Applications de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$

2.1 Généralités

Dans ce chapitre, pour tout entier $q \neq 0$, $\mathbb{R}^q$ est considéré comme un espace métrique. La distance d_q étant la disance associée à la norme $\| \ . \ \|_q$ ie $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^q, d(x,y) = \|y - x\|_q$. Soient n et p deux entiers naturels strictements positifs.

Définition 1.1

Soient A une partie de $\mathbb{R}^n$ et f une une fonction définie sur A à valeurs dans $\mathbb{R}^p$. A est appelé le **domaine** *de f.*
Le sous-ensemble de $\mathbb{R}^p$ défini par :

$$f(A) = \{y \in \mathbb{R}^p / \exists x \in \mathbb{R}^n \text{ avec } y = f(x)\},$$

est **l'image** *de f.*
Notation : $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$.
f se nomme aussi fonction de n variables.
Si $p = 1$, f est dite **fonction numérique,** *càd, $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$.*

Définition 1.2

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $i \in \{1,2,\ldots,n\}$. *On appelle* $i^{\text{ème}}$ **projection** *de* $\mathbb{R}^n$ *sur* $\mathbb{R}$, *l'application*

$$\begin{array}{rccc} p_i : & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x = (x_1, \ldots x_n) & \mapsto & p_i(x) = x_i. \end{array}$$

Notons que p_i *est une fonction numérique.*

Définition 1.3

Soient $A \subset \mathbb{R}^n$, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^p$ *et* $j \in \{1,2,\ldots,p\}$. *On appelle* $j^{\text{ème}}$ **composante** *de* f, *la fonction,*

$$\begin{array}{rcc} f_j : A & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f_j(x) = p_j o f(x). \end{array}$$

Pour tout $x \in A$, *on a*

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_p(x)).$$

Définition 2.1

Soient $A \subset \mathbb{R}^n, f : A \longrightarrow \mathbb{R}^p$, $x_0 \in \overline{A}$ *et* $l = (l_1, l_2, \ldots, l_p) \in \mathbb{R}^p$. *On dit que* f *a pour* **limite** l *au point* x_0 *si*

$$\begin{array}{rcl} \forall \varepsilon & > & 0,\ \exists \eta > 0, (x \in A \text{ et } \|x - x_0\|_n < \eta) \Longrightarrow \|f(x) - l\|_p < \varepsilon. \\ & \Leftrightarrow & \\ \forall \varepsilon & > & 0,\ \exists \eta > 0, (x \in A \text{ et } d_n(x, x_0) < \eta) \Longrightarrow d_p(f(x), l) < \varepsilon. \\ & \Leftrightarrow & \\ \forall V & \in & \mathcal{V}(l) \subset \mathbb{R}^p,\ \exists U \in \mathcal{V}(x_0) \text{ tel que } f(A \cap U) \subset V. \end{array}$$

Notation : $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = l$ *ou* $\lim\limits_{x \in A, x \longrightarrow x_0} f(x) = l$ *ou* $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0, x \neq x_0} f(x) = l$.

Remarque 2.1

1. *Si* $x_0 \in A$, *on n'exige pas que* $l = f(x_0)$.
2. *Si* $x_0 \notin \overline{A}$, *la définition n'aurait pas de sens, car il existerait* $U \in \mathcal{V}(x_0)$ *tel que* $U \cap A = \varnothing$.

2.2.2 Unicité de la limite

Proposition 2.1

Soient $A \subset \mathbb{R}^n$, $x_0 \in \overline{A}$ et $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^p$.
Si f admet une limite en x_0, cette limite est unique.

Preuve. Supposons que

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = l \text{ et } \lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = l' \text{ avec } l \neq l'.$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver $\eta_1 > 0$ et $\eta_2 > 0$ tel que

$$(x \in A \text{ et } \|x - x_0\|_n < \eta_1) \implies \|f(x) - l\|_p < \frac{\varepsilon}{2},$$
$$(x \in A \text{ et } \|x - x_0\|_n < \eta_2) \implies \|f(x) - l'\|_p < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Proposition 2.1

Soient $A \subset \mathbb{R}^n$, $x_0 \in \overline{A}$ et $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^p$.
Si f admet une limite en x_0, cette limite est unique.

Preuve. Supposons que

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = l \text{ et } \lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = l' \text{ avec } l \neq l'.$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver $\eta_1 > 0$ et $\eta_2 > 0$ tel que

$$(x \in A \text{ et } \|x - x_0\|_n < \eta_1) \implies \|f(x) - l\|_p < \frac{\varepsilon}{2},$$
$$(x \in A \text{ et } \|x - x_0\|_n < \eta_2) \implies \|f(x) - l'\|_p < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Posons $\eta = \inf(\eta_1, \eta_2)$. Pour tout $x \in A$ et $\|x - x_0\|_n < \eta$, nous avons

$$\|f(x) - l\|_p < \frac{\varepsilon}{2} \text{ et } \|f(x) - l'\|_p < \frac{\varepsilon}{2}.$$

En vertu de l'inégalité triangulaire, on obtient

$$\forall \varepsilon > 0, \ \|l - l'\|_p < \varepsilon.$$

D'où $l = l'$.

Remarque 2.2

La proposition 2.1 est souvent utile pour montrer que la limite n'existe pas.

Posons $\eta = \inf(\eta_1, \eta_2)$. Pour tout $x \in A$ et $\|x - x_0\|_n < \eta$, nous avons

$$\|f(x) - l\|_p < \frac{\varepsilon}{2} \text{ et } \|f(x) - l'\|_p < \frac{\varepsilon}{2}.$$

En vertu de l'inégalité triangulaire, on obtient

$$\forall \varepsilon > 0, \ \|l - l'\|_p < \varepsilon.$$

D'où $l = l'$.

Remarque 2.2

La proposition 2.1 est souvent utile pour montrer que la limite n'existe pas.

Proposition 2.2

Soient $A \subset \mathbb{R}^n$, $x_0 \in \overline{A}$, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^p$, $g : A \longrightarrow \mathbb{R}^p$ et $h : A \longrightarrow \mathbb{R}$. On suppose

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}^p, \quad \lim_{x \longrightarrow x_0} g(x) = l' \in \mathbb{R}^p \text{ et } \lim_{x \longrightarrow x_0} h(x) = l'' \in \mathbb{R}.$$

Alors, on a

(i) $\lim_{x \longrightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = l + l'$.

(ii) $\lim_{x \longrightarrow x_0} h(x) f(x) = ll''$.

Preuve. Démontrons (i). On a

$$\begin{aligned} \left\| f(x) + g(x) - (l + l') \right\|_p &= \left\| f(x) - l + (g(x) - l') \right\|_p \\ &\leq \left\| f(x) - l \right\|_p + \left\| g(x) - l' \right\|_p . \qquad (1) \end{aligned}$$

Proposition 2.2

Soient $A \subset \mathbb{R}^n$, $x_0 \in \overline{A}$, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^p$, $g : A \longrightarrow \mathbb{R}^p$ *et* $h : A \longrightarrow \mathbb{R}$. *On suppose*

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}^p, \ \lim_{x \longrightarrow x_0} g(x) = l' \in \mathbb{R}^p \text{ et } \lim_{x \longrightarrow x_0} h(x) = l'' \in \mathbb{R}.$$

Alors, on a
(i) $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = l + l'$.
(ii) $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} h(x) f(x) = ll''$.

Preuve. Démontrons (i). On a

$$\begin{aligned} \left\| f(x) + g(x) - (l + l') \right\|_p &= \left\| f(x) - l + (g(x) - l') \right\|_p \\ &\leq \| f(x) - l \|_p + \| g(x) - l' \|_p . \qquad (1) \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\eta_1 > 0$ et $\eta_2 > 0$ tel que

$$(x \in A \text{ et } \|x - x_0\|_n < \eta_1) \implies \|f(x) - l\|_p < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{2}$$
$$(x \in A \text{ et } \|x - x_0\|_n < \eta_2) \implies \|g(x) - l'\|_p < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3}$$

Posons $\eta = \inf(\eta_1, \eta_2)$. De (1), (2) (3) et l'inégalité triangulaire, on déduit

$$(x \in A \text{ et } \|x - x_0\|_n < \eta) \implies \|f(x) + g(x) - (l + l')\|_p < \varepsilon.$$

Prouvons (ii). On peut écrire,

$$h(x) f(x) - ll'' = h(x)(f(x) - l) + (h(x) - l'') l.$$

D'où,

$$\|h(x) f(x) - ll''\|_p \leq |h(x)| \, \|f(x) - l\|_p + |h(x) - l''| \, \|l\|_p. \tag{4}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\eta_1 > 0$ tel que

$$(x \in A \text{ et } \|x - x_0\|_n < \eta_1) \Longrightarrow \left|h(x) - l''\right| < \frac{\varepsilon}{2}\delta, \tag{5}$$

avec

$$\delta = \begin{cases} \frac{1}{\|l\|_p} & \text{si} \quad l \neq 0, \\ 1 & \text{si} \quad l = 0. \end{cases}$$

De (5), on déduit que

$$(x \in A \text{ et } \|x - x_0\|_n < \eta_1) \Longrightarrow |h(x)| < \frac{\varepsilon}{2}\delta + \left|l''\right| = M. \tag{6}$$

D'autre part, il existe $\eta_2 > 0$ tel que

$$(x \in A \text{ et } \|x - x_0\|_n < \eta_2) \Longrightarrow \|f(x) - l\|_p < \frac{\varepsilon}{2M}. \tag{7}$$

Posons $\eta = \inf(\eta_1, \eta_2)$. De (4), (5), (6) et (7) ,on obtient

$$(x \in A \text{ et } \|x - x_0\|_n < \eta) \Longrightarrow \left\|h(x) f(x) - ll''\right\|_p < \varepsilon.$$

Remarque 2.3

1. *Si* $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^p$ *et* $g : B \longrightarrow \mathbb{R}^p$, *la fonction* $f + g$ *peut être étudiée sur* $A \cap B$.
2. *Si* $h(x) = \lambda \in \mathbb{R}$ *et si* $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = l$, *alors* $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} h(x) f(x) = \lambda l$.

Proposition 2.3

Soit $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. *Si* f *ne s'annule pas sur une partie* $B \subset A$, *on peut définir* $\frac{1}{f} : B \longrightarrow \mathbb{R}$ *par :*

$$\frac{1}{f}(x) = \frac{1}{f(x)}, \; x \in B.$$

Soit $x_0 \in \overline{B}$ *tel que* $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = l \neq 0$. *Alors* $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{l}$.

Preuve.

Soit $x \in B$. Nous avons

$$\left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{l}\right| = \frac{|f(x) - l|}{|lf(x)|}. \tag{8}$$

Puisque $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = l$, il existe $\eta_1 > 0$ tel que

$$(x \in B \text{ et } \|x - x_0\|_n < \eta_1) \Longrightarrow |f(x) - l| < \frac{|l|}{2}. \tag{9}$$

Donc $\quad (x \in B \text{ et } \|x - x_0\|_n < \eta_1) \Longrightarrow |f(x)| > \frac{|l|}{2}$.
Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\eta_2 > 0$ tel que

$$(x \in B \text{ et } \|x - x_0\|_n < \eta_2) \Longrightarrow |f(x) - l| < \frac{\varepsilon l^2}{2}. \tag{10}$$

Posons $\eta = \inf(\eta_1, \eta_2)$. De (8), (9) et (10), nous déduisons

$$(x \in B \text{ et } \|x - x_0\|_n < \eta) \Longrightarrow \left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{l}\right| < \varepsilon.$$

Remarque 2.4

1. *Soit* $f : A \subset \mathbb{R}^n$, $x_0 \in \overline{A}$ *et* $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$.
   a) On dit que $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = +\infty$ *si*

$$\forall M > 0,\ \exists \eta > 0, (x \in A \text{ et } d_n(x, x_0) < \eta) \Longrightarrow f(x) > M,$$

ou

$$\forall M > 0,\ \exists \eta > 0, (x \in A \text{ et } \|x - x_0\|_n < \eta) \Longrightarrow f(x) > M.$$

   b) On dit que $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = -\infty$ *si*

$$\forall M > 0,\ \exists \eta > 0, (x \in A \text{ et } d_n(x, x_0) < \eta) \Longrightarrow f(x) < -M,$$

ou

$$\forall M > 0,\ \exists \eta > 0, (x \in A \text{ et } \|x - x_0\|_n < \eta) \Longrightarrow f(x) < -M.$$

Remarque (suite)

2. *Soit* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^p$.
   a) On dit que $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = l$ *si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists M > 0,\ x > M \Longrightarrow d_p(f(x), l) < \varepsilon,$$

ou

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists M > 0,\ x > M \Longrightarrow \|f(x) - l\|_p < \varepsilon.$$

On dit que $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = l$ *si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists M > 0,\ x < -M \Longrightarrow d_p(f(x), l) < \varepsilon,$$

ou

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists M > 0,\ x < -M \Longrightarrow \|f(x) - l\|_p < \varepsilon.$$

Proposition 2.4

Soient $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset A$, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^p$ et $x_0 \in \overline{B}$.
Si f admet une limite l au point x_0, la restriction de f à B a une limite au point x_0 et on a

$$\lim_{x \in B, x \longrightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \in A, x \longrightarrow x_0} f(x) = l.$$

Preuve. On a

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \ (x \in A \text{ et } d_n(x, x_0) < \eta) \Longrightarrow d_p(f(x), l) < \varepsilon.$$

Donc,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \ (x \in B \subset A \text{ et } d_n(x, x_0) < \eta) \Longrightarrow d_p(f(x), l) < \varepsilon.$$

D'où la proposition.

Proposition 2.4

Soient $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset A$, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^p$ *et* $x_0 \in \overline{B}$.
Si f *admet une limite* l *au point* x_0*, la restriction de* f *à* B *a une limite au point* x_0 *et on a*

$$\lim_{x \in B, x \longrightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \in A, x \longrightarrow x_0} f(x) = l.$$

Preuve. On a

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \left(x \in A \text{ et } d_n(x, x_0) < \eta\right) \Longrightarrow d_p\left(f(x), l\right) < \varepsilon.$$

Donc,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \left(x \in B \subset A \text{ et } d_n(x, x_0) < \eta\right) \Longrightarrow d_p\left(f(x), l\right) < \varepsilon.$$

D'où la proposition.

Remarque 2.5

La proposition 2.4 est souvent utile pour montrer qu'une fonction n'admet pas de limite en un point.

Soit par exemple,

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2 / \{(0,0)\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}. \end{array}$$

Posons $B_1 = \{0\} \times \mathbb{R}^*; B_2 = \mathbb{R}^* \times \{0\}$.
Nous avons $(0,0) \in \overline{B_1} \cap \overline{B_2}$ et

$$f_{B_1}(x,y) = f(0,y) = -1 \text{ si } y \neq 0 \text{ et } f_{B_2}(x,y) = f(x,0) = 1 \text{ si } x \neq 0.$$

D'où

$$\lim_{x \in B_1, x \longrightarrow x_0} f(x) = -1 \neq \lim_{x \in B_2, x \longrightarrow x_0} f(x) = 1.$$

En vertu de la proposition 2.4, f n'admet pas de limite au point $(0,0)$.

Proposition 2.5

Soit $A \subset \mathbb{R}^n$, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^p$, $x_0 \in \overline{A}$ et $l = (l_1, l_2, \ldots, l_p) \in \mathbb{R}^p$. Pour que f ait la limite l au point x_0, il faut et il suffit, que pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, p\}$, la $i^{\text{ème}}$ composante f_i de f (càd $p_i o f$) ait pour limite l_i au point x_0.

Preuve. On choisit sur $\mathbb{R}^p$ la distance sup définie par :

$$d_p(x, y) = \sup_{1 \leq i \leq p} |x_i - y_i|.$$

Sur $\mathbb{R}^n$, on choisit une distance d_n équivalente à la distance euclidienne. Démontrons que la condition est nécessaire. Supposons que $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = l$. On a donc,

$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, (x \in A \text{ et } d_n(x, x_0) < \eta)$

$\Longrightarrow d_p(f(x), l) = \sup\limits_{1 \leq i \leq p} |f_i(x) - l_i| < \varepsilon.$

D'où, $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, (x \in A \text{ et } d_n(x, x_0) < \eta) \Longrightarrow |f_i(x) - l_i| < \varepsilon$, $\forall i \in \{1, \ldots, p\}$.

Proposition 2.5

Soit $A \subset \mathbb{R}^n, f : A \longrightarrow \mathbb{R}^p$, $x_0 \in \overline{A}$ et $l = (l_1, l_2, \ldots, l_p) \in \mathbb{R}^p$. Pour que f ait la limite l au point x_0, il faut et il suffit, que pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, p\}$, la $i^{\text{ème}}$ composante f_i de f (càd $p_i o f$) ait pour limite l_i au point x_0.

Preuve. On choisit sur $\mathbb{R}^p$ la distance sup définie par :

$$d_p(x, y) = \sup_{1 \leq i \leq p} |x_i - y_i| .$$

Sur $\mathbb{R}^n$, on choisit une distance d_n équivalente à la distance euclidienne. Démontrons que la condition est nécessaire. Supposons que $\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = l$. On a donc,

$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, (x \in A$ et $d_n(x, x_0) < \eta)$

$\Longrightarrow d_p(f(x), l) = \sup_{1 \leq i \leq p} |f_i(x) - l_i| < \varepsilon.$

D'où, $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, (x \in A$ et $d_n(x, x_0) < \eta) \Longrightarrow |f_i(x) - l_i| < \varepsilon$, $\forall i \in \{1, \ldots, p\}$.

Montrons que la condition est suffisante.
Supposons que pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, p\}$, $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f_i(x) = l_i$. Pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$, nous avons,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta_{\varepsilon,i,x_0} > 0, (x \in A \text{ et } d_n(x, x_0) < \eta_{\varepsilon,i,x_0}) \Longrightarrow |f_i(x) - l_i| < \varepsilon.$$

Posons $\eta = \inf\limits_{1 \leq i \leq p} \eta_{\varepsilon,i,x_0}$. On a,

$$(x \in A \text{ et } d_n(x, x_0) < \eta) \Longrightarrow \sup_{1 \leq i \leq p} |f_i(x) - l_i| = d_p(f(x), l) < \varepsilon.$$

Proposition 2.6

Soient : $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$, $g : B \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^q$, $x_0 \in \overline{A}$.
On suppose que $f(A) \subset B$, $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = b$ *et* $\lim\limits_{y \longrightarrow b} g(y) = c$.

Alors, $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} gof(x) = c$.

Proposition 2.7

Soient : $A \subset \mathbb{R}^n$, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^p$, $x_0 \in \overline{A}$ et $l \in \mathbb{R}^p$. *Les deux propositions suivantes sont équivalentes.*

(i) $\lim\limits_{x \in A, x \longrightarrow x_0} f(x) = l$.

(ii) *Pour toute suite* $(u_q)_{q \in \mathbb{N}}$, *d'éléments de* A *convergeante vers* x_0, *la suite* $(f(u_q))_{q \in \mathbb{N}}$ *converge vers* l.

Preuve. Montrons que $(i) \Longrightarrow (ii)$.

Supposons que $\lim\limits_{x \in A, x \longrightarrow x_0} f(x) = l$. Alors,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \left(x \in A \text{ et } \|x - x_0\|_n < \eta\right) \Longrightarrow \|f(x) - l\|_p < \varepsilon. \quad (11)$$

Soit maintenant une suite $(u_q)_{q \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A telle que $\lim\limits_{q \longrightarrow +\infty} u_q = x_0$.

Proposition 2.7

Soient : $A \subset \mathbb{R}^n, f : A \longrightarrow \mathbb{R}^p$, $x_0 \in \overline{A}$ *et* $l \in \mathbb{R}^p$. *Les deux propositions suivantes sont équivalentes.*

(i) $\lim\limits_{x \in A, x \longrightarrow x_0} f(x) = l.$

(ii) *Pour toute suite* $(u_q)_{q \in \mathbb{N}}$, *d'éléments de* A *convergeante vers* x_0, *la suite* $(f(u_q))_{q \in \mathbb{N}}$ *converge vers* l.

Preuve. Montrons que $(i) \Longrightarrow (ii)$.

Supposons que $\lim\limits_{x \in A, x \longrightarrow x_0} f(x) = l$. Alors,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \ (x \in A \text{ et } \|x - x_0\|_n < \eta) \Longrightarrow \|f(x) - l\|_p < \varepsilon. \quad (11)$$

Soit maintenant une suite $(u_q)_{q \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A telle que $\lim\limits_{q \longrightarrow +\infty} u_q = x_0$.

Pour le η trouvé,

$$\exists\ q_0 \in \mathbb{N},\ q \geq q_0 \implies \left\|u_q - x_0\right\|_n < \eta. \tag{12}$$

De (11) et (12), nous obtenons

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists q_0 \in \mathbb{N},\ q \geq q_0 \Longrightarrow \left\|f\left(u_q\right) - l\right\|_p < \varepsilon.$$

Prouvons que $(ii) \Longrightarrow (i)$.
Pour montrer cette implication, il suffit de montrer que **non** $(i) \Longrightarrow$ **non** (ii).
Supposons que f n'admet pas de limite au point x_0. Donc,

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall \eta > 0,\ (\exists x \in A \text{ et } \|x - x_0\|_n < \eta) \text{ tel que } \|f(x) - l\|_p > \varepsilon.$$

Donc, $\exists \varepsilon > 0,\ \forall q \in \mathbb{N},\ \left(\exists u_q \in A \text{ et } \left\|u_q - x_0\right\|_n < \frac{1}{q+1}\right)$
tel que $\left\|f\left(u_q\right) - l\right\|_p > \varepsilon$.
La suite $\left(u_q\right)$ converge vers x_0 tandis que $f\left(u_q\right)$ ne converge pas vers l et non (ii) est vrai. D'où la proposition.

Définition 3.1

Soient : $A \subset \mathbb{R}^n$, $x_0 \in A$ *et* $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^p$. *On dit que* f *est* **continue** *au point* x_0 *si* $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. *Autrement dit :* f *est continue en* x_0 *si*

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon &> 0,\ \exists \eta > 0,\ \left(x \in A \text{ et } \|x - x_0\|_n < \eta\right) \Longrightarrow \|f(x) - f(x_0)\|_p < \varepsilon. \\ &\Leftrightarrow \\ \forall V &\in \mathcal{V}(f(x_0)) \subset \mathbb{R}^p,\ \exists U \in \mathcal{V}(x_0) \text{ tel que } f(A \cap U) \subset V. \end{aligned}$$

Si f *est continue en tout point de* A, *on dit que* f *est continue sur* A.

Des propositions 2.2, 2.3, 2.5, 2.6 et 2.7, on déduit facilement les résultats suivants.

Proposition 3.1

Soient : $A \subset \mathbb{R}^n$, $x_0 \in A$ *et* $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^p$. f *est continue au point* x_0 *(resp. sur* A*) si et seulement si toutes les composantes* $f_i = p_i o f$ *sont continues au point* x_0 *(resp. sur* A*).*

Proposition 3.2

Soient $A \subset \mathbb{R}^n$, $x_0 \in A$, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^p$, $g : A \longrightarrow \mathbb{R}^p$ *et* $h : A \longrightarrow \mathbb{R}$. *On suppose que* f, g *et* h *sont continues en* x_0 *(resp. sur* A*). Alors, les fonctions* $f + g$ *et* hf *sont continues en* x_0 *(resp. sur* A*).*

Proposition 3.3

Soit $A \subset \mathbb{R}^n$, $x_0 \in A$ *et* $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ *telle que* $f(x_0) \neq 0$. *Si* f *est continue au point* x_0, *alors il existe* $U \in \mathcal{V}(x_0)$ *tel que* f *ne s'annule pas sur* $U \cap A$ *et la fonction*

$$\frac{1}{f} : U \cap A \longrightarrow \mathbb{R},$$

est continue en x_0.

Proposition 3.4

Soient : $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$, $g : B \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^q$ *et* $x_0 \in A$. *On suppose que* $f(A) \subset B$. *Si* f *est continue au point* x_0 *et* g *est continue au point* $f(x_0)$, *alors* gof *est continue au point* x_0.

Proposition 3.5

Soient : $A \subset \mathbb{R}^n$, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^p$, $x_0 \in A$. *Les deux propositions suivantes sont équivalentes.*

(i) f *est continue au point* x_0.

(ii) *Pour toute suite* $(u_q)_{q\in\mathbb{N}}$, *d'éléments de* A *convergeante vers* x_0, *la suite* $(f(u_q))_{q\in\mathbb{N}}$ *converge vers* $f(x_0)$.

Définition 3.2

On appelle fonction polynôme, une fonction $P : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ par :

$$P(x) = \sum_{(m_1, m_2, \ldots, m_n) \in I} \lambda_{m_1, m_2, \ldots, m_n} \prod_{k=1}^{n} x_k^{m_k},$$

où I est un sous-ensemble fini de $\mathbb{N}^n$ et $\lambda_{m_1, m_2, \ldots, m_n} \in \mathbb{R}$ $\forall (m_1, m_2, \ldots, m_n) \in I$.

Par exemple, le polynôme

$$P(x, y, z) = x^2 y z^4 + x^2 + x^3 y^5 z + xyz,$$

est un polynôme à 3 variables de degré 9.

Proposition 3.6

Toute fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}^n$.

Définition 3.3

Soient : $A \subset \mathbb{R}^n, f : A \longrightarrow \mathbb{R}^p$ *et* $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in A$.
Pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, *on pose*

$$A_i = \{x_i \in \mathbb{R} / (a_1, a_2, \ldots a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_n) \in A\}.$$

Définissons la fonction

$$\begin{array}{rcl} \varphi_i : A_i & \longrightarrow & \mathbb{R}^p \\ x_i & \mapsto & \varphi_i(x) = f(a_1, a_2, \ldots a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_n). \end{array}$$

On dit que f *est continue par rapport à sa* $i^{\text{ème}}$ *variable (ou par rapport à* x_i*) au point* $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *si et seulement si* φ_i *est continue au point* a_i.

Remarque 3.1

Soit $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$. Si f est continue au point $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Alors f est continue par rapport à chacune des variables en ce point (ie, les fonctions d'une variable φ_1, $\varphi_2, \ldots, \varphi_n$ sont continues respectivement aux points $a_1, a_2, \ldots, a_n$).

Remarque 3.2

La réciproque de la remarque 3.1 est fausse (ie, la continuité des fonctions d'une variable φ_1, $\varphi_2, \ldots, \varphi_n$ n'entraîne pas la continuité de f).

Nous allons justifier cette remarque à l'aide d'un exemple.
Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq 0, \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = 0. \end{cases}$$

Les fonctions φ_1 et φ_2 définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi_1(x) = f(x,0) \text{ et } \varphi_2(y) = f(0,y),$$

sont continues pour $x = 0$ et $y = 0$ car pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\varphi_1(x) = \varphi_2(y) = 0.$$

Considérons la restriction g de f à l'ensemble

$$B_\lambda = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y = \lambda x\right\}.$$

on a

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{\lambda}{1+\lambda^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq 0, \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = 0. \end{cases}$$

D'où,

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} g(x,y) = \frac{\lambda}{1+\lambda^2} \neq g(0,0) = 0.$$

Donc, la fonction g n'est pas continue en $(0,0)$. Par conséquent, la fonction f n'est pas continue en $(0,0)$.

Proposition 3.7

Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$. *Les trois propositions suivantes sont équivalentes.*
(i) f *est continue sur* $\mathbb{R}^n$.
(ii) *Pour tout ouvert* O *de* $\mathbb{R}^p$, $f^{-1}(O)$ *est ouvert dans* $\mathbb{R}^n$.
(iii) *Pour tout fermé* F *de* $\mathbb{R}^p$, $f^{-1}(F)$ *est fermé dans* $\mathbb{R}^n$.

Exemple 1

1. *L'ensemble* $B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 > 10\right\}$ *est ouvert dans* $\mathbb{R}^2$ *car la fonction*
$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & f(x,y) = x^2 + y^2, \end{array}$$
est continue sur $\mathbb{R}^2$ *et* $B = f^{-1}(]10, +\infty[)$ *est ouvert car c'est l'image réciproque de l'ouvert* $]10, +\infty[$ *par la fonction continue* f.

Exemple (suite)

2. $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/x^2+y^2=2x-y\right\}$ *est fermé car c'est l'image réciproque du fermé* $\{0\}$ *par la fonction continue* $g(x,y)=x^2+y^2-2x+y;\ D=g^{-1}(\{0\})$.

Remarques 3.3

1. *Si* A *est une partie de* $\mathbb{R}^n$ *et* f *une application continue de* A *dans* $\mathbb{R}^p$*, les images réciproques des ouverts (resp. fermés) de* $\mathbb{R}^p$ *sont des ouverts (resp. fermés) relatifs de* A.
2. *L'image d'un ouvert (resp. fermé) de* $\mathbb{R}^n$ *par une application continue n'est pas nécessairement un ouvert (resp. fermé) de* $\mathbb{R}^p$.

Par exemple,
L'image de l'ouvert $]-1,1[$ par l'application $x\mapsto x^2$ est l'intervalle $[0,1[$ qui n'est pas ouvert.
L'image du fermé $\mathbb{R}$ par l'application $x\mapsto arctgx$ est l'ouvert $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ qui n'est pas un fermé de $\mathbb{R}$.

2.3.3 Prolongement par continuité

Définition 3.4

Soit A une partie de $\mathbb{R}^n$ et f une fonction définie sur A à valeurs dans $\mathbb{R}^p$. Si f admet une limite l en un point x_0 de $\overline{A}/A$, on peut prolonger f à l'ensemble $B = A \cup \{x_0\}$ en posant

$$\widetilde{f} = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x \in A, \\ l & \text{si} \quad x = x_0. \end{cases}$$

La fonction $\widetilde{f}$ est continue au point x_0;
$\widetilde{f}$ se nomme **prolongement par continuité** *de f au point x_0.*
Si f est continue sur A, alors $\widetilde{f}$ est continue sur B.

Exemple 2

Soit f *la fonction numérique définie sur* $\mathbb{R}^2 / \{(0,0)\}$ *par :*

$$f(x,y) = \frac{x^3 y}{x^2+y^2} \quad \textit{si} \quad (x,y) \neq (0,0).$$

On a

$$0 \leq |f(x,y)| \leq |xy| \frac{x^2}{x^2+y^2} \leq |xy|.$$

D'où

$$\lim_{(x,y) \longrightarrow (0,0)} f(x,y) = 0.$$

Donc, on peut prolonger f *par continuité en* $(0,0)$ *, il suffit de poser*

$$\widetilde{f}(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^2+y^2} & \textit{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ \\ 0 & \textit{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

2.3.4 Propriétés des fonctions continues sur un compact

Proposition 3.8

Soit $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ *et* $B \subset A$. *Si* f *est continue sur* A *et* B *est une partie compacte de* $\mathbb{R}^n$, *alors* $f(B)$ *est un compact de* $\mathbb{R}^p$.

Corollaire 3.1 (théorème du maximum)

Toute fonction numérique continue sur un compact A *de* $\mathbb{R}^n$ *est bornée et atteint ses bornes (c.à.d,* $\exists (x_1, x_2) \in A^2$ *tel que* $\sup_{x \in A} f(x) = f(x_1)$ *et* $\inf_{x \in A} f(x) = f(x_2)$ *.)*

Preuve. Puisque A est compact et f est continue sur A, d'après la proposition 3.8, $f(A)$ est compact dans $\mathbb{R}$.
Donc, $f(A)$ est fermé et borné dans $\mathbb{R}$.
Par conséquent, $\sup_{x \in A} f(x) \in f(A)$ et $\inf_{x \in A} f(x) \in f(A)$. D'où la proposition.

Proposition 3.8

Soit $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ et $B \subset A$. Si f est continue sur A et B est une partie compacte de $\mathbb{R}^n$, alors $f(B)$ est un compact de $\mathbb{R}^p$.

Corollaire 3.1 (théorème du maximum)

Toute fonction numérique continue sur un compact A de $\mathbb{R}^n$ est bornée et atteint ses bornes (c.à.d, $\exists (x_1, x_2) \in A^2$ tel que $\sup_{x \in A} f(x) = f(x_1)$ et $\inf_{x \in A} f(x) = f(x_2)$.)

Preuve. Puisque A est compact et f est continue sur A, d'après la proposition 3.8, $f(A)$ est compact dans $\mathbb{R}$.
Donc, $f(A)$ est fermé et borné dans $\mathbb{R}$.
Par conséquent, $\sup_{x \in A} f(x) \in f(A)$ et $\inf_{x \in A} f(x) \in f(A)$. D'où la proposition.

Définition 3.5 (Application uniformément continue)

Soit $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$. On dit que f est **uniformément continue** *sur A si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall (x,y) \in A^2;\ d_n(x,y) < \eta \implies d_p[f(x), f(y)] < \varepsilon.$$

Exemple 3

Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ telle que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n,\ d_p[f(x), f(y)] < k d_n(x,y), \tag{13}$$

où k est une constante strictement positive. Alors, f est uniformément continue sur $\mathbb{R}^n$. Pour montrer l'uniforme continuité, il suffit de prendre $\eta = \frac{\varepsilon}{k}$. Une fonction qui vérifie (16) est dite **Lipschitzienne** *de rapport k.*

Remarque 3.4

Une fonction uniformément continue est évidemment continue. La réciproque est fausse comme le montre l'exemple suivant.

La fonction

$$f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$$
$$x \mapsto f(x) = x^2,$$

est continue sur $\mathbb{R}^+$ mais non uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$. Choisissons sur $\mathbb{R}^+$ la distance naturelle. On a

$$d[f(x), f(y)] = |f(y) - f(x)| = \left|y^2 - x^2\right| = (y + x)|y - x|.$$

Soit $\varepsilon > 0$ et $\eta > 0$. Les réels $x = \frac{\varepsilon}{\eta}$ et $y = x + \frac{\eta}{2}$ vérifient

$$|y - x| = \frac{\eta}{2} < \eta \text{ et } (y + x)|y - x| > 2x|y - x| = \varepsilon.$$

Donc, f n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$.

Proposition 3.9 (Théorème de Heine)

Toute fonction continue sur un compact est uniformément continue.

Preuve.

Supposons que $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ est continue.

Donc on a

$$\forall \varepsilon > 0, \forall x \in A, \exists \eta_x > 0, (y \in A, d_n(x,y) < 2\eta_x) \Rightarrow d_p[f(x), f(y)] < \frac{\varepsilon}{2}.$$

La famille $[B(x, \eta_x)]_{x \in A}$ constitue un recouvrement ouvet de A.

Comme A est compact, on peut extraire un recouvrement fini.

Il existe donc $x_1, x_2, \ldots, x_m$ tel que

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{m} B(x_k, \eta_{x_k}).$$

Proposition 3.9 (Théorème de Heine)

Toute fonction continue sur un compact est uniformément continue.

Preuve.
Supposons que $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ est continue.
Donc on a

$$\forall \varepsilon > 0, \forall x \in A, \exists \eta_x > 0, (y \in A, d_n(x, y) < 2\eta_x) \Rightarrow d_p[f(x), f(y)] < \frac{\varepsilon}{2}.$$

La famille $[B(x, \eta_x)]_{x \in A}$ constitue un recouvrement ouvet de A.
Comme A est compact, on peut extraire un recouvrement fini.
Il existe donc $x_1, x_2, \ldots, x_m$ tel que

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{m} B(x_k, \eta_{x_k}).$$

Posons $\eta = \inf_{k=1,\ldots,m} \eta_{x_k} > 0$.
Soient y et z deux éléments de A tel que $d_n(y,z) < \eta$.
Puisque $y \in A$, il existe $k \in \{1,2,\ldots,m\}$ tel que $y \in B(x_k, \eta_{x_k})$.
D'où, $d_n(x_k, y) < \eta_{x_k}$.
D'autre part,

$$d_n(x_k, z) \leq d_n(x_k, y) + d_n(y, z) \leq \eta_{x_k} + \eta \leq 2\eta_{x_k}.$$

Donc, on a

$$d_p[f(x_k), f(y)] < \frac{\varepsilon}{2} \text{ et } d_p[f(x_k), f(z)] < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Par conséquent,

$$d_p[f(y), f(z)] \leq d_p[f(x_k), f(y)] + d_p[f(x_k), f(z)] < \varepsilon.$$

D'où le résultat.