pour tout $i = 1, 2, \ldots, n$, $f_i = p_i o f$ est différentiable en $x_0$. Pour tout $h \in \mathbb{R}^n$, notons $A_f.h$ le vecteur $\mathbb{R}^p$ de composantes $\left(d(f_1)_{x_0}.h, \ldots, d(f_p)_{x_0}.h\right)$. Le vecteur

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0) - A_f.h}{\|h\|_n}$$

a pour composantes

$$B_f^{(i)}.h = \frac{f_i(x_0+h) - f_i(x_0) - d(f_i)_{x_0}.h}{\|h\|_n},\ i = 1, 2, \ldots, p.$$

Pour tout $i = 1, 2, \ldots, p$, $\lim_{h \longrightarrow 0} B_f^{(i)}.h = 0$. Donc, $\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - A_f.h}{\|h\|_n} = 0$.
D'où $f$ est différentiable en $x_0$ et sa différentielle en ce poine est

$$df_{x_0} = A_f.h.$$

### 3.3.5 Différentielle d'une application réciproque

**Définition 3.3.1.** :
Soient $U$ et $V$ deux parties de $\mathbb{R}^n$. On appelle **homéomorphisme** de $U$ sur $V$, toute application de $U$ dans $V$ bijective et continue dont la réciproque est continue. Si une telle bijection existe, on dit que $U$ et $V$ sont **homéomorphes**.

**Proposition 3.3.7.** *:*
*Soit $f$ est un homéomorphisme d'un ouvert $U$ de $\mathbb{R}^n$ contenenant $x_0$ sur un ouvert $V$ de $\mathbb{R}^n$ contenenant $f(x_0)$. Si $f$ est différentiable en $x_0$ et si sa différentielle $df_{x_0}$ est une bijection de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^n$, alors l'application réciproque $g = f^{-1}$ est différentiable en $y_0 = f(x_0)$ et sa différentielle est donnée par :*

$$dg_{y_0} = d\left(f^{-1}\right)_{f(x_0)} = (df_{x_0})^{-1}.$$

**Preuve.** On va se ramener au cas $x_0 = y_0 = 0$.Considérons les applications

$$\begin{array}{rcl} f_0 : \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ u & \mapsto & f(x_0+u) - f(x_0) \end{array} \text{ et } \begin{array}{rcl} g_0 : \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ v & \mapsto & g(y_0+v) - g(y_0) = g(y_0+v) - x_0 \end{array}.$$

On a $f_0(0) = g_0(0) = 0$. Puisque $f$ est un homéomorphisme d'un voisinage ouvert $U$ de $x_0$ sur un voisinage ouvert $V$ de $y_0 = f(x_0)$, alors $f$ est un homéomorphisme d'un voisinage ouvert $U_0$ de 0 sur un voisinage ouvert $V_0$ de 0. Pour tout $u \in U_0$, on a

$$f_0(u) = f(x_0+u) - f(x_0) = df_{x_0}.u + \|u\|_n \varepsilon(x_0, u) \text{ avec } \lim_{u \longrightarrow 0} \varepsilon(x_0, u) = 0.$$

Posons

$$A = (df_{x_0})^{-1} \text{ et } \alpha = \|A\| > 0.$$

Soit $v \in V_0$ et $u = g_0(v) = g[f(x_0) + v] - x_0$. On a

$$\begin{aligned} g[f(x_0)+v] - g(x_0) - A.v &= g[f(x_0)+v] - x_0 - A.v = h - A.v \\ &= h - A[f(x_0+u) - f(x_0)] \\ &= h - A[df_{x_0}.u + \|u\|_n \varepsilon(x_0,u)] \\ &= -A.\|u\|_n \varepsilon(x_0,u) = -\|u\|_n A.\varepsilon(x_0,u). \end{aligned}$$

Donc,

$$\frac{\|g[f(x_0)+v] - g(x_0) - A.v\|_n}{\|v\|_n} = \frac{\|u\|_n}{\|v\|_n} \|A.\varepsilon(x_0,u)\|_n \tag{3.3.4}$$

$f$ différentiable en $x_0 \Longrightarrow \exists \lambda > 0$, $\|u\|_n < \lambda \Longrightarrow \|\varepsilon(x_0,u)\|_n < \dfrac{1}{2\alpha}$.
$g_0$ continue en $0 \Longrightarrow \exists \mu > 0$, $\|v\|_n < \mu \Longrightarrow \|g_0(v)\|_n = \|u\|_n < \alpha$. Donc, pour $\|v\|_n < \mu$, on a

$$\begin{aligned} \|A.v\|_n &= \|A.[f(x_0+u) - f(x_0)]\|_n = \|A.[df_{x_0}.u + \|u\|_n \varepsilon(x_0,u)]\|_n \\ &= \|u + \|u\|_n A.\varepsilon(x_0,u)\|_n \geq |\|u\|_n - \|u\|_n \|A.\varepsilon(x_0,u)\|_n| > \frac{1}{2}\|u\|_n \end{aligned}$$

car

$$\|A.\varepsilon(x_0,u)\|_n \leq \|A\| \|\varepsilon(x_0,u)\|_n < \frac{1}{2}.$$

Par suite, si $\|v\|_n < \mu$, on a

$$\frac{1}{2}\|u\| \leq \|A.v\|_n \leq \|A\| \|v\|_n .$$

Donc,

$$\frac{\|u\|}{\|v\|_n} \leq 2\|A\| \tag{3.3.5}$$

En combinant (21) et (22), nous obtenons

$$\frac{\|g[f(x_0)+v] - g[f(x_0)] - A.v\|_n}{\|v\|_n} \leq 2\alpha^2 \|\varepsilon(x_0,u)\|_n .$$

Et puisque

$$\lim_{v\longrightarrow 0} \varepsilon(x_0,u) = \lim_{u\longrightarrow 0} \varepsilon(x_0,u) = 0,$$

on déduit que

$$\lim_{v\longrightarrow 0} \frac{g[f(x_0)+v] - g[f(x_0)] - A.v}{\|v\|_n} = 0.$$

Par conséquent,

$$dg_{y_0} = dg_{f(x_0)} = A = (df_{x_0})^{-1} .$$

## 3.4 Dérivées partielles

### 3.4.1 Définition et propriétés

**Définition 3.4.1.** :

Soient : $U$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in U$, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^p$ et $i \in \{1, 2, \ldots, p\}$ .
On dit que $f$ admet une **dérivée partielle première** au point $a$ par rapport à $x_i$ si la limite suivante existe

$$\lim_{t\longrightarrow 0} \frac{f(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, a_i + t, a_{i+1}, \ldots, a_n) - f(a_1, a_2, \ldots, a_n)}{t}.$$

et on la note $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ ou $D_i f(a)$ .

**Remarques 3.4.1.** :

1. La dérivée partielle est aussi une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$. Ainsi, si $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n)$$

correspond à la fonction dérivée partielle première de $f$ $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ par rapport à la $i^{\text{ème}}$ variable $x_i$ au point $x$.

2. Si on désigne par $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, la dérivée partielle première de $f$ par rapport à la $i^{\text{ème}}$ variable $x_i$ au point $a$ peut s'écrire

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = D_i f(a) = \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{f(a + te_i) - f(a)}{t}$$

3. Lorsque $n = 1$, la notion de dérivée partielle première coincide avec la notion de dérivée classique.

En utilisant des résultats sur les limites, on déduit facilement les résultats suivants.

**Proposition 3.4.1.** *:*
*Soient : $U$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in U$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^p$. Pour que $f$ ait une dérivée partielle par rapport à $x_i$ au point $a$, il faut et il suffit, que les $p$ composantes $f_1, \dots, f_p$ de $f$ aient une dérivée partielle par rapport à $x_i$ au point $a$ et on a*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(a), \frac{\partial f_2}{\partial x_i}(a), \dots, \frac{\partial f_p}{\partial x_i}(a)\right).$$

**Proposition 3.4.2.** *:*
*Soient : $U$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in U$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^p$ différentiable au point $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$. Alors, la fonction $f$ admet au point $a$ des dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$, $i = 1, \dots, n$, et on a pour tout $u = (u_1, \dots, u_n)$*

$$df_a.u = \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a).$$

**Preuve.** Par hypothèse, il existe une application linéaire $df_a$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ telle que pour tout $u \in \mathcal{V}(0)$ et $a + u \in U$, on ait

$$f(a + u) - f(a) = df_a.u + \|u\|_n \varepsilon(a, u) \text{ avec } \lim_{u \longrightarrow 0} \varepsilon(a, u) = 0.$$

En particulier, pour $u = te_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, on a $\|u\|_n = |t|$ et

$$f(a + te_i) - f(a) = df_a.te_i + |t| \varepsilon(a, te_i) \text{ avec } \lim_{t \longrightarrow 0} \varepsilon(a, te_i) = 0.$$

Donc,

$$\lim_{t \longrightarrow 0} \frac{f(a + te_i) - f(a)}{t} = df_a.e_i \in \mathbb{R}^p.$$

Par conséquent,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = df_a.e_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

et

$$\begin{aligned} df_a.u &= df_a.\left(u_1,u_2,\ldots,u_n\right) = df_a.\left(\sum_{i=1}^n u_i e_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^n u_i df_a.e_i = \sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\left(a\right) \\ &= \left(\sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial f_1}{\partial x_i}\left(a\right), \sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial f_2}{\partial x_i}\left(a\right), \ldots, \sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial f_n}{\partial x_i}\left(a\right)\right) \in \mathbb{R}^p \end{aligned}$$

**Remarques 3.4.2.** :

1. Si $p = 1$ càd $f$ est une fonction numérique, on a

   $$\begin{aligned} df_a.u &= df_a.\left(u_1,u_2,\ldots,u_n\right) = df_a.\left(\sum_{i=1}^n u_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\left(a\right) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}\left(a\right) dx_i\left(u\right) = \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}\left(a\right) dx_i\right).u, \end{aligned}$$

   où

   $$\begin{aligned} dx_i : \mathbb{R}^n & \longrightarrow \mathbb{R} \\ u = \left(u_1,u_2,\ldots,u_n\right) & \mapsto dx_i\left(u\right) = u_i. \end{aligned}$$

   D'où,

   $$df_a = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}\left(a\right) dx_i.$$

   Donc, $df_a$ est une combinaison linéaire dans $\mathcal{L}_c\left(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}\right)$ des applications linéaires $dx_i, i = 1,2,\ldots,n$. Les coefficients sont les réels $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\left(a\right), i = 1,2,\ldots,n$.
2. La réciproque de la proposition 3.4.4 est fausse càd, l'existance des $n$ dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\left(a\right),\ i = 1,\ldots,n$, ne suffit pas pour assurer la différentiabilité de $f$ au point $a$.

Par exemple, la fonction $f$ définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$f\left(x,y\right) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si} \quad \left(x,y\right) \neq \left(0,0\right), \\ 0 & \text{si} \quad \left(x,y\right) = \left(0,0\right). \end{cases}$$

Pour tout $x \neq 0$ et $y \neq 0$, on a

$$f\left(x,0\right) = f\left(0,y\right) = 0.$$

Donc,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$

Si $f$ est différentiable en $(0,0)$ , sa différentielle en ce point serait nulle et donc (en choisissant la norme euclidienne), on obtient

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0)}{\|(x,y)\|} = \frac{xy}{x^2+y^2} = 0,$$

ce qui ne l'ait pas. Donc, $f$ n'est pas différentiable en $(0,0)$ .
La proposition suivante donne une condition suffisante pour qu'une fonction soit différentiable en un point.

**Proposition 3.4.3.** *:*
*Soient : $U$ un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$, $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in U$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^p$. Si $f$ admet sur $U$ des dérivée partielles par rapport à chacune de ses variables et que ses dérivées sont continues au point $a$, alors $f$ est différentiable au point $a$ et on a*

$$df_a.u = df_a.(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a).$$

**Preuve.** Soit $u$ assez petit tel que $a + u \in U$. On a

$$\begin{aligned}
f(a+u) - f(a) &= f(a_1+u_1, a_2+u_2, \ldots, a_n+u_n) - f(a_1, \ldots, a_n) \\
&= f(a_1+u_1, \ldots, a_n+u_n) - f(a_1, a_2+u_2, \ldots, a_n+u_n) \\
&\quad + f(a_1, a_2+u_2, \ldots, a_n+u_n) - f(a_1, a_2, a_3+u_3, \ldots, a_n+u_n) \\
&\quad + \ldots \\
&\quad \vdots \\
&\quad + f(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n+u_n) - f(a_1, \ldots, a_n) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \Delta(i,u),
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
\Delta(i,u) &= f(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, a_i+u_i, a_{i+1}+u_{i+1}, \ldots, a_n+u_n) - f(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}+u_{i+1}, \ldots, a_n \\
&= f\left(a + \sum_{k\geq i} u_k e_k\right) - f\left(a + \sum_{k>i} u_k e_k\right).
\end{aligned}$$

Pour chaque $i \in \{1, \ldots, n\}$ , la fonction

$$x_j \mapsto f(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}+u_{i+1}, \ldots, a_n+u_n),$$

est dérivable sur l'intervalle d'extrémités $a_i$ et $a_i + u_i$. Donc, en vertu du T.A.F., il existe $\theta_i \in ]0,1[$ tel que

$$\begin{aligned}
\Delta(i,u) &= f\left(a + \sum_{k \geq i} u_k e_k\right) - f\left(a + \sum_{k>i} u_k e_k\right) \\
&= u_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, a_i + \theta_i u_i, a_{i+1} + u_{i+1}, \dots, a_n + u_n).
\end{aligned}$$

Puisque les fonctions $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ sont continues au point $a$, on peut écrire

$$\Delta(i,u) = u_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + u_i \varepsilon_i(u) \text{ avec } \lim_{u \longrightarrow 0} \varepsilon_i(u) = 0.$$

Donc,

$$f(a+u) - f(a) = \sum_{i=1}^{n} \Delta(i,u) = \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + \sum_{i=1}^{n} u_i \varepsilon_i(u).$$

D'où

$$\begin{aligned}
\frac{\left\| f(a+u) - f(a) - \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \right\|_p}{\|u\|_n} &= \frac{\left\| \sum_{i=1}^{n} u_i \varepsilon_i(u) \right\|_p}{\|u\|_n} \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} |u_i| \frac{\left\| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i(u) \right\|_p}{\|u\|_n} \leq \sup_{i=1,2,\dots,n} \|\varepsilon_i(u)\|_p \frac{\sum_{i=1}^{n} |u_i|}{\|u\|_n} \\
&\leq \text{const} \sup_{i=1,2,\dots,n} \|\varepsilon_i(u)\|_p \longrightarrow 0 \text{ quand } u \longrightarrow 0.
\end{aligned}$$

Donc, $f$ est différentiable au point $a$ et $df_a$ est l'application qui à tout $u \in \mathbb{R}^n$ associe $\sum_{i=1}^{n} u_i \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$.

**Remarque 3.4.1.** *:*
*La continuité des dérivées partielles n'est pas nécessaire pour qu'une fonction soit différentiable.*

Soit la fonctionnumérique définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

On a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$

Si $(x,y) \neq (0,0)$,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 2x\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 2y\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right).
\end{aligned}$$

Les fonctions $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ ne sont pas continues en $(0,0)$ car sur la direction $y = x > 0$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,x) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,x) = 2x\sin\left(\frac{1}{x\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(\frac{1}{x\sqrt{2}}\right)$$

et cette quantité n'admet pas de limite au point $(0,0)$. Cependant, $f$ est différentiable en $(0,0)$ et on a

$$\begin{aligned}
\frac{\|f(x,y) - f(0,0)\|_2}{\|(x,y)\|_2} &= \sqrt{x^2+y^2}\left|\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\right| \\
&\leq \text{const}\sqrt{x^2+y^2} \text{ quand } (x,y) \longrightarrow (0,0).
\end{aligned}$$

### 3.4.2 Matrice jacobienne

Soient : $U$ un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$, $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in U$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^p$ différentiable au point $a$. Soient $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ et $(e_i')_{1\leq i\leq p}$ les bases canoniques de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$. L'application linéaire $df_a$ est déterminée par la donnée de sa matrice dans les bases $(e_i)$ et $(e_i')$. Le $i^{\text{ème}}$ vecteur colonne colonne qui représente $df_a$ est

$$df_a.e_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(a), \frac{\partial f_2}{\partial x_i}(a), \dots, \frac{\partial f_p}{\partial x_i}(a)\right), \quad i = 1, \dots, n.$$

**Définition 3.4.2.** :
La matrice

$$\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a)\right)_{\substack{1\leq j\leq n \\ i\leq i\leq p}} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_p}{\partial x_1}(a) & \dots & \dfrac{\partial f_p}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix},$$

est appelée **matrice jacobienne** de $f$ au point $a$ et on la note $J_f(a)$.
Lorsque $n = p$, le déterminant de cette matrice est appelé le jacobien de $f$ au point $a$ et on le note $\dfrac{D(f_1, \dots, f_p)}{D(x_1, \dots, x_p)}(a)$ ou $\dfrac{\partial(f_1, \dots, f_p)}{\partial(x_1, \dots, x_p)}(a)$.

**Remarque 3.4.2.** *:*

1. *Pour tout $u = (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n$, on a*
$$(df_a.u)^t = J_f(a).u^t = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(a) & \ldots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}.$$
2. *Soit $U$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $V$ un ouvert de $\mathbb{R}^p$, $a \in U$, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^p$ et $f : V \longrightarrow \mathbb{R}^q$. Si $f(U) \subset V$, $f$ différentiable au point $a$ et $g$ différentiable au point $f(a)$, alors $gof$ est différentiable au point $a$ et on a*
$$J_{gof}(a) = J_g(f(a)) \times J_f(a)$$
3. *L'application $df_a$ est une bijection de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^n$ ssi $\dfrac{D(f_1, \ldots, f_p)}{D(x_1, \ldots, x_p)}(a) \neq 0$.*
4. *Sous les mêmes conditions de la proposition 3.3.5.1, on a*
$$J_{f^{-1}}(f(a)) = [J_f(a)]^{-1}.$$

**Exemples 3.4.1.** :

1. Soit $f$ la fonction de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par :
$$\begin{aligned} f(r,\theta,\varphi) &= (x(r,\theta,\varphi), y(r,\theta,\varphi), z(r,\theta,\varphi)) \\ &= (r\cos\theta\cos\varphi, r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\varphi). \end{aligned}$$
On a
$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial r} &= \cos\theta\cos\varphi, \ \frac{\partial x}{\partial \theta} = -r\sin\theta\cos\varphi, \ \frac{\partial x}{\partial \varphi} = -r\cos\theta\sin\varphi; \\ \frac{\partial y}{\partial r} &= \sin\theta\cos\varphi, \ \frac{\partial y}{\partial \theta} = r\cos\theta\cos\varphi, \ \frac{\partial y}{\partial \varphi} = -r\sin\theta\sin\varphi; \\ \frac{\partial z}{\partial r} &= \sin\varphi, \ \frac{\partial z}{\partial \theta} = 0, \ \frac{\partial z}{\partial \varphi} = r\cos\varphi; \end{aligned}$$
Donc,
$$J_{(r,\theta,\varphi)}(f) = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\cos\varphi & -r\cos\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\varphi & 0 & r\cos\varphi \end{pmatrix}$$

Le jacobien de $f$ est

$$\frac{\partial (f_1, f_2, f_3)}{\partial (r, \theta, \varphi)} = \frac{\partial (x, y, z)}{\partial (r, \theta, \varphi)} =$$

2. Dérivées partielles d'une fonction composée. Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ une fonction différentiable en $a \in U$ et $g : V \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^q$ tq $f(U) \subset V$ et différentiable en $f(a) = b$. Posons $h = gof$. On a

$$J_a(h) = J_a(gof) = J_{f(a)}(g) \times J_a(f),$$

avec

$$\begin{aligned}
J_a(f) &= \begin{matrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_p}{\partial x_1}(a) & \dots & \dfrac{\partial f_p}{\partial x_n}(a) \end{matrix} = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le p \\ 1 \le j \le n}} = \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \right)_{\substack{1 \le i \le p \\ 1 \le j \le n}} \\
J_{f(a)}(g) &= \begin{matrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial y_1}(b) & \dots & \dfrac{\partial g_1}{\partial y_p}(b) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial g_q}{\partial y_1}(b) & \dots & \dfrac{\partial g_q}{\partial y_q}(b) \end{matrix} = (b_{ij})_{\substack{1 \le i \le q \\ 1 \le j \le p}} = \left( \frac{\partial g_i}{\partial y_j}(b) \right)_{\substack{1 \le i \le q \\ 1 \le j \le p}}
\end{aligned}$$

D'où,

$$J_a(h) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial h_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \dfrac{\partial h_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial h_q}{\partial x_1}(a) & \dots & \dfrac{\partial h_q}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix} = (c_{ij})_{\substack{1 \le i \le q \\ 1 \le j \le n}} = \left( \frac{\partial h_i}{\partial x_j}(a) \right)_{\substack{1 \le i \le q \\ 1 \le j \le n}}.$$

$$c_{ij} = \frac{\partial h_i}{\partial x_j}(a) = \sum_{k=1}^{p} b_{ik} a_{kj} = \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial g_i}{\partial y_k}(b) \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(a).$$

Ainsi par exemple, si

$$f \quad : \quad \begin{matrix} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (r, \theta) & \longmapsto & (r \cos\theta, r \sin\theta) \end{matrix} \; ; \; g : \begin{matrix} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & x^2 + y^2 \end{matrix}$$

$$h \quad = \quad gof. : \begin{matrix} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (r, \theta) & \longmapsto & h(r, \theta) = g[f(\theta)] = r^2 \end{matrix}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial h}{\partial r}(r,\theta) &= \frac{\partial g}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta)\frac{\partial f_1}{\partial r}(r,\theta) + \frac{\partial g}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)\frac{\partial f_2}{\partial r}(r,\theta) \\
&= \cos\theta\frac{\partial g}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + \sin\theta\frac{\partial g}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta) \\
&= 2r\cos^2\theta + 2r\sin^2\theta = 2r \\
\frac{\partial h}{\partial \theta}(r,\theta) &= \frac{\partial g}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta)\frac{\partial f_1}{\partial \theta}(r,\theta) + \frac{\partial g}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)\frac{\partial f_2}{\partial \theta}(r,\theta) \\
&= -r\sin\theta\frac{\partial g}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + r\cos\theta\frac{\partial g}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta) \\
&= -2r^2\sin\theta\cos\theta + 2r^2\sin\theta\cos\theta = 0.
\end{aligned}
$$

On retrouve facilement le résultat en explicitant $h\left((r,\theta)\right) gof\,(r,\theta)$

## 3.5 Dérivée suivant un vecteur

**Définition 3.5.1.** :
Soit $U$ un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^p$ et $X$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$. On dit que $f$ admet une dérivée au point $a \in U$ suivant le vecteur $X$ si la fonction de la variable réelle

$$\varphi : t \mapsto \frac{f(a+tX) - f(a)}{t},$$

admet une limite quand $t \longrightarrow 0$. Lorsque cette limite existe, on la note $D_X f(a)$.

**Remarque 3.5.1.** *:*

1. *La dérivée suivant tout vecteur nul est nulle.*
2. *Si $f$ admet une dérivée partielle par rappor à la $i^{\text{ème}}$ variable au point $a \in U$, alors $f$ admet au point $a$ une dérivée suivant le vecteur $e_i$ et on a*

$$D_{e_i} f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = D_i f(a).$$

3. *Si $f$ est différentiable au point $a$, alors $f$ admet au point $a$ une dérivée suivant tout vecteur $X$ et on a $D_X f(a) = df_a.X$.*
*En effet, pour $u$ dans un voisinage de 0, on a*

$$f(a+u) - f(u) = df_a.u + \|u\|_n\,\varepsilon(a,u) \text{ avec } \lim_{u\longrightarrow 0}\varepsilon(a,u) = 0.$$

*D'où, pour $u = tX$ avec $t \longrightarrow 0$, on a*

$$f(a+tx) - f(u) = df_a.tX + |t|\,\|X\|_n\,\varepsilon(a,tX) \text{ avec } \lim_{t\longrightarrow 0}\varepsilon(a,tX) = 0.$$

*Donc,*

$$\lim_{t\longrightarrow 0}\frac{f(a+tX)-f(a)}{t}=df_a.X$$

4. *Une fonction peut admettre des dérivées suivant tout vecteur en un point sans qu'elle soit différentiable en ce point. Considérons la fonction définie sur* $\mathbb{R}^2$ *par :*

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2} & si \quad (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & si \quad (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

*Soit* $X=(\alpha,\beta)$ *un vecteur de* $\mathbb{R}^2$ *et soit* $t\neq 0$. *On peut supposer que* $(\alpha,\beta)\neq(0,0)$ *car la dérivée suivant tout vecteur nul est nulle. On a*

$$\begin{aligned}\frac{f[(0,0)+t(\alpha,\beta)]-f((0,0))}{t} &= \frac{f[t(\alpha,\beta)]}{t}=\frac{f[t\alpha,t\beta]}{t}\\ &= \frac{t^3\alpha^2\beta}{t^3(t^2\alpha^4+\beta^2)}=\frac{\alpha^2\beta}{t^2\alpha^4+\beta^2}.\end{aligned}$$

*D'où,*

$$D_Xf(0,0)=\begin{cases}0 & si \quad \beta=0,\\ \dfrac{\alpha^2}{\beta} & si \quad \beta\neq 0.\end{cases}$$

*Donc,* $f$ *admet une dérivée suivant tout vecteur* $X=(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$. *Cependant,* $f$ *n'est pas différentiable en* $(0,0)$ *car elle n'est même pas continue en* $(0,0)$. *On a*

$$f(x,x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2} & si \quad x\neq 0,\\ 0 & si \quad x\neq 0.\end{cases}$$

## 3.6 Dérivées partielles d'ordre supérieure

**Définition 3.6.1.** :
Soit $U$ un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$, $f:U\longrightarrow\mathbb{R}^p$ admettant sur $U$ des dérivées partielles par rapport à chacune de ses variables. Pour chaque $i=1,2\ldots,n$, on a donc une fonction

$$\begin{aligned}D_if=\frac{\partial f}{\partial x_i}:U &\longrightarrow \mathbb{R}^p\\ x &\longmapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\end{aligned}$$

La fonction $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ peut avoir une dérivée seconde par rapport à $x_j$ en un point $a\in U$ ou sur $U$. On note $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}(a)$ ou $D_{ji}f(a)$ ou $f''_{x_ix_j}(a)$ la dérivée partielle par rapport à $x_j$ au point $a$ de la fonction $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$. Les fonctions $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ sont appelées dérivées partielles d'ordre 2 de $f$. Les fonctions $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}$ seront notées $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$. Par récurrence, on définit les dérivées partielles d'ordre $p$ de $f$ par :

$$\frac{\partial^p f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_p}} (x) = \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \left( \frac{\partial^p f}{\partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_p}} \right)$$

qu'on note aussi $D_{i_1 i_2 \dots i_p} f\,(x)$ ou $f^{(p)}_{x_{i_p} x_{i_{p-1}} \dots x_{i1}}\,(x)$.

**Remarque 3.6.1.** *Une fonction peut avoir $n$ dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$, $n^2$ dérivées partielles d'ordre 2 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$. En général, une fonction peut avoir $n^p$ dérivées partielles d'ordre $p$ en un point $a$ $\dfrac{\partial^p f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_p}}(a)$ obtenues en donnant aux indices $i_1, i_2, \dots, i_p$ toutes les valeurs possibles de 1 à $n$.*

**Définition 3.6.2.** :
Une fonction définie sur un ouvert $U$ de $\mathbb{R}^n$ est dite de classe $C^k$ sur $U$ si $f$ admet toutes les dérivées partielles d'ordre $k$ sur $U$ et que celles-ci sont continues sur $U$. $f$ est dite de classe $C^\infty$ sur $U$ si $f$ admet des dérivées partielles continues de n'importe quel ordre.

## Application

1. Tout polynôme $P\,(x_1, x_2, \dots x_n)$ à $n$ indétyerminées est classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}^n$.
2. $f = \dfrac{P\,(x_1, x_2, \dots x_n)}{Q\,(x_1, x_2, \dots x_n)}$ une fraction rationnelle à $n$ indéterminées. Soit $D \subset \mathbb{R}^n$ son domaine de définition. Alors la fonction

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{f} : D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x = (x_1, x_2, \dots x_n) & \longmapsto & f\,(x) = \dfrac{P\,(x_1, x_2, \dots x_n)}{Q\,(x_1, x_2, \dots x_n)} \end{array}$$

   est de classe $C^\infty$ sur $D$.

**Théorème 3.6.1** (Théorème de Schwartz)**.** *. :*
*Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ admettant des dérivées partielles $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ continues au point $a$. Alors, on a*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a).$$

**Preuve.** Il suffit de démontrer le résultat pour $n = 2$. Soit $V \in \mathcal{V}(0,0)$ et $(h,k) \in V$ tel que $(a+h, b+k) \in U$. Considérons la fonction $\Delta$ définie sur $V$ par :

$$\Delta(h,k) = f(a+h, b+k) - f(a, b+k) - f(a+h, b) + f(a,b).$$

Pour $k$ fixé, Considérons la fonction $\varphi$ définie sur une partie de $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi(x) = f(x, b+k) - f(x, b).$$

Nous avons

$$\Delta(h,k) = \varphi(a+h) - \varphi(a).$$

La fonction $\varphi$ est dérivable entre $a$ et $a+h$ et

$$\varphi'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, b+k) - \frac{\partial f}{\partial x}(x, b).$$

D'autre part, en vertu du théorème des accroissements finis, il existe $\theta_1 \in ]0,1[$ tel que

$$\varphi(a+h) - \varphi(a) = h\varphi'(a+\theta_1 h),$$

càd,

$$\Delta(h,k) = h\left[\frac{\partial f}{\partial x}(a+\theta_1 h, b+k) - \frac{\partial f}{\partial x}(a+\theta_1 h, b)\right].$$

La fonction $\psi$ définie sur une partie de $\mathbb{R}$ par :

$$\psi(y) = \frac{\partial f}{\partial x}(a+\theta_1 h, y)$$

est dérivable entre $b$ et $b+k$. En appliquant encore le théorème des accroissements finis entre $b$ et $b+k$, nous déduisons l'existances de $\theta_2 \in ]0,1[$ tel que

$$\psi(b+k) - \psi(b) = h\psi'(b+\theta_2 k),$$

càd,

$$\Delta(h,k) = hk\left[\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a+\theta_1 h, b+\theta_2 k)\right].$$

Donc,

$$\lim_{(h,k)\longrightarrow(0,0)} \frac{\Delta(h,k)}{hk} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b). \tag{3.6.1}$$

Pour $h$ fixé, Considérons la fonction $\varphi_1$ définie sur une partie de $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi_1(x) = f(a+h, y) - f(a, y)$$

Nous avons

$$\Delta(h,k) = \varphi_1(b+k) - \varphi_1(b).$$

En procédant de la même manière que précedemment, nous obtenons

$$\lim_{(h,k)\longrightarrow(0,0)} \frac{\Delta(h,k)}{hk} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b). \tag{3.6.2}$$

En comparant (23) et (24), on déduit que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b).$$

**Remarque 3.6.2.** *1. Si les fonctions* $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ *et* $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ *existent au point* $(a,b)$ *et ne sont pas continues, on peut avoir* $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b)$*. Considérons la fonction* $f$ *définie sur* $\mathbb{R}^2$ *par :*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & si \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

*On a*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1 \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = -1.$$

2. *Si* $f$ *est de classe* $C^k$*, on peut changer l'ordre de dérivation relativement aux différentes variables. En particulier, on peut regrouper les dérivations relatives à une même variable et on utilisera les notations*

$$\frac{\partial^k f(x_1,\ldots,x_n)}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial^{\alpha_n} x_n} \text{ ou } D^{\alpha_1}\ldots D^{\alpha_n} \quad \text{avec } \alpha_1+\ldots+\alpha_n = k.$$

## 3.7 Formule des accroissements finis et formule de Taylor

### 3.7.1 Formule des accroissements finis

**Définition 3.7.1.** :
Soit $x$ et $y$ deux éléments de $\mathbb{R}^n$. On appelle segment d'extrémités $x$ et $y$, l'ensemble

$$[x,y] = \{z \in \mathbb{R}^n / z = tx + (1-t)\,y, t \in [0,1]\}.$$

**Lemme 3.7.1.** *Soit* $I = [\alpha, \beta]$ *un compact de* $\mathbb{R}$*,* $f$ *une fonction continue de* $I$ *dans* $\mathbb{R}^p$ *et* $g$ *une fonction continue de* $I$ *dans* $\mathbb{R}$*. n suppose que* $f$ *et* $g$ *possèdent des dérivées à droite vérifiant*

$$\left\|f'_d(t)\right\|_p \leq g'_d(t), \ \forall t \in I.$$

*Alors,*

$$\|f(\beta) - f(\alpha)\|_p \leq g(\beta) - g(\alpha).$$

**Preuve.** Soit $\varepsilon > 0$ et considérons l'ensemble

$$I(\varepsilon) = \left\{ t \in I / \left\| f(t) - f(\alpha) \right\|_p \leq g(t) - g(\alpha) + \varepsilon (t - \alpha) \right\}.$$

$\alpha \in I(\varepsilon)$ entraîne que $I(\varepsilon) \neq \emptyset$. $I(\varepsilon) \subset I$, donc, $I(\varepsilon)$ est borné. D'où $\sup I(\varepsilon)$ existe. Posons $M = \sup I(\varepsilon)$ et montrons que $M \in I(\varepsilon)$. Soit $(t_n)$ une suite de $I(\varepsilon)$ qui converge vers vers $M$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\left\| f(t_n) - f(\alpha) \right\|_p \leq g(t_n) - g(\alpha) + \varepsilon (t_n - \alpha).$$

Comme $f$ et $g$ sont continues, par passage à la limite, nous déduisons que

$$\left\| f(M) - f(\alpha) \right\|_p \leq g(M) - g(\alpha) + \varepsilon (M - \alpha).$$

Donc, $M \in I(\varepsilon)$. Montron smaintenant que $M = \beta$. Supposons que $M < \beta$. Comme $f$ et $g$ sont dérivables à droite au point $M$, alors, il existe $h > 0$ tel que pour $M < t < M + h$, on ait à la fois

$$\left\| \frac{f(t) - f(M)}{t - m} - f'_d(M) \right\|_p \leq \frac{\varepsilon}{2} \text{ et } \left| \frac{g(t) - g(M)}{t - m} - g'_d(M) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{f(t) - f(M)}{t - m} \right\|_p &\leq \left\| f'_d(M) \right\|_p + \frac{\varepsilon}{2} \leq g'_d(M) + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{g(t) - g(M)}{t - m}, \end{aligned}$$

càd

$$\left\| f(t) - f(M) \right\|_p \leq \varepsilon (t - M) + g(t) - g(M). \tag{3.7.1}$$

Puisque, $M \in I(\varepsilon)$, on a

$$\left\| f(M) - f(\alpha) \right\|_p \leq g(M) - g(\alpha) + \varepsilon (M - \alpha). \tag{3.7.2}$$

Par conséquent, de (25) et (26), on déduit que pour tout $t \in ]M, M + h[$,

$$\begin{aligned} \left\| f(t) - f(\alpha) \right\|_p &\leq \left\| f(t) - f(M) \right\|_p + \left\| f(M) - f(\alpha) \right\|_p \\ &\leq g(t) - g(\alpha) + \varepsilon (t - \alpha) \end{aligned}$$

Donc, $M + \dfrac{h}{2} \in I$. Ce qui contrdit la définition de $M$.

**Proposition 3.7.1** (Théorème de la moyenne)**.** *:*
*Soit $U$ un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^p$ différentiable sur $U$ et tel que*

$$\sup_{u \in U} \left\| df_u \right\| \leq k.$$

*Alors, quels que soient les points $x$ et $y$ de $U$ tel que le segment $[x, y]$ soit contenu dans $U$, on a*

$$\|f(x) - f(y)\|_p \leq k \|x - y\|_n .$$

**Preuve.** Soit $g$ la fonction de $I = [0, 1]$ dans $\mathbb{R}^n$ définie par :

$$g(t) = x + t(y - x).$$

On a $g(I) \subset U$. Donc, on peut considérer la fonction $F = fog$ définie de $I$ dans $\mathbb{R}^p$. Comme $f$et $g$ sont dérivables sur $I$, la fonction $F$ est dérivable sur $I$ et on a

$$F'(t) = f'(t) .g'(t) = df_{g(t)}.g'(t) = df_{x+t(y-x)}.(y - x).$$

Donc,

$$\left\|F'(t)\right\|_p = \left\|df_{x+t(y-x)}.(y - x)\right\|_p \leq \left\|df_{x+t(y-x)}\right\| \|(y - x)\|_n \leq k \|(y - x)\|_n .$$

En posant, $\varphi(t) = kt \|(y - x)\|_n$ , on aura

$$\left\|F'(t)\right\|_p \leq \varphi'(t),$$

et en utilisant le lemme précédent, on obtient

$$\|F(1) - F(0)\|_p \leq \varphi(1) - \varphi(0),$$

càd,

$$\|f(x) - f(y)\|_p \leq k \|x - y\|_n .$$

**Corollaire 3.7.1.** *:*
*Soit $U$ un ouvert connexe de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^p$ différentiable sur $U$ et tel que $df_x = 0$ $\forall x \in U$. Alors, $f$ est constante sur $U$.*

**Preuve.** Soit $a \in U$ et posons

$$X = \{x \in U / f(x) = f(a)\}.$$

On a $X = f^{-1}\{a\}$ . Comme $f$ est continue sur $U$, $X$ est une partie fermée non vide de $U$. Soit $b \in X$, il existe $r > 0$ tel que $B(b, r) \subset U$. Si $x \in B(b, r)$ , le segment $[b, x] \subset U$. En vertu du théorème de la moyenne, on a $\|f(b) - f(x)\|_p = 0$. Donc, $f(b) = f(x) = f(a)$ et par suite, $x \in X$. Par conséquent, $B(b, r) \subset X$. $X$ est une partie à la fois ouverte et fermée dans $U$. Comme $X \neq \emptyset$,alors $X = U$.

**Proposition 3.7.2** ( (théorème des accroissements finis). *:*
*Soit $U$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ différentiable sur $U$, $x$ et $x+h$ deux points de $U$ tels que le segment $[x, x+h] \subset U$. Alors, il existe $\theta \in ]0,1[$ tel que*

$$f(x+h) - f(x) = \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x+\theta h).$$

**Preuve.** Considérons l'application $g$ de $I = [0,1] \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$ définie par : $g(t) = x + th$. On a $g(I) \subset U$. On peut donc considérer la fonction $F = fog$ définie de $I$ dans $\mathbb{R}$. Cette dernière fonction est continiue sur  et dérivable sur $]0,1[$. Donc, il existe $\theta \in ]0,1[$ tel que

$$F(1) - F(0) = F'(\theta).$$

càd,

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &= (fog)'(\theta) = \frac{d}{dt}(fog)(\theta) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_i + \theta h_i) . \frac{dg_i}{dt} \\ &= \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_i + \theta h_i). \end{aligned}$$

### 3.7.2 Formule de Taylor

**Proposition 3.7.3** (formule de Taylor). *:*
*Soit $U$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ admettant des dérivées partielles jusqu'à l'ordre $l$ continues sur $U$. Soit $x$ et $x+h$ deux points de $U$ tels que le segment $[x, x+h] \subset U$. Alors, il existe $\theta \in ]0,1[$ tel que*

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) + \frac{1}{2!}\left[\sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\right]^{(2)} + \ldots + \\ &\quad + \frac{1}{(l-1)!}\left[\sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\right]^{(l-1)} + \frac{1}{l!}\left[\sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x+\theta h)\right]^{(l)}. \end{aligned}$$

**Preuve.** Considérons l'application $g$ de $I = [0,1] \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$ définie par : $g(t) = x + th$. On a $g(I) \subset U$. On considére la fonction $F = fog$ définie de $I$ dans $\mathbb{R}$. Cette dernière fonction est de classe $C^l$, on npeut lui appliquer la formule classique de Taylor. Il existe $\theta \in ]0,1[$ tel que

$$F(1) = F(0) + \frac{1}{1!}F'(0) + \frac{1}{2!}F''(0) + \ldots + \frac{1}{(l-1)!}F^{(l-1)}(0) + \frac{1}{l!}F^{(l)}(\theta).$$

Or, pour tout $k \in \{0, 1, 2, \ldots, l\}$

$$\begin{aligned} F^{(k)}(0) &= \frac{d^k}{dt^k}(fog)(0) = \left[\left(\sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^{(k)} og\right](0) \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\right)^{(k)}; \\ F^{(l)}(\theta) &= \frac{d^l}{dt^l}(fog)(\theta) = \left[\left(\sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^{(k)} og\right](\theta) \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x+\theta h)\right)^{(l)} \end{aligned}$$

### 3.7.3 Extremum d'une fonction

**Définition 3.7.2.** :
Définition 3.7.3.1. Soit $U$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in U$. On dit que $f$ admet un **maximum strict (**resp. **un minimum strict)** au point $a$ s'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$x \in U \text{ et } \|x - a\| < \alpha \Longrightarrow f(x) < f(a) \quad (\text{resp. } f(x) < f(a)).$$

On dit que $f$ admet un extremum strict au point $a$ si $f$ admet en ce point un maximum strict ou un minimum strict.

**Proposition 3.7.4.** *:*
*Soit $U$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in U$. On suppose que $f$ admet des dérivées partielles par rapport à toutes les variables au point $a$ et que $f$ admet un extremum strict au point $a$. Alors, pour tout $i = 1, 2, \ldots, n$,*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0.$$

**Preuve.** Considérons pour tout $i = 1, 2, \ldots, n$, la fonction $F_i$ définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$F_i = f(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_n).$$

$F_i$ admet un extremum strict au point $a_i$. Donc, $F_i'(a_i) = 0$ càd $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$.

**Remarque 3.7.1.** 1. *On peut avoir $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$ pour tout $i = 1, 2, \ldots, n$, sans que $f$ admette un extremum strict au point $a$. Ainsi par exemple, la fonction $f$ définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3$ vérifie $f'(0) = 0$. Cependant, $f$ n'admet pas d'extremum strict au point 0.*

2. *Soit $U$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $C^3$ sur $U$. Soit $a = (x_0, y_0) \in U$ tekl que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a) = \dfrac{\partial f}{\partial xy}(a) = 0$. Pour $h$ et $k$ assez petits, il existe $\theta \in \left]0, 1\right[$ tel que*

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = \left[h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial xy}\right]^{(2)}(x_0, y_0) + \left[h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial xy}\right]^{(3)}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k).$$

*Posons*

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0),\ B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0),\ C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0).$$

*Si $B^2 - 4AC < 0$, pour $h$ et $k$ assez petits*

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$$

*a le même signe que $Ah^2 2Bhk + Ck^2$ càd que la fonction $f$ admet au point $(x_0, y_0)$ un maximum strict ou un minimum strict suivant que $A < 0$ ou $A > 0$.*

**Exemple 3.7.1.** :
1) Extremum de la fonction $f(x, y) = (x - y)^2 \left(1 - x^2 - y^2\right)$.

### 3.7.4 Fonctions vectorielles

La formule des accroissements finis et celle de Taylor ne s'appliquent pas au cas d'une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ avec $p > 1$ car le choix de $\theta$ n'étant pas nécessairement le même pour toutes les composantes. Tout de même, nous avons le résultat suivant que nous déduisons de la formule de Taylor-Young.

**Proposition 3.7.5.** *:*
*Soit $I$ un ouvert de $\mathbb{R}$, $I \longrightarrow \mathbb{R}^p$, $a$ et $b$ deux réels tels que $[a, b] \subset I$. On suppose que $f$ est continue sur $[a, b]$ admettant des dérivées jusqu'à l'ordre $(l - 1)$ sur $[a, b]$ et une dérivée à l'ordre $l$ en $a$. lors, pour tout $x \in [a, b]$, on a*

$$f(x) = f(x) + \frac{1}{1!}(x - a) f'(a) + \ldots + \frac{(x - a)^{l-1}}{(l - 1)!} f^{(l-1)}(a) + \frac{(x - a)^l}{l!}\left[f^{(l)}(a) + \varepsilon(x)\right],$$

*où* $\lim\limits_{x \longrightarrow a} \varepsilon(x) = 0$ *et* $f^{(k)}(a) = \left(f_1^{(k)}(a), f_2^{(k)}(a), \ldots, f_p^{(k)}(a)\right)$.

**Preuve.** Il suffit d'appliquer à chacune des composantes la formule de Taylor classique.