FONCTIONS DIFFERENTIABLES

CHAPITRE 3 :

Définition 1.1

Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$. On appelle application linéaire de E dans F, toute application L définie sur E à valeurs dans F vérifiant :

$$L(\lambda x+\mu y)=\lambda L(x)+\mu L(y)\,,\ \forall (x,y)\in E^2 \text{ et } (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2.$$

L'ensemble des applications linéaires de E dans F sera noté $\mathcal{L}(E,F)$.

Remarques 1.1

1. *On peut munir $\mathcal{L}(E,F)$ d'une structure d'espace vectoriel par les applications :*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathcal{L}(E,F)\times\mathcal{L}(E,F) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E,F) \\ & (L,L') & \mapsto & L+L' \end{array}$$

et $$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R}\times\mathcal{L}(E,F) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E,F) \\ & (\lambda,L') & \mapsto & \lambda L' \end{array}$$

Remarques (suite)

2. *Lorsque E et F sont des espaces vectoriels de dimensions finies (par exemple, $E = \mathbb{R}^n$ et $F = \mathbb{R}^p$), le choix d'une base sur chaque espace permet de représenter les applications linéaires par des matrices.*
3. *Lorsque E et F sont des espaces vectoriels normés, on peut définir une norme sur $\mathcal{L}(E, F)$, en posant*

$$\|L\| = \sup_{x \in E/\{0\}} \frac{\|L(x)\|_F}{\|x\|_E},$$

ce qui entraîne

$$\|L(x)\|_F \leq \|L\| \, \|x\|_E \, , \; \forall x \in E.$$

Par la suite, $\mathbb{R}^q$, $q \in \mathbb{N}^*$ sera muni d'une norme, notée, $\| \ \|_q$.

Proposition 1.1

Soit $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$. *Alors, il existe* $M > 0$ *tel que*

$$\|L(x)\|_p \leq M \|x\|_n$$

Corollaire 1.1

Toute application linéaire de $\mathbb{R}^n$ *dans* $\mathbb{R}^p$ *est uniformément continue.*

3.2 Applications différentiables

La théorie des fonctions différentiables a de multiples applications et joue un rôle essentiel en physique et tout particulièrement en thermodynamique. Son succès vient de ce qu'elle permet d'approcher plusieurs fonctions, au voisinage d'un point, par des fonctions linéaires ou affines.

Définition 2.1

Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$, $x_0 \in U$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^p$. On dit que f est **différentiable** *au point x_0 s'il existe $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ telle que*

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - L(h)}{\|h\|_n} = 0, \tag{1}$$

soit au voisinage de 0,

$$f(x_0+h) = f(x_0) + L(h) + \|h\|_n \, \varepsilon(x_0, h), \text{ avec } \lim_{h \longrightarrow 0} \varepsilon(x_0, h) = 0,$$

ou encore avec les notations de Landau

$$f(x_0+h) = f(x_0) + L(h) + o\,\|h\|_n$$

L'application linéaire L est appelée la **différentielle** *de f au point x_0 et on la note df_{x_0} ou $f'(x_0)$. Si f est différentiable en tout point x_0 de U, on dit que f est différentiable sur U.*

Remarques 2.1

1. *La différentielle df_{x_0} est une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ uniformément continue (voir : corollaire 1.1).*
2. *Les notions de fonctions différentiables restent inchangées si on remplace la norme $\| \ \|_n$ par une norme équivalente.*
3. *Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ est différentiable au point $x_0 \in U$, alors sa différentielle df_{x_0} est représentée par une matrice A à p lignes et n colonnes.*

$$A = \left(a_{ij}\right), \ 1 \leq i \leq p \text{ et } 1 \leq j \leq n$$

Remarques (suite)

Choisissons une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_n)$ *de* $\mathbb{R}^n$ *et une base* $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, ..., e'_n)$ *de* $\mathbb{R}^p$. *La matrice de* df_{x_0} *dans les bases* $\mathcal{B}$ *et* $\mathcal{B}'$ *est la matrice* $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ *notée* $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(df_{x_0})$ *(ou parfois* $\mathcal{M}(df_{x_0}, \mathcal{B}, \mathcal{B}')$*), dont la* $j^{\text{ème}}$ *colonne est constituée par les coordonnées du vecteur* $f(e_j)$ *dans la base* $\mathcal{B}'$, $1 \leq j \leq n$.

$$f(e_j) = a_{1j}e'_1 + a_{2j}e'_2 + \ldots + a_{pj}e'_p,$$

c'est-à-dire, si $a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{pj}$ *sont les coordonnées du vecteur* $f(e_j)$ *dans la base* $\mathcal{B}'$, *alors,*

$$A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(df_{x_0}) = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} f(e_1) & f(e_2) & & f(e_n) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e'_1 \\ e'_2 \\ \vdots \\ e'_p \end{array} \end{array}$$

Exemples 1

1. *Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}$, $x_0 \in U$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$.*
   Alors, f est différentiable en x_0 si et seulement si f est dérivable en x_0.
   Sa différentielle en x_0 est l'application

$$df_{x_0} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ h & \mapsto & df_{x_0}(h) = f'(x_0)\,h \end{array}$$

En effet,

$$\begin{aligned} f \text{ est dérivable en } x_0 &\iff \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) \\ &\iff \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - hf'(x_0)}{h} = 0 \\ &\Leftrightarrow f \text{ est différentiable en } x_0 \text{ et } df_{x_0}(h) = hf'(\end{aligned}$$

Exemples (suite)

2. *La fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(x,y) = xy$ est différentiable en $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ et sa différentielle en ce point est l'application*

$$df_{x_0} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (h,k) & \mapsto & hy_0 + kx_0. \end{array}$$

En effet, on a

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - df_{(x_0,y_0)}(h,k)}{\|(h,k)\|_2} \\ &= \frac{(x_0 + h)(y_0 + k) - x_0 y_0 - hy_0 - kx_0}{|h| + |k|} = \frac{hk}{|h| + |k|}. \end{aligned}$$

Donc,

$$|\alpha| \leq |h| \longrightarrow 0 \text{ quand } (h,k) \longrightarrow (0,0).$$

Exemples (suite)

3. *Toute application linéaire* $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ *est différentiable sur* $\mathbb{R}^n$ *et sa différentielle est elle même, càd,* $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $df_x = L$.
   En effet, $\forall (x,u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$,

   $$L(x+u) - L(x) - L(u) = 0.$$

   En particulier, les n *projections*

   $$p^{(i)} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) & \mapsto & x_i. \end{array}$$

   sont différentiables sur $\mathbb{R}^n$ *et*

   $$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\},\ \ dp_x^{(i)} = p_i.$$

Proposition 2.1

Avec les mêmes notations de la définition 2.1, il existe au plus une application linéaire $L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ *vérifiant (1).*

Preuve. Supposons qu'il existe deux applications linéaires L_1 et L_2 vérifiant (17) et notons $L = L_1 - L_2$. De la définition 2.1, on déduit que

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{L_1(h) - L_2(h)}{\|h\|_n} = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{L(h)}{\|h\|_n} = 0.$$

Donc,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \ \|h\|_n \leq \eta \Longrightarrow \|L(h)\|_p < \varepsilon \|h\|_n .$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^n / \{0\}$, le point $h = \eta \frac{x}{\|x\|_n}$ vérifie $\|h\|_n = \eta$. D'où,

$$\|L(h)\|_p \leq \varepsilon \|h\|_n = \varepsilon\eta.$$

D'autre part,

$$\|L(x)\|_p = \left\|L\left(\frac{\|x\|_n}{\eta}h\right)\right\|_p = \frac{\|x\|_n}{\eta}\|L(h)\|_p \leq \varepsilon\eta\frac{\|x\|_n}{\eta} = \varepsilon\|x\|_n .$$

Par suite,

$$\|L\| = \sup_{x\in\mathbb{R}^n/\{0\}} \frac{\|L(x)\|_p}{\|x\|_n} \leq \varepsilon.$$

Puisque est arbitraire, nous déduisons que $L = 0$ càd $L_1 = L_2$.

Proposition 2.2

Soit $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ et $x_0 \in \overset{0}{A}$. Si f est différentiable en x_0, alors f est continue en x_0.

Preuve. Supposons que f est différentiable en x_0. Donc, pour tout $h \in$A tel que $x_0 + h \in \overset{0}{\text{A}}$, on a

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = df_{x_0}(h) + o\,\|h\|\,.$$

Comme df_{x_0} est continue sur A et $df_{x_0}(0) = 0$, on déduit que

$$\sup_{h \longrightarrow 0} f(x_0 + h) = f(x_0)\,.$$

D'où la continuité de f en x_0. Il en résulte que si f est différentiable sur U, alors f est continue sur U.

Proposition 3.1

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $x_0 \in U$, f et g deux fonctions de U dans $\mathbb{R}^p$ différentiables en x_0, λ et μ deux réels. Alors, la fonction $\lambda f + \mu g$ est différentiable en x_0 et sa différentielle en ce point est :

$$d\left(\lambda f + \mu g\right)_{x_0} = \lambda df_{x_0} + \mu dg_{x_0}$$

Preuve. Soit h assez petit tel que $(x_0 + h) \in U$. Nous avons

$$\begin{aligned}
&\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{(\lambda f + \mu g)(x_0 + h) - (\lambda f + \mu g)(x_0) - (\lambda df_{x_0} + \mu dg_{x_0})(h)}{\|h\|_n} \\
= \quad & \lambda \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - df_{x_0}(h)}{\|h\|_n} \\
& \qquad + \mu \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{g(x_0 + h) - g(x_0) - dg_{x_0}(h)}{\|h\|_n} = 0.
\end{aligned}$$

Proposition 3.2

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $x_0 \in U$, f et g deux fonctions de U dans $\mathbb{R}$ différentiables en x_0. Alors, la fonction fg est différentiable en x_0 et sa différentielle en ce point est :

$$d\left(fg\right)_{x_0} = g\left(x_0\right) df_{x_0} + f\left(x_0\right) dg_{x_0}.$$

Preuve. Soit h assez petit tel que $(x_0 + h) \in U$. On a

$$\begin{aligned} f\left(x_0+h\right) &= f\left(x_0\right) + df_{x_0}\left(h\right) + \varepsilon\left(x_0,h\right) \|h\|_n \\ & \quad \text{avec} \lim_{h \longrightarrow 0} \varepsilon\left(x_0,h\right) = 0, \\ g\left(x_0+h\right) &= g\left(x_0\right) + dg_{x_0}\left(h\right) + \delta\left(x_0,h\right) \|h\|_n \\ & \quad \text{avec} \lim_{h \longrightarrow 0} \delta\left(x_0,h\right) = 0. \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
\tau &= f(x_0+h)\,g(x_0+h) - f(x_0)\,g(x_0) - f(x_0)\,dg_{x_0}(h) - g(x_0)\,df_{x_0}(h) \\
&= f(x_0)\,\delta(x_0,h)\,\|h\|_n + df_{x_0}(h)\,dg_{x_0}(h) + df_{x_0}(h)\,\delta(x_0,h)\,\|h\|_n \\
&\quad + \left[g(x_0) + dg_{x_0}(h) + \delta(x_0,h)\,\|h\|_n\right] \varepsilon(x_0,h)\,\|h\|_n = \zeta(x_0,h)\,\|h\|_n\,, \\
&= \zeta(x_0,h)\,\|h\|_n\,, \qquad (2)
\end{aligned}$$

où

$$\zeta(x_0,h) = f(x_0)\,\delta(x_0,h) + \frac{df_{x_0}(h)\,dg_{x_0}(h)}{\|h\|_n} + df_{x_0}(h)\,\delta(x_0,h)$$

$$+ \left[g(x_0) + dg_{x_0}(h) + \delta(x_0,h)\,\|h\|_n\right]. \quad (3)$$

On a

$$\lim_{h \longrightarrow 0} f(x_0)\,\delta(x_0,h) = \lim_{h \longrightarrow 0} df_{x_0}(h)\,\delta(x_0,h) \tag{4}$$

$$= \lim_{h \longrightarrow 0} \left[g(x_0) + dg_{x_0}(h) + \delta(x_0,h)\,\|h\|_n\right] = 0. \tag{5}$$

D'autre part, on a de la proposition 1.1,

$$\frac{\left|df_{x_0}(h)\,dg_{x_0}(h)\right|}{\|h\|_n} \leq M^2\,\|h\|_n \longrightarrow \text{ quand } h \longrightarrow 0.$$

En combinant (2), (3) et (4) nous obtenons

$$\begin{aligned} f(x_0+h)\,g(x_0+h) &= f(x_0)\,g(x_0) - \left[f(x_0)\,dg_{x_0}(h) + g(x_0)\,df_{x_0}(h)\right] \\ &\quad + \zeta(x_0,h)\,\|h\|_n\,, \end{aligned}$$

avec $\lim_{h \longrightarrow 0} \zeta(x_0,h) = 0$. D'où le résultat.

3.3.3 Différentielle du quotient

Proposition 3.3

Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$, $x_0 \in U$, f une fonction de U dans $\mathbb{R}$ différentiable en x_0 et telle que $f(x_0) \neq 0$. Alors, il existe un voisinage V de x_0 tel que f ne soit non nulle sur $U \cap V$. La fonction $\frac{1}{f}$ définie de $U \cap V$ dans $\mathbb{R}$ est différentiable en x_0 et sa différentielle est

$$d\left(\frac{1}{f}\right)_{x_0} = -\frac{1}{[f(x_0)]^2} df_{x_0}.$$

Preuve. Comme f est différentiable en x_0, alors, f est continue en x_0. Donc, il existe un voisinage V de x_0 tel que f ne s'annulle pas sur $U \cap V$. Soit h assez tel que $(x_0 + h) \in U \cap V$.

on a

$$
\begin{aligned}
\zeta(h) &= \frac{1}{f(x_0+h)} - \frac{1}{f(x_0)} + \frac{1}{[f(x_0)]^2} df_{x_0}(h) \\
&= \frac{[f(x_0)]^2 - f(x_0+h) f(x_0) + f(x_0+h) df_{x_0}(h)}{f(x_0+h)[f(x_0)]^2} \\
&= -f(x_0) \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{D} + \frac{f(x_0+h) df_{x_0}(h)}{D} \\
&= -f(x_0) \frac{df_{x_0}(h) + o\|h\|_n}{D} \\
&\qquad + \frac{f(x_0) + df_{x_0}(h) + o\|h\|_n}{D} df_{x_0}(h) \\
&= -f(x_0) \frac{o\|h\|_n}{D} + \frac{[df_{x_0}(h)]^2 + df_{x_0}(h)\, o\|h\|_n}{D},
\end{aligned}
$$

où $D = f(x_0+h)[f(x_0)]^2$.

Nous avons $\frac{-f(x_0)}{D}$ et $\frac{df_{x_0}(h)}{D}$ sont bornés.

Donc,

$$\lim_{h\longrightarrow 0}\frac{f\left(x_0\right)}{D}\frac{o\left\|h\right\|_n}{\left\|h\right\|_n}=\lim_{h\longrightarrow 0}\frac{df_{x_0}\left(h\right)}{D}\frac{o\left\|h\right\|_n}{\left\|h\right\|_n}=0.$$

D'autre part, en vertu de la proposition 1.1, $\left|df_{x_0}\left(h\right)\right|\leq M\left\|h\right\|_n$ et puisque $\frac{1}{D}$ set borné, on a $\lim\limits_{h\longrightarrow 0}\frac{\left[df_{x_0}(h)\right]^2}{D}=0$. Donc,

$$\lim_{h\longrightarrow 0}\left[\frac{1}{f\left(x_0+h\right)}-\frac{1}{f\left(x_0\right)}+\frac{1}{\left[f\left(x_0\right)\right]^2}df_{x_0}\left(h\right)\right]\frac{1}{\left\|h\right\|_n}=0.$$

D'où le résultat.

Remarque 3.1

En combinant les résultats des propositions 3.2 et 3.3, nous déduisons que si f et g sont différentiables en x_0 et si $g\left(x_0\right)\neq 0$, alors $\frac{f}{g}$ est différentiable en x_0 et on a

$$d\left(\frac{f}{g}\right)_{x_0}=-\frac{f\left(x_0\right)dg_{x_0}-g\left(x_0\right)df_{x_0}}{\left[f\left(x_0\right)\right]^2}.$$

Proposition 3.4

Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$, V un ouvert non vide de $\mathbb{R}^p$ $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^p$, $g : V \longrightarrow \mathbb{R}^q$. On suppose $f(U) \subset V$, f différentiable en $x_0 \in U$ et g différentiable en $y_0 = f(x_0) \in V$. Alors gof est différentiable en x_0 et on a

$$d(gof)_{x_0} = dg_{f(x_0)} o df_{x_0}.$$

Preuve. Soit h tel que $x_0 + h \in U$. Au voisinage de x_0, on a

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + df_{x_0}(h) + \varepsilon(x_0, h) \|h\|_n \quad \text{avec} \lim_{h \longrightarrow 0} \varepsilon(x_0, h) = 0.$$

Posons $k = df_{x_0}(h) + \varepsilon(x_0, h) \|h\|_n$.
On a $\lim\limits_{h \longrightarrow 0} k = 0$. Donc, au voisinage de y_0, on a

$$\begin{aligned} g(y_0 + k) &= g[f(x_0) + k] = g[f(x_0 + h)] \\ &= g(y_0) + dg_{y_0}(k) + \theta(y_0, k) \|k\|_p \quad \text{avec} \lim_{h \longrightarrow 0} \theta(y_0, k) = 0. \end{aligned}$$

Donc,

$$gof\,(x_0+h) = gof\,(x_0) + dg_{y_0}\,(df_{x_0}\,(h)) + dg_{y_0}\,[\varepsilon\,(x_0,h)]\,\|h\|_n + \theta\,(y_0,k)\,\|k\|_p$$

Or,

$$\frac{\|k\|_p}{\|h\|_n} = \frac{\|df_{x_0}\,(h) + \varepsilon\,(x_0,h)\,\|h\|_n\|_p}{\|h\|_n} \leq |\varepsilon\,(x_0,h)| + \frac{\|df_{x_0}\,(h)\|_p}{\|h\|_n}.$$

Il existe $U_1 \in \mathcal{V}\,(x_0)$ et $M > 0$ tel que $x_0 + h \in U_1$ et $\|k\|_p \leq M\,\|h\|_n$.
D'où

$$\frac{gof\,(x_0+h) - gof\,(x_0) - dg_{f(x_0)}\,[df_{x_0}\,(h)]}{\|h\|_n} = dg_{y_0}\,[\varepsilon\,(x_0,h)] + \frac{\theta\,(y_0,k)\,\|k\|_p}{\|h\|_n}$$

Qui tend vers 0 lorsque h tend vers 0

Proposition 3.5

Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^p$.
Pour que f soit différentiable au point x_0 (resp. sur U), il faut et il suffit, que les p composantes $f_1, f_2, \ldots, f_p$ de f soit différentiables au point x_0 (resp. sur U) et pour tout $h = (h_1, h_2, \ldots, h_n)$ de $\mathbb{R}^n$, on a

$$df_{x_0} = \left(d\left(f_1\right)_{x_0}.h, \ldots, d\left(f_p\right)_{x_0}.h \right).$$

Preuve.

$\Longrightarrow$) Supposons que f est différentiable en x_0. Comme les projections p_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, sont différentiables, en vertu de la propsition 3.3.4.1, por tout $i = 1, 2, \ldots, n$, la fonction $f_i = p_i o f$ est différentiable en x_0 et ona

$$d\left(f_i\right)_{x_0} = d\left(p_i\right)_{f(x_0)} o df_{x_0} = p_i o df_{x_0} = dx_i o df_{x_0},$$

avec $dx_i = p_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

$\Longleftarrow$) Supposons que pour tout $i = 1, 2, \ldots, n$, $f_i = p_i o f$ est différentiable en x_0. Pour tout $h \in \mathbb{R}^n$, notons $A_f.h$ le vecteur $\mathbb{R}^p$ de composantes $\left(d\left(f_1\right)_{x_0}.h, \ldots, d\left(f_p\right)_{x_0}.h\right)$. Le vecteur

$$\frac{f\left(x_0 + h\right) - f\left(x_0\right) - A_f.h}{\|h\|_n}$$

a pour composantes

$$B_f^{(i)}.h = \frac{f_i\left(x_0 + h\right) - f_i\left(x_0\right) - d\left(f_i\right)_{x_0}.h}{\|h\|_n}, \ i = 1, 2, \ldots, p.$$

Pour tout $i = 1, 2, \ldots, p$, $\lim\limits_{h \longrightarrow 0} B_f^{(i)}.h = 0$.

Donc, $\lim\limits_{h \longrightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - A_f.h}{\|h\|_n} = 0$.

D'où f est différentiable en x_0 et sa différentielle en ce poine est

$$df_{x_0} = A_f.h.$$

3.3.5 Différentielle d'une application réciproque

Définition 3.1

Soient U et V deux parties de $\mathbb{R}^n$. On appelle **homéomorphisme** *de U sur V, toute application de U dans V bijective et continue dont la réciproque est continue. Si une telle bijection existe, on dit que U et V sont* **homéomorphes**.

Proposition 3.6

Soit f est un homéomorphisme d'un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ contenenant x_0 sur un ouvert V de $\mathbb{R}^n$ contenenant $f(x_0)$. Si f est différentiable en x_0 et si sa différentielle df_{x_0} est une bijection de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^n$, alors l'application réciproque $g = f^{-1}$ est différentiable en $y_0 = f(x_0)$ et sa différentielle est donnée par :

$$dg_{y_0} = d\left(f^{-1}\right)_{f(x_0)} = (df_{x_0})^{-1}.$$

Preuve.

On va se ramener au cas $x_0 = y_0 = 0$.Considérons les applications

$$\begin{array}{rcl} f_0 : \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ u & \mapsto & f(x_0+u) - f(x_0) \end{array}$$

et $\begin{array}{rcl} g_0 : \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ v & \mapsto & g(y_0+v) - g(y_0) = g(y_0+v) - x_0 \end{array}$.

On a $f_0(0) = g_0(0) = 0$. Puisque f est un homéomorphisme d'un voisinage ouvert U de x_0 sur un voisinage ouvert V de $y_0 = f(x_0)$, alors f est un homéomorphisme d'un voisinage ouvert U_0 de 0 sur un voisinage ouvert V_0 de 0. Pour tout $u \in U_0$, on a

$$f_0(u) = f(x_0+u) - f(x_0) = df_{x_0}.u + \|u\|_n \varepsilon(x_0, u) \text{ avec } \lim_{u \longrightarrow 0} \varepsilon(x_0, u) = 0.$$

Posons

$$A = \left(df_{x_0}\right)^{-1} \quad \text{et } \alpha = \|A\| > 0.$$

Soit $v \in V_0$ et $u = g_0(v) = g[f(x_0) + v] - x_0$; on a

$$\begin{aligned}
g[f(x_0)+v] - g(x_0) - A.v &= g[f(x_0)+v] - x_0 - A.v = h - A.v \\
&= h - A[f(x_0+u) - f(x_0)] \\
&= h - A[df_{x_0}.u + \|u\|_n \varepsilon(x_0,u)] \\
&= -A.\|u\|_n \varepsilon(x_0,u) = -\|u\|_n A.\varepsilon(x_0,u).
\end{aligned}$$

Donc,

$$\frac{\|g[f(x_0)+v] - g(x_0) - A.v\|_n}{\|v\|_n} = \frac{\|u\|_n}{\|v\|_n}\|A.\varepsilon(x_0,u)\|_n \tag{6}$$

f différentiable en $x_0 \Longrightarrow \exists\lambda > 0,\ \|u\|_n < \lambda \Longrightarrow \|\varepsilon(x_0,u)\|_n < \frac{1}{2\alpha}$.
g_0 continue en $0 \Longrightarrow \exists\mu > 0,\ \|v\|_n < \mu \Longrightarrow \|g_0(v)\|_n = \|u\|_n < \alpha$.

Donc, pour $\|v\|_n < \mu$, on a

$$\begin{array}{rcl} \|A.v\|_n & = & \|A.[f(x_0+u) - f(x_0)]\|_n \\ & = & \|A.[df_{x_0}.u + \|u\|_n \varepsilon(x_0,u)]\|_n \\ & = & \|u + \|u\|_n A.\varepsilon(x_0,u)\|_n \\ & \geq & |\|u\|_n - \|u\|_n \|A.\varepsilon(x_0,u)\|_n| \\ & > & \dfrac{1}{2}\|u\|_n \end{array}$$

car

$$\|A.\varepsilon(x_0,u)\|_n \leq \|A\| \|\varepsilon(x_0,u)\|_n < \frac{1}{2}.$$

Par suite, si $\|v\|_n < \mu$, on a

$$\frac{1}{2}\|u\| \leq \|A.v\|_n \leq \|A\| \|v\|_n .$$

Donc,

$$\frac{\|u\|}{\|v\|_n} \leq 2\|A\| \tag{7}$$

En combinant (6) et (7), nous obtenons

$$\frac{\left\| g\left[f\left(x_0 \right) + v \right] - g\left[f\left(x_0 \right) \right] - A.v \right\|_n}{\left\| v \right\|_n} \leq 2\alpha^2 \left\| \varepsilon\left(x_0, u \right) \right\|_n .$$

Et puisque

$$\lim_{v \longrightarrow 0} \varepsilon\left(x_0, u \right) = \lim_{u \longrightarrow 0} \varepsilon\left(x_0, u \right) = 0,$$

on déduit que

$$\lim_{v \longrightarrow 0} \frac{g\left[f\left(x_0 \right) + v \right] - g\left[f\left(x_0 \right) \right] - A.v}{\left\| v \right\|_n} = 0.$$

Par conséquent,

$$dg_{y_0} = dg_{f(x_0)} = A = \left(df_{x_0} \right)^{-1} .$$

Définition 4.1

Soient : U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in U$, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^p$ et $i \in \{1, 2, \ldots, p\}$. On dit que f admet une **dérivée partielle première** *au point a par rapport à x_i si la limite suivante existe*

$$\lim_{t \longrightarrow 0} \frac{f(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, a_i + t, a_{i+1}, \ldots, a_n) - f(a_1, a_2, \ldots, a_n)}{t}.$$

et on la note $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ ou $D_i f(a)$.

Remarques 4.1

1. *La dérivée partielle est aussi une fonction de* $\mathbb{R}^n$ *dans* $\mathbb{R}^p$. *Ainsi, si* $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n)$$

correspond à la fonction dérivée partielle première de f $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ *par rapport à la* $i^{\text{ème}}$ *variable* x_i *au point* x.

2. *Si on désigne par* $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ *la base canonique de* $\mathbb{R}^n$, *la dérivée partielle première de* f *par rapport à la* $i^{\text{ème}}$ *variable* x_i *au point* a *peut s'écrire*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = D_i f(a) = \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{f(a + te_i) - f(a)}{t}$$

3. *Lorsque* $n = 1$, *la notion de dérivée partielle première coincide avec la notion de dérivée classique.*

En utilisant des résultats sur les limites, on déduit facilement les résultats suivants.

Proposition 4.1

Soient : U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in U$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^p$. Pour que f ait une dérivée partielle par rapport à x_i au point a, il faut et il suffit, que les p composantes $f_1, \ldots, f_p$ de f aient une dérivée partielle par rapport à x_i au point a et on a

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(a), \frac{\partial f_2}{\partial x_i}(a), \ldots, \frac{\partial f_p}{\partial x_i}(a) \right).$$

Proposition 4.2

Soient : U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in U$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^p$ différentiable au point $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$.
Alors, la fonction f admet au point a des dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$, $i = 1, \ldots, n$, et on a pour tout $u = (u_1, \ldots, u_n)$

$$df_a.u = \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a).$$

Preuve.

Par hypothèse, il existe une application linéaire df_a de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ telle que pour tout $u \in \mathcal{V}(0)$ et $a+u \in U$, on ait

$$f(a+u) - f(a) = df_a.u + \|u\|_n \varepsilon(a,u) \quad \text{avec} \lim_{u \longrightarrow 0} \varepsilon(a,u) = 0.$$

En particulier, pour $u = te_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, on a $\|u\|_n = |t|$ et

$$f(a+te_i) - f(a) = df_a.te_i + |t| \varepsilon(a, te_i) \quad \text{avec} \lim_{t \longrightarrow 0} \varepsilon(a, te_i) = 0.$$

Donc, $\lim\limits_{t \longrightarrow 0} \frac{f(a+te_i)-f(a)}{t} = df_a.e_i \in \mathbb{R}^p$.

Par conséquent, $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = df_a.e_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$

et

$$\begin{aligned} df_a.u &= df_a.\left(u_1, u_2, \ldots, u_n\right) = df_a.\left(\sum_{i=1}^{n} u_i e_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} u_i df_a.e_i = \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\left(a\right) \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial f_1}{\partial x_i}\left(a\right), \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial f_2}{\partial x_i}\left(a\right), \ldots, \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial f_n}{\partial x_i}\left(a\right)\right) \in \mathbb{R}^p \end{aligned}$$

Remarques 4.2

1. *Si $p = 1$ càd f est une fonction numérique, on a*

$$\begin{aligned} df_a.u &= df_a.\left(u_1, u_2, \ldots, u_n\right) = df_a.\left(\sum_{i=1}^{n} u_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\, dx_i(u) = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\, dx_i\right).u, \end{aligned}$$

où

$$\begin{array}{rcl} dx_i : \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ u = \left(u_1, u_2, \ldots, u_n\right) & \mapsto & dx_i(u) = u_i. \end{array}$$

D'où,

$$df_a = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\, dx_i.$$

Donc, df_a est une combinaison linéaire dans $\mathcal{L}_c\left(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}\right)$ des applications linéaires dx_i, $i = 1, 2, \ldots, n$.
Les coefficients sont les réels $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Remarques (suite)

2. *La réciproque de la proposition 4.2 est fausse càd, l'existance des n dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$, $i = 1, \dots, n$, ne suffit pas pour assurer la différentiabilité de f au point a.*

Par exemple, la fonction f définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Pour tout $x \neq 0$ et $y \neq 0$, on a

$$f(x,0) = f(0,y) = 0.$$

Donc,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$

Si f est différentiable en $(0,0)$, sa différentielle en ce point serait nulle et donc (en choisissant la norme euclidienne), on obtient

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)}{\|(x,y)\|} = \frac{xy}{x^2+y^2} = 0,$$

ce qui ne l'ait pas. Donc, f n'est pas différentiable en $(0,0)$.

La proposition suivante donne une condition suffisante pour qu'une fonction soit différentiable en un point.

Proposition 4.3

Soient : U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$, $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in U$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^p$. Si f admet sur U des dérivée partielles par rapport à chacune de ses variables et que ses dérivées sont continues au point a, alors f est différentiable au point a et on a :

$$df_a.u = df_a.(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a).$$

Preuve. Soit u assez petit tel que $a + u \in U$. On a

$$\begin{aligned}
f(a+u) - f(a) &= f(a_1+u_1, a_2+u_2, \ldots, a_n+u_n) - f(a_1, \ldots, a_n) \\
&= f(a_1+u_1, \ldots, a_n+u_n) - f(a_1, a_2+u_2, \ldots, a_n+u_n) \\
&+ f(a_1, a_2+u_2, \ldots, a_n+u_n) - f(a_1, a_2, a_3+u_3, \ldots, a_n+u_n) \\
&\quad \vdots \\
&+ f(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n+u_n) - f(a_1, \ldots, a_n) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \Delta(i, u),
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}\Delta(i,u) &= f(a_1,a_2,\ldots,a_{i-1},a_i+u_i,a_{i+1}+u_{i+1},\ldots,a_n+u_n) \\ &\qquad -f(a_1,a_2,\ldots,a_{i-1},a_i,a_{i+1}+u_{i+1},\ldots,a_n+u_n) \\ &= f\left(a+\sum_{k\geq i}u_ke_k\right)-f\left(a+\sum_{k>i}u_ke_k\right).\end{aligned}$$

Pour chaque $i\in\{1,\ldots,n\}$, la fonction

$$x_j\mapsto f(a_1,a_2,\ldots,a_{i-1},x_i,a_{i+1}+u_{i+1},\ldots,a_n+u_n),$$

est dérivable sur l'intervalle d'extrémités a_i et a_i+u_i. Donc, en vertu du T.A.F., il existe $\theta_i\in]0,1[$ tel que

$$\begin{aligned}\Delta(i,u) &= f\left(a+\sum_{k\geq i}u_ke_k\right)-f\left(a+\sum_{k>i}u_ke_k\right) \\ &= u_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1,a_2,\ldots,a_{i-1},a_i+\theta_iu_i,a_{i+1}+u_{i+1},\ldots,a_n+u_n).\end{aligned}$$

Puisque les fonctions $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ sont continues au point a, on peut écrire

$$\Delta(i,u) = u_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + u_i \varepsilon_i(u) \text{ avec } \lim_{u \longrightarrow 0} \varepsilon_i(u) = 0.$$

Donc,

$$f(a+u) - f(a) = \sum_{i=1}^{n} \Delta(i,u) = \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + \sum_{i=1}^{n} u_i \varepsilon_i(u).$$

D'où

$$
\begin{aligned}
\frac{\left\| f(a+u) - f(a) - \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \right\|_p}{\|u\|_n} &= \frac{\left\| \sum_{i=1}^{n} u_i \varepsilon_i(u) \right\|_p}{\|u\|_n} \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} |u_i| \frac{\left\| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i(u) \right\|_p}{\|u\|_n} \\
&\leq \sup_{i=1,2,\ldots,n} \|\varepsilon_i(u)\|_p \frac{\sum_{i=1}^{n} |u_i|}{\|u\|_n} \\
&\leq \text{const} \sup_{i=1,2,\ldots,n} \|\varepsilon_i(u)\|_p \longrightarrow 0
\end{aligned}
$$

quand $u \longrightarrow 0$.

Donc, f est différentiable au point a et df_a est l'application qui à tout $u \in \mathbb{R}^n$ associe $\sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$.

Remarque 4.3

La continuité des dérivées partielles n'est pas nécessaire pour qu'une fonction soit différentiable.

Soit la fonctionnumérique définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

On a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$

Si $(x,y) \neq (0,0)$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 2x\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 2y\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right). \end{aligned}$$

Les fonctions $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ ne sont pas continues en $(0,0)$ car sur la direction $y = x > 0$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,x) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\left(\frac{1}{x\sqrt{2}}\right)$$

et cette quantité n'admet pas de limite au point $(0,0)$. Cependant, f est différentiable en $(0,0)$ et on a

$$\begin{aligned} \frac{\|f(x,y) - f(0,0)\|_2}{\|(x,y)\|_2} &= \sqrt{x^2+y^2}\left|\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\right| \\ &\leq \text{const}\sqrt{x^2+y^2} \text{ quand } (x,y) \longrightarrow (0,0). \end{aligned}$$

Soient : U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$, $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in U$
et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^p$ différentiable au point a.
Soient $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $(e'_i)_{1 \leq i \leq p}$ les bases canoniques de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$.
L'application linéaire df_a est déterminée par la donnée de sa matrice dans les bases (e_i) et (e'_i). Le $i^{\text{ème}}$ vecteur colonne colonne qui représente df_a est

$$df_a.e_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(a), \frac{\partial f_2}{\partial x_i}(a), \ldots, \frac{\partial f_p}{\partial x_i}(a) \right), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Définition 4.2

La matrice

$$\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a)\right)_{\substack{1\leq j\leq n\\ i\leq i\leq p}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix},$$

est appelée **matrice jacobienne** *de f au point a et on la note $J_f(a)$.*
Lorsque $n = p$, le déterminant de cette matrice est appelé le jacobien de f au point a et on le note $\frac{D(f_1,\dots,f_p)}{D(x_1,\dots,x_p)}(a)$ ou $\frac{\partial(f_1,\dots,f_p)}{\partial(x_1,\dots,x_p)}(a)$.

Remarque 4.4

1. *Pour tout* $u = (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n$*, on a*

$$(df_a.u)^t = J_f(a).u^t = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(a) & \ldots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}.$$

2. *Soit* U *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$*,* V *un ouvert de* $\mathbb{R}^p$*,* $a \in U$*,* $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^p$ *et* $f : V \longrightarrow \mathbb{R}^q$*. Si* $f(U) \subset V$*,* f *différentiable au point* a *et* g *différentiable au point* $f(a)$*, alors* gof *est différentiable au point* a *et on a*

$$J_{gof}(a) = J_g(f(a)) \times J_f(a)$$

3. *L'application* df_a *est une bijection de* $\mathbb{R}^n$ *sur* $\mathbb{R}^n$ *si et seulement si*

$$\frac{D(f_1, \ldots, f_p)}{D(x_1, \ldots, x_p)}(a) \neq 0.$$

Remarque (suite)

4. *Sous les mêmes conditions de la proposition 3.6, on a*
$$J_{f^{-1}}\left(f\left(a\right)\right)=\left[J_f\left(a\right)\right]^{-1}.$$

Exemples 2

1. *Soit* f *la fonction de* $\mathbb{R}^3$ *dans* $\mathbb{R}^3$ *définie par :*

$$\begin{aligned} f\left(r,\theta,\varphi\right) &= \left(x\left(r,\theta,\varphi\right),y\left(r,\theta,\varphi\right),z\left(r,\theta,\varphi\right)\right) \\ &= \left(r\cos\theta\cos\varphi, r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\varphi\right). \end{aligned}$$

On a
$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial r} &= \cos\theta\cos\varphi, \quad \frac{\partial x}{\partial\theta}=-r\sin\theta\cos\varphi, \quad \frac{\partial x}{\partial\varphi}=-r\cos\theta\sin\varphi; \\ \frac{\partial y}{\partial r} &= \sin\theta\cos\varphi, \quad \frac{\partial y}{\partial\theta}=r\cos\theta\cos\varphi, \quad \frac{\partial y}{\partial\varphi}=-r\sin\theta\sin\varphi; \\ \frac{\partial z}{\partial r} &= \sin\varphi, \quad \frac{\partial z}{\partial\theta}=0, \quad \frac{\partial z}{\partial\varphi}=r\cos\varphi; \end{aligned}$$

Exemples (suite)

$$Donc \quad J_{(r,\theta,\varphi)}(f) = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\cos\varphi & -r\cos\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\varphi & 0 & r\cos\varphi \end{pmatrix}$$

Le jacobien de f est

$$\frac{\partial(f_1, f_2, f_3)}{\partial(r, \theta, \varphi)} = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \varphi)} =$$

2. *Dérivées partielles d'une fonction composée.*
   Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ une fonction différentiable en $a \in U$ et $g : V \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^q$ tq $f(U) \subset V$ et différentiable en $f(a) = b$. Posons $h = gof$. On a

$$J_a(h) = J_a(gof) = J_{f(a)}(g) \times J_a(f),$$

Exemples (suite)

avec

$$J_a(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}. = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le p \\ 1\le j\le n}} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right)_{\substack{1\le i\le p \\ 1\le j\le n}}$$

$$J_{f(a)}(g) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(b) & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial y_p}(b) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial g_q}{\partial y_1}(b) & \dots & \frac{\partial g_q}{\partial y_q}(b) \end{pmatrix} = (b_{ij})_{\substack{1\le i\le q \\ 1\le j\le p}} = \left(\frac{\partial g_i}{\partial y_j}(b)\right)_{\substack{1\le i\le q \\ 1\le j\le p}}$$

D'où,

$$J_a(h) = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial h_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial h_q}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial h_q}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix} = (c_{ij})_{\substack{1\le i\le q \\ 1\le j\le n}} = \left(\frac{\partial h_i}{\partial x_j}(a)\right)_{\substack{1\le i\le q \\ 1\le j\le n}} .$$

Exemples (suite)

$$c_{ij} = \frac{\partial h_i}{\partial x_j}(a) = \sum_{k=1}^{p} b_{ik} a_{kj} = \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial g_i}{\partial y_k}(b) \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(a).$$

Ainsi par exemple, si

$$f \quad : \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (r,\theta) & \longmapsto & (r\cos\theta, r\sin\theta) \end{array} ; \quad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x^2+y^2 \end{array}$$

$$h \quad = \quad gof. : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (r,\theta) & \longmapsto & h(r,\theta) = g[f(\theta)] = r^2 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial r}(r,\theta) &= \frac{\partial g}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta)\frac{\partial f_1}{\partial r}(r,\theta) + \frac{\partial g}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)\frac{\partial f_2}{\partial r}(r,\theta) \\ &= \cos\theta\frac{\partial g}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + \sin\theta\frac{\partial g}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta) \\ &= 2r\cos^2\theta + 2r\sin^2\theta = 2r \end{aligned}$$

Exemples (suite)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h}{\partial \theta}(r,\theta) &= \frac{\partial g}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta)\frac{\partial f_1}{\partial \theta}(r,\theta) + \frac{\partial g}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)\frac{\partial f_2}{\partial \theta}(r,\theta) \\
&= -r\sin\theta\frac{\partial g}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + r\cos\theta\frac{\partial g}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta) \\
&= -2r^2\sin\theta\cos\theta + 2r^2\sin\theta\cos\theta = 0.
\end{aligned}$$

On retrouve facilement le résultat en explicitant $h((r,\theta))\, gof\,(r,\theta)$

Définition 5.1

Soit U *un ouvert non vide de* $\mathbb{R}^n$, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^p$ *et* X *un vecteur de* $\mathbb{R}^n$.
On dit que f *admet une dérivée au point* $a \in U$ *suivant le vecteur* X *si la fonction de la variable réelle*

$$\varphi : t \mapsto \frac{f(a+tX) - f(a)}{t},$$

admet une limite quand $t \longrightarrow 0$.
Lorsque cette limite existe, on la note $D_X f(a)$.

Remarque 5.1

1. *La dérivée suivant tout vecteur nul est nulle.*
2. *Si* f *admet une dérivée partielle par rappor à la* $i^{\text{ème}}$ *variable au point* $a \in U$, *alors* f *admet au point* a *une dérivée suivant le vecteur* e_i *et on a* $D_{e_i} f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = D_i f(a)$.

Remarque (suite)

3. *Si f est différentiable au point a, alors f admet au point a une dérivée suivant tout vecteur X et on a $D_X f(a) = df_a.X$.*
   En effet, pour u dans un voisinage de 0, on a

$$f(a+u) - f(u) = df_a.u + \|u\|_n \varepsilon(a,u) \text{ avec } \lim_{u \longrightarrow 0} \varepsilon(a,u) = 0.$$

D'où, pour $u = tX$ avec $t \longrightarrow 0$, on a

$$f(a+tx) - f(u) = df_a.tX + |t| \, \|X\|_n \varepsilon(a,tX) \text{ avec } \lim_{t \longrightarrow 0} \varepsilon(a,tX) = 0.$$

Donc,

$$\lim_{t \longrightarrow 0} \frac{f(a+tX) - f(a)}{t} = df_a.X$$

Remarque (suite)

4. *Une fonction peut admettre des dérivées suivant tout vecteur en un point sans qu'elle soit différentiable en ce point.*
   Considérons la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ *par :*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Soit $X = (\alpha, \beta)$ *un vecteur de* $\mathbb{R}^2$ *et soit* $t \neq 0$. *On peut supposer que* $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$ *car la dérivée suivant tout vecteur nul est nulle. On a*

$$\begin{aligned} \frac{f[(0,0) + t(\alpha,\beta)] - f((0,0))}{t} &= \frac{f[t(\alpha,\beta)]}{t} = \frac{f[t\alpha, t\beta]}{t} \\ &= \frac{t^3\alpha^2\beta}{t^3(t^2\alpha^4 + \beta^2)} = \frac{\alpha^2\beta}{t^2\alpha^4+\beta^2}. \end{aligned}$$

Remarque (suite)

D'où,

$$D_X f\,(0,0) = \begin{cases} 0 & \textit{si} \quad \beta = 0, \\ \frac{\alpha^2}{\beta} & \textit{si} \quad \beta \neq 0. \end{cases}$$

Donc, f admet une dérivée suivant tout vecteur $X = (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Cependant, f n'est pas différentiable en $(0,0)$ car elle n'est même pas continue en $(0,0)$. On a

$$f\,(x,x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \textit{si} \quad x \neq 0, \\ 0 & \textit{si} \quad x \neq 0. \end{cases}$$

Définition 6.1

Soit U *un ouvert non vide de* $\mathbb{R}^n$, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^p$ *admettant sur* U *des dérivées partielles par rapport à chacune de ses variables. Pour chaque* $i = 1, 2 \ldots, n$, *on a donc une fonction*

$$D_i f = \frac{\partial f}{\partial x_i} : U \longrightarrow \mathbb{R}^p$$
$$x \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$$

La fonction $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ *peut avoir une dérivée seconde par rapport à* x_j *en un point* $a \in U$ *ou sur* U. *On note* $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$ *ou* $D_{ji} f(a)$ *ou* $f''_{x_i x_j}(a)$ *la dérivée partielle par rapport à* x_j *au point* a *de la fonction* $\frac{\partial f}{\partial x_i}$.

Les fonctions $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ *sont appelées dérivées partielles d'ordre* 2 *de* f.

Les fonctions $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}$ *seront notées* $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$.

Définition (suite)

Par récurrence, on définit les dérivées partielles d'ordre p de f par :

$$\frac{\partial^p f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_p}}(x) = \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \left(\frac{\partial^p f}{\partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_p}} \right)$$

qu'on note aussi $D_{i_1 i_2 \ldots i_p} f(x)$ ou $f^{(p)}_{x_{i_p} x_{i_{p-1}} \ldots x_{i1}}(x)$.

Remarque 6.1

Une fonction peut avoir n dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_i}$,
n^2 dérivées partielles d'ordre 2 $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$.
En général, une fonction peut avoir n^p dérivées partielles d'ordre p en un point a $\frac{\partial^p f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_p}}(a)$ obtenues en donnant aux indices $i_1, i_2, \ldots, i_p$ toutes les valeurs possibles de 1 à n.

Définition 6.2

Une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ est dite de classe C^k sur U si f admet toutes les dérivées partielles d'ordre k sur U et que celles-ci sont continues sur U. f est dite de classe C^∞ sur U si f admet des dérivées partielles continues de n'importe quel ordre.

Application

1. Tout polynôme $P(x_1, x_2, \ldots x_n)$ à n indétyerminées est classe C^∞ sur $\mathbb{R}^n$.
2. $f = \frac{P(x_1,x_2,\ldots x_n)}{Q(x_1,x_2,\ldots x_n)}$ une fraction rationnelle à n indéterminées.
   Soit $D \subset \mathbb{R}^n$ son domaine de définition.
   Alors la fonction

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{f} : D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x = (x_1, x_2, \ldots x_n) & \longmapsto & f(x) = \frac{P(x_1,x_2,\ldots x_n)}{Q(x_1,x_2,\ldots x_n)} \end{array}$$

   est de classe C^∞ sur D.

Théorème 6.1 (Théorème de Schwartz)

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ *admettant des dérivées partielles* $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ *et* $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ *continues au point* a. *Alors, on a*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) .$$

Preuve. Il suffit de démontrer le résultat pour $n = 2$.
Soit $V \in \mathcal{V}(0,0)$ et $(h,k) \in V$ tel que $(a+h, b+k) \in U$.
Considérons la fonction Δ définie sur V par :

$$\Delta(h,k) = f(a+h, b+k) - f(a, b+k) - f(a+h, b) + f(a,b) .$$

Pour k fixé, considérons la fonction φ définie sur une partie de $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi(x) = f(x, b+k) - f(x,b) .$$

Nous avons

$$\Delta(h,k) = \varphi(a+h) - \varphi(a).$$

La fonction φ est dérivable entre a et $a+h$ et

$$\varphi'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, b+k) - \frac{\partial f}{\partial x}(x, b).$$

D'autre part, en vertu du théorème des accroissements finis, il existe $\theta_1 \in]0,1[$ tel que

$$\varphi(a+h) - \varphi(a) = h\varphi'(a+\theta_1 h),$$

càd,

$$\Delta(h,k) = h\left[\frac{\partial f}{\partial x}(a+\theta_1 h, b+k) - \frac{\partial f}{\partial x}(a+\theta_1 h, b)\right].$$

La fonction ψ définie sur une partie de $\mathbb{R}$ par :

$$\psi(y) = \frac{\partial f}{\partial x}(a+\theta_1 h, y)$$

est dérivable entre b et $b+k$.

En appliquant encore le théorème des accroissements finis entre b et $b+k$, nous déduisons l'existances de $\theta_2 \in]0,1[$ tel que

$$\psi(b+k) - \psi(b) = h\psi'(b+\theta_2 k),$$

càd,

$$\Delta(h,k) = hk\left[\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a+\theta_1 h, b+\theta_2 k)\right].$$

Donc,

$$\lim_{(h,k)\longrightarrow(0,0)} \frac{\Delta(h,k)}{hk} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b). \tag{8}$$

Pour h fixé, considérons la fonction φ_1 définie sur une partie de $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi_1(x) = f(a+h, y) - f(a, y)$$

Nous avons

$$\Delta(h,k) = \varphi_1(b+k) - \varphi_1(b).$$

En procédant de la même manière que précedemment, nous obtenons

$$\lim_{(h,k)\longrightarrow(0,0)} \frac{\Delta(h,k)}{hk} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b). \tag{9}$$

En comparant (8) et (9), on déduit que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b).$$

Remarque 6.2

1. *Si les fonctions* $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ *et* $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ *existent au point* (a,b) *et ne sont pas continues, on peut avoir* $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b)$.
   Considérons la fonction f *définie sur* $\mathbb{R}^2$ *par :*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

   On a $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1 \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = -1.$

2. *Si* f *est de classe* C^k, *on peut changer l'ordre de dérivation relativement aux différentes variables.*
   En particulier, on peut regrouper les dérivations relatives à une même variable et on utilisera les notations

$$\frac{\partial^k f(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial^{\alpha_n} x_n} \quad \text{ou } D^{\alpha_1} \ldots D^{\alpha_n} \quad \text{avec } \alpha_1 + \ldots + \alpha_n = k.$$

Définition 7.1

Soit x et y deux éléments de $\mathbb{R}^n$. On appelle segment d'extrémités x et y, l'ensemble

$$[x,y] = \{z \in \mathbb{R}^n / z = tx + (1-t)\,y, t \in [0,1]\}\,.$$

Lemme 7.1

Soit $I = [\alpha, \beta]$ un compact de $\mathbb{R}$, f une fonction continue de I dans $\mathbb{R}^p$ et g une fonction continue de I dans $\mathbb{R}$. n suppose que f et g possèdent des dérivées à droite vérifiant

$$\left\|f'_d(t)\right\|_p \leq g'_d(t)\,, \quad \forall t \in I.$$

Alors,

$$\|f(\beta) - f(\alpha)\|_p \leq g(\beta) - g(\alpha)\,.$$

Preuve.

Soit $\varepsilon > 0$ et considérons l'ensemble

$$I(\varepsilon) = \left\{ t \in I / \; \|f(t) - f(\alpha)\|_p \leq g(t) - g(\alpha) + \varepsilon (t - \alpha) \right\}.$$

$\alpha \in I(\varepsilon)$ entraîne que $I(\varepsilon) \neq \emptyset$. $I(\varepsilon) \subset I$, donc, $I(\varepsilon)$ est borné. D'où $\sup I(\varepsilon)$ existe. Posons $M = \sup I(\varepsilon)$ et montrons que $M \in I(\varepsilon)$. Soit (t_n) une suite de $I(\varepsilon)$ qui converge vers vers M. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\|f(t_n) - f(\alpha)\|_p \leq g(t_n) - g(\alpha) + \varepsilon (t_n - \alpha).$$

Comme f et g sont continues, par passage à la limite, nous déduisons que

$$\|f(M) - f(\alpha)\|_p \leq g(M) - g(\alpha) + \varepsilon (M - \alpha).$$

Donc, $M \in I(\varepsilon)$. Montron smaintenant que $M = \beta$. Supposons que $M < \beta$. Comme f et g sont dérivables à droite au point M, alors, il existe $h > 0$ tel que pour $M < t < M + h$, on ait à la fois

$$\left\| \frac{f(t) - f(M)}{t - m} - f'_d(M) \right\|_p \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad \left| \frac{g(t) - g(M)}{t - m} - g'_d(M) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}\left\|\frac{f(t)-f(M)}{t-m}\right\|_p &\leq \left\|f_d'(M)\right\|_p+\frac{\varepsilon}{2}\leq g_d'(M)+\frac{\varepsilon}{2}\\ &\leq \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{g(t)-g(M)}{t-m},\end{aligned}$$

càd

$$\|f(t)-f(M)\|_p\leq \varepsilon(t-M)+g(t)-g(M)\,. \tag{10}$$

Puisque, $M\in I(\varepsilon)$, on a

$$\|f(M)-f(\alpha)\|_p\leq g(M)-g(\alpha)+\varepsilon(M-\alpha)\,. \tag{11}$$

Par conséquent, de (10) et (11), on déduit que pour tout $t\in\left]M,M+h\right[$,

$$\begin{aligned}\|f(t)-f(\alpha)\|_p &\leq \|f(t)-f(M)\|_p+\|f(M)-f(\alpha)\|_p\\ &\leq g(t)-g(\alpha)+\varepsilon(t-\alpha)\end{aligned}$$

Donc, $M+\frac{h}{2}\in I$. Ce qui contrdit la définition de M.

Proposition 7.1 (Théorème de la moyenne)

Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^p$ différentiable sur U et tel que

$$\sup_{u \in U} \|df_u\| \leq k.$$

Alors, quels que soient les points x et y de U tel que le segment $[x, y]$ soit contenu dans U, on a

$$\|f(x) - f(y)\|_p \leq k \|x - y\|_n .$$

Preuve. Soit g la fonction de $I = [0, 1]$ dans $\mathbb{R}^n$ définie par :

$$g(t) = x + t(y - x).$$

On a $g(I) \subset U$. Donc, on peut considérer la fonction $F = fog$ définie de I dans $\mathbb{R}^p$. Comme f et g sont dérivables sur I, la fonction F est dérivable sur I et on a

$$F'(t) = f'(t) . g'(t) = df_{g(t)} . g'(t) = df_{x+t(y-x)} . (y - x).$$

Donc,

$$\left\|F'(t)\right\|_p = \left\|df_{x+t(y-x)}\cdot(y-x)\right\|_p \leq \left\|df_{x+t(y-x)}\right\| \|(y-x)\|_n \leq k\,\|(y-x)\|_n$$

En posant, $\varphi(t) = kt\,\|(y-x)\|_n$, on aura

$$\left\|F'(t)\right\|_p \leq \varphi'(t),$$

et en utilisant le lemme précédent, on obtient

$$\|F(1) - F(0)\|_p \leq \varphi(1) - \varphi(0),$$

càd,

$$\|f(x) - f(y)\|_p \leq k\,\|x - y\|_n.$$

Corollaire 7.1

Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^p$ différentiable sur U et tel que $df_x = 0\ \forall x \in U$. Alors, f est constante sur U.

Preuve. Soit $a \in U$ et posons

$$X = \{x \in U / f(x) = f(a)\}.$$

On a $X = f^{-1}\{a\}$. Comme f est continue sur U, X est une partie fermée non vide de U.
Soit $b \in X$, il existe $r > 0$ tel que $B(b, r) \subset U$.
Si $x \in B(b, r)$, le segment $[b, x] \subset U$.
En vertu du théorème de la moyenne, on a $\|f(b) - f(x)\|_p = 0$.
Donc, $f(b) = f(x) = f(a)$ et par suite, $x \in X$. Par conséquent, $B(b, r) \subset X$.
X est une partie à la fois ouverte et fermée dans U.
Comme $X \neq \emptyset$, alors $X = U$.

Proposition 7.2 ((théorème des accroissements finis)

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ différentiable sur U, x et $x+h$ deux points de U tels que le segment $[x, x+h] \subset U$. Alors, il existe $\theta \in]0,1[$ tel que

$$f(x+h) - f(x) = \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x+\theta h).$$

Preuve. Considérons l'application g de $I = [0,1] \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$ définie par : $g(t) = x + th$. On a $g(I) \subset U$.
On peut donc considérer la fonction $F = fog$ définie de I dans $\mathbb{R}$.
Cette dernière fonction est continiue sur et dérivable sur $]0,1[$.
Donc, il existe $\theta \in]0,1[$ tel que : $F(1) - F(0) = F'(\theta)$.

$$\begin{aligned} \text{càd, } f(x+h) - f(x) &= (fog)'(\theta) = \frac{d}{dt}(fog)(\theta) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_i + \theta h_i) . \frac{dg_i}{dt} \\ &= \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_i + \theta h_i). \end{aligned}$$

Proposition 7.3 (formule de Taylor)

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ admettant des dérivées partielles jusqu'à l'ordre l continues sur U. Soit x et $x+h$ deux points de U tels que le segment $[x, x+h] \subset U$.
Alors, il existe $\theta \in]0,1[$ tel que

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) + \frac{1}{2!}\left[\sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\right]^{(2)} + \ldots + \\ &+ \frac{1}{(l-1)!}\left[\sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\right]^{(l-1)} + \frac{1}{l!}\left[\sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x+\theta h)\right]^{(l)}. \end{aligned}$$

Preuve. Considérons l'application g de $I = [0,1] \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$ définie par : $g(t) = x + th$. On a $g(I) \subset U$.
On considére la fonction $F = fog$ définie de I dans $\mathbb{R}$.

Cette dernière fonction est de classe C^l, on peut lui appliquer la formule classique de Taylor, il existe $\theta \in]0,1[$ tel que

$$F(1) = F(0) + \frac{1}{1!}F'(0) + \frac{1}{2!}F''(0) + \ldots + \frac{1}{(l-1)!}F^{(l-1)}(0) + \frac{1}{l!}F^{(l)}(\theta).$$

Or, pour tout $k \in \{0, 1, 2, \ldots, l\}$

$$\begin{aligned} F^{(k)}(0) &= \frac{d^k}{dt^k}(fog)(0) = \left[\left(\sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^{(k)} og\right](0) \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\right)^{(k)} ; \\ F^{(l)}(\theta) &= \frac{d^l}{dt^l}(fog)(\theta) = \left[\left(\sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^{(k)} og\right](\theta) \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x+\theta h)\right)^{(l)} \end{aligned}$$

Définition 7.2

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in U$.
On dit que f admet un **maximum strict (***resp.* **un minimum strict)** *au point a s'il existe $\alpha > 0$ tel que*

$$x \in U \text{ et } \|x - a\| < \alpha \Longrightarrow f(x) < f(a) \quad (\text{resp. } f(x) < f(a)).$$

On dit que f admet un extremum strict au point a si f admet en ce point un maximum strict ou un minimum strict.

Proposition 7.4

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in U$.
On suppose que f admet des dérivées partielles par rapport à toutes les variables au point a et que f admet un extremum strict au point a.
Alors, pour tout $i = 1, 2, \ldots, n$,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0.$$

Preuve. Considérons pour tout $i = 1, 2, \ldots, n$, la fonction F_i définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$F_i = f\left(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_n\right).$$

F_i admet un extremum strict au point a_i.
Donc, $F_i'(a_i) = 0$ càd $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$.

Remarque 7.1

1. *On peut avoir* $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$ *pour tout* $i = 1, 2, \ldots, n$, *sans que* f *admette un extremum strict au point* a. *Ainsi par exemple, la fonction* f *définie de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *par :* $f(x) = x^3$ *vérifie* $f'(0) = 0$. *Cependant,* f *n'admet pas d'extremum strict au point 0.*
2. *Soit* U *un ouvert de* $\mathbb{R}^2$, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ *de classe* C^3 *sur* U.
Soit $a = (x_0, y_0) \in U$ *tekl que* $\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \frac{\partial f}{\partial xy}(a) = 0$. *Pour* h *et* k *assez petits, il existe* $\theta \in \left]0, 1\right[$ *tel que*

$$\begin{aligned} f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) &= \left[h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial xy}\right]^{(2)} (x_0, y_0) \\ &\quad + \left[h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial xy}\right]^{(3)} (x_0 + \theta h, y_0 + \theta k). \end{aligned}$$

Remarque (suite)

Posons

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0),\ B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0),\ C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0).$$

Si $B^2 - 4AC < 0$, pour h et k assez petits

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$$

a le même signe que $Ah^2 2Bhk + Ck^2$ càd que la fonction f admet au point (x_0, y_0) un maximum strict ou un minimum strict suivant que $A < 0$ ou $A > 0$.

Exemple 1

1) Extremum de la fonction $f(x, y) = (x - y)^2 (1 - x^2 - y^2)$.

La formule des accroissements finis et celle de Taylor ne s'appliquent pas au cas d'une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ avec $p > 1$ car le choix de θ n'étant pas nécessairement le même pour toutes les composantes. Tout de même, nous avons le résultat suivant que nous déduisons de la formule de Taylor-Young.

Proposition 7.5

Soit I un ouvert de $\mathbb{R}$, $I \longrightarrow \mathbb{R}^p$, a et b deux réels tels que $[a,b] \subset I$. On suppose que f est continue sur $[a,b]$ admettant des dérivées jusqu'à l'ordre $(l-1)$ sur $[a,b]$ et une dérivée à l'ordre l en a. Alors, pour tout $x \in [a,b]$, on a

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x) + \frac{1}{1!}(x-a) f'(a) + \ldots + \frac{(x-a)^{l-1}}{(l-1)!} f^{(l-1)}(a) \\ &\quad + \frac{(x-a)^l}{l!}\left[f^{(l)}(a) + \varepsilon(x)\right], \end{aligned}$$

où $\lim\limits_{x \longrightarrow a} \varepsilon(x) = 0$ *et* $f^{(k)}(a) = \left(f_1^{(k)}(a), f_2^{(k)}(a), \ldots, f_p^{(k)}(a)\right)$.

Preuve. Il suffit d'appliquer à chacune des composantes la formule de Taylor classique.