



Fiche TD N° : 3

Exercice 1. : Soit f l'application de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} définie sur \mathbb{R}^2 par :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{|y|}{x^2} \exp\left(-\frac{|y|}{x^2}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et φ_λ la restriction de f à l'ensemble $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = \lambda x\}$. Déterminer la limite de φ_λ au point $(0, 0)$.
2. Soit ψ la restriction de f à l'ensemble $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = x^2\}$. Calculer la limite de ψ au point $(0, 0)$.
3. Conclure.

Exercice 2. : Etudier la limite à l'origine des fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} \text{a) } f(x, y) &= \frac{1 - \cos(xy)}{x^2 y^2}; & \text{b) } g(x, y) &= \frac{3x - y^2}{x^2 + y^2}; & \text{c) } h(x, y) &= \frac{xy + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \\ \text{d) } s(x, y) &= \frac{xy^2}{x^2 + y^4}; & \text{e) } t(x, y) &= \frac{x^2 - y^2 - 1}{x} \operatorname{tg} x. \end{aligned}$$

Exercice 3. : Etudier la continuité au point $(0, 0)$ des fonctions de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} définies pour chaque couple (x, y) de \mathbb{R}^2 par :

$$\text{a) } f(x, y) = \begin{cases} \frac{(x+y)^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases},$$

$$\text{b) } g(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 + xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

$$\text{c) } h(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Exercice 4. : Peut-on prolonger par continuité au point $(0,0)$ les fonctions suivantes ?

1. $f(x, y) = \frac{1 - \cos \sqrt{xy}}{y}$ si $(x, y) \in A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / xy > 0\}$.
2. $g(x, y) = (x^2 + y^2)^x$ si $(x, y) \neq (0, 0)$.
3. $h(x, y) = \frac{\sqrt{4 - x^2 - y^2} - 2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$.

Exercice 5. : Soit A un compact de \mathbb{R}^n muni d'une distance d et $f : A \rightarrow A$ telle que

$$\forall (x, y) \in A^2, x \neq y : d(f(x), f(y)) < d(x, y).$$

1. Montrer que la fonction $x \mapsto d(x, f(x))$ est continue sur A et atteint sa borne inférieure en un point $x_0 \in A$.
2. En déduire que $f(x_0) = x_0$ (théorème du pont fixe).

Exercice 6. : Soient f et g deux applications continues de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^p . Montrer que

1. $A = \{x \in \mathbb{R}^n / f(x) = g(x)\}$ est fermé.
2. $B = \{x \in \mathbb{R}^n / 1 < f(x) < 2\}$ est ouvert.
3. $C = \{x \in \mathbb{R}^n / f(x) \leq g(x)\}$ est fermé.
4. $D = \{x \in \mathbb{R}^n / f(x) \neq g(x)\}$ est fermé.

Exercice 7. : Que peut-on dire des ensembles suivants ?

1. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / xy = 1\}$.
2. $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 < x^2 + y^2 < 1\}$.
3. $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + xy + y^2 < e^{z+x}\}$.

Exercice 8. : Soit A une partie non vide de \mathbb{R}^n .

Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on pose $d(x, A) = \inf_{y \in A} d(x, y)$.

1. Montrer que $d(x, A) = 0 \Leftrightarrow x \in \overline{A}$.
2. Montrer que pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$, on a $|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$. En déduire que la fonction $x \rightarrow d(x, A)$ est continue.
3. On suppose que A est compact et $x \notin A$. Montrer que $d(x, A) > 0$ et qu'il existe $a \in A$ tel que $d(x, A) = d(x, a)$.
4. Soit B une partie non vide de \mathbb{R}^n .
Montrer que $F = \{x \in \mathbb{R}^n / d(x, A) = d(x, B)\}$ est un fermé de \mathbb{R}^n .