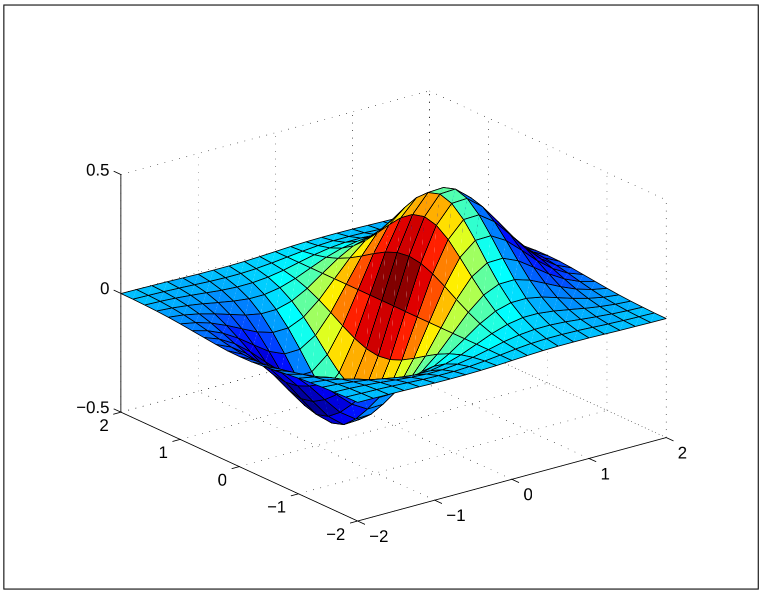
UNIVERSITE MOHAMMED PREMIER
ECOLE NATIONALE DES SCIENCES APPLIQUEES
OUJDA-MAROC

ANALYSE III : EXERCICES

STPI-CP2



A. Kissami & M. Derouich

Année universitaire : 2014 - 2015

Table des matières

Chapitre 1

L'ESPACE $\mathbb{R}^p$:PROPRIETES METRIQUES ET TOPOLOGIQUES de $\mathbb{R}^n$

<u>**Exercice 1 :**</u> Les fonctions suivantes sont-elles des distances sur $\mathbb{R}$?

$d_1(x,y) = (x-y)^2$; $d_2(x,y) = \sqrt{|y-x|}$; $d_3(x,y) = |y^3 - x^3|$;

$d_4(x,y) = |y^2 - x^2|$; $d_5(x,y) = |y - 2x|$.

<u>**Exercice 2 :**</u> (Norme de Hölder)

1) Soient p et q deux réels positifs vérifiant $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Déterminer le minimum de la fonction

$$f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longrightarrow \frac{t^p}{p} + \frac{t^{-q}}{q}.$$

En déduire que pour tout a, $b \in \mathbb{C}$, on a

$$|ab| \leq \frac{|a|^p}{p} + \frac{|b|^q}{q}.$$

2) On désigne par $a_1, \ldots, a_n$; $b_1, \ldots, b_n$, $2n$ nombres réels ou complexes ; et on pose

$$\alpha = \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}},\quad \beta = \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Montrer à l'aide de 1), que pour tout $k = 1, 2, , \ldots, n$, on a

$$\frac{|a_k b_k|}{\alpha\beta} \leq \frac{|a_k|^p}{p\alpha^p} + \frac{|b_k|^q}{q\beta^q},$$

et en déduire l'inégalité de Hölder

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{\dfrac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^q\right)^{\dfrac{1}{q}}.$$

3) Etablir l'inégalité de Minkowski

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k|^p\right)^{\dfrac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{\dfrac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^p\right)^{\dfrac{1}{p}}.$$

(On pourra écrire $(a_k + b_k)^p = a_k (a_k + b_k)^{p-1} + b_k (a_k + b_k)^{p-1}$ et utiliser (2)).

4) On définit l'application $\| \, . \, \|_p$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^+$ par :

$$\|x\|_p = \|(x_1, x_2, \ldots, x_n)\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\dfrac{1}{p}}, \quad p \geq 1.$$

Prouver que $\| \, . \, \|_p$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$.

<u>**Exercice 3 :**</u> Soit Φ une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^+$, strictement croissante, vérifiant $\Phi(0) = 0$ et qui est sous-additive ie., $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2$,

$$\Phi(x + y) \leq \Phi(x) + \Phi(y).$$

1) Montrer que si d est une distance sur un ensemble E, $d_* = \Phi o d$ en est aussi une.

2) Montrer que si d est une distance sur E,

$$d_1 = \frac{d}{1 + d}; \quad d_2 = \ln(1 + d),$$

sont des distances sur E.

<u>**Exercice 4 :**</u> Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction strictement croissante. On définit d de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^+$ par :

$$d(x, y) = |f(y) - f(x)|,$$

1) Montrer que d est une distance sur $\mathbb{R}$.

2) On prend $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$; la distance d correspondante est-elle équivalente à la distance d_1 définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $d_1(x, y) = |y - x|$?

Exercice 5 : Soit d la distance usuelle sur $\mathbb{R}$ définie par : $d(x, y) = |y - x|$ et d_1 l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $d_1(x, y) = |\arctan(y) - \arctan(x)|$.

1) Montrer que d_1 est une distance sur $\mathbb{R}$. $\mathbb{R}$ est-il borné pour la distance d_1?

2) Décrire et représenter la boule ouverte $B(0, 1)$ relativement à d_1.

3) Les distances d et d_1 sont-elles équivalentes ?

Exercice 6 : Soit a et b deux réels strictement positifs. On pose

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \mathbf{N}(x, y) = \sqrt{a^2x^2 + b^2y^2}.$$

On rappelle que la norme $\mathbf{N}_2$ est définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $\mathbf{N}_2(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

1) Prouver que $\mathbf{N}$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$. Que peut-on dire des normes $\mathbf{N}$ et $\mathbf{N}_2$?

2) Déterminer et dessiner la boule fermée de centre 0 et de rayon 1 pour les deux normes $\mathbf{N}$ et $\mathbf{N}_2$.

3) Déterminer p et q tel que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ p\ \mathbf{N}_2(x, y) \leq \mathbf{N}(x, y) \leq q\ \mathbf{N}_2(x, y).$$

Exercice 7 : Soit $\mathbb{R}^n$ muni d'une norme $\|\ .\ \|$.

1) Montrer que pour tous x, y éléments de $\mathbb{R}^n$, on a

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\| .$$

2) Si $x \neq 0$ et $y \neq 0$, montrer que

$$\|x\| \left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\| \leq 2 \|x - y\| ,$$
$$\|x - y\| \geq \frac{1}{2} \sup [\|x\| , \|y\|] \cdot \left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\| .$$

Exercice 8 : Soit δ une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^+$ définie par :

$$\delta(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y, \\ 1 & \text{si } x \neq y. \end{cases}$$

1) Montrer que δ est une distance sur $\mathbb{R}^n$.

2) Déterminer toutes les boules ouvertes et fermées de centre $x \in \mathbb{R}$ et de rayon $r > 0$.

Dans toute la suite, E désignera un espace métrique.

Exercice 9 : Montrer que

1) Toute intersection d'ensembles fermés de E est fermée dans E.

2) Toute réunion finie d'ensembles fermés de E est fermée dans E.

Exercice 10 : Soit $a \in E$.

Montrer que la sphère $S(a, r)$, de centre a et de rayon r, de E est un ensemble fermé dans E.

Exercice 11 : Montrer que tout sous-ensemble fini de E est fermé dans E.

Exercice 12 : Soit A une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$. Montrer que $\sup A$ et $\inf A$ sont des éléments de $\overline{A}$.

Exercice 13 : Soit A une partie de E. Montrer que

1) A est fermée $\Longleftrightarrow A = \overline{A}$.

2) A est ouverte $\Longleftrightarrow A = \overset{0}{A}$.

3) Soit $\mathbb{R}$ muni de la métrique habituelle. On pose

$$A = (\mathbb{Q} \cap]-1, 0[) \cup]0, 1[\cup]1, 2[\cup \{3\}.$$

Déterminer $\overset{0}{A}$, $\overline{A}$, $\overline{\overset{0}{A}}$, $\overset{0}{\overline{A}}$ et vérifier qu'ils sont tous distincts.

Exercice 14 : Soit A une partie non vide de E. Pour $x \in E$, on pose

$$d(x, A) = \inf_{y \in A} [d(x, y)], \text{ (distance du point } x \text{à } A).$$

Prouver que

1) $d(x, A) = 0 \Leftrightarrow x \in \overline{A}$.

2) $\forall (x, y) \in E^2$, $|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$.

Exercice 15 : Soient A et B deux parties non vides de E. Montrer que

1) $\overset{0}{\widehat{A \cap B}} = \overset{0}{A} \cap \overset{0}{B}$.

2) $\overset{0}{A} \cup \overset{0}{B} \subset \overset{0}{\widehat{A \cup B}}$.

3) $\overset{0}{\complement}_A = \complement_{\overline{A}}$.

4) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

5) $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.

6) Montrer par des exemples simples qu'en général, on a pas

$$\overset{0}{\widehat{A \cup B}} = \overset{0}{A} \cup \overset{0}{B}; \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

Exercice 16 : Soit d la distance usuelle sur $\mathbb{R}$ et d_1 l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $d_1(x, y) = |e^y - e^x|$.

1) Montrer que d_1 est une distance sur $\mathbb{R}$.

2) $\mathbb{R}$ est-il borné pour la distance d_1?

3) Décrire et représenter la boule ouverte $B(0, 1)$ relativement à d_1.

4) Les distances d et d_1 sont-elles équivalentes ?

5) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = -n$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle de Cauchy relativement à d_1? Est-elle convergente ?

Exercice 17 :

1) Montrer que pour tout $A \subset \mathbb{R}^p$, $\partial(A) = Fr(A) = \overline{A} \backslash \overset{0}{A}$.

2) On munit $\mathbb{R}$ de sa norme usuelle $\|x\| = |x|$.

a) Déterminer $\overset{0}{\mathbb{Q}}$, $\overline{\mathbb{Q}}$ et $\partial(\mathbb{Q}) = Fr(\mathbb{Q})$. En déduire que $\mathbb{Q}$ n'est ni ouvert ni fermé. Est ce que $\mathbb{Q}$ a des points isolés ?

b) Considérons la partie $X =]-\infty, -1[\cup \left\{0, \frac{\pi}{4}, \sqrt{3}\right\} \cup \left\{3 - \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$.
Déterminer $\overset{0}{X}$, $\overline{X}$, $\partial(X) = Fr(X)$ et les points isolés de X.

Exercice 18 : Soit A une partie de $\mathbb{R}^p$ et $x \in \mathbb{R}^p$. Montrer l'équivalence des deux assertions suivantes.

1) $x \in \overline{A}$.

2) Il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

(i) $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in A$.

(ii) (u_n) converge vers x dans $\mathbb{R}^p$.

Exercice 19 : Les ensembles suivants sont-ils compacts ? Justifier votre réponse.

a) $\mathbb{Z}$; b) $[0,1] \cap \mathbb{Q}$; c) $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \ldots \times [a_p, b_p]$.

d) Une union finie de réels.

e) Une union infinie de réels distincts.

f) La boule fermée de centre a et de rayon $r > 0$ dans $\mathbb{R}^p$.

Exercice 20 : Soit (a_n) une suite d'éléments de $\mathbb{R}^p$ de limite $a \in \mathbb{R}^p$. Le sous-ensemble $A = \{a_n; n \in \mathbb{N}\} \cup \{a\}$ est-il compact dans $\mathbb{R}^p$?

Exercice 21 : Montrer que

a) Toute intersection de compacts de $\mathbb{R}^p$ est un compact de $\mathbb{R}^p$.

b) Toute réunion finie de compacts de $\mathbb{R}^p$ est un compact de $\mathbb{R}^p$.

Exercice 22 : Soit $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante d'ensembles fermés non vides de $\mathbb{R}^p$ tel que K_0 est compact.

a) Montrer que K_n est compact pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) Prouver que
$$K = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n \neq \varnothing.$$

c) En déduire que si le diamètre de K_n tend vers 0, alors K est réduit au singleton.

d) Soit O un ouvert contenant K. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $K_n \subset O$.

Corrigé

Exercice 1 :

a) d_1 n'est pas une distance car pour $z > y > x$

$$\begin{aligned} d_1(z,x) &= (z-x)^2 = (z-y+y-x)^2 \\ &= (z-y)^2 + (y-x)^2 + 2(z-y)(y-x) \\ &= d_1(x,y) + d_1(x,z) + 2(z-y)(y-x) \\ &> d_1(x,y) + d_1(x,z). \end{aligned}$$

b) d_2 est une distance car les 3 conditions d'une distance sont satisfaites.

- $d_2(x,y) = 0 \Leftrightarrow |y-x| = 0 \Leftrightarrow x = y$
- $d_2(x,y) = d_2(y,x)$ évident.
- $[d_2(x,z)]^2 = |x-z| = |x-y+y-z| \leq |x-y| + |y-z|$
  $\leq \left[\sqrt{|x-y|} + \sqrt{|y-z|}\right]^2$. Donc, $d_2(x,z) \leq d_2(x,y) + d_2(y,z)$.

c) d_3 est une distance car les 3 conditions d'une distance sont satisfaites.

- $d_3(x,y) = 0 \Leftrightarrow |y^3 - x^3| = 0 \Leftrightarrow x = y$
- $d_3(x,y) = d_3(y,x)$ évident.
- $d_3(x,z) = |z^3 - x^3| = |z^3 - y^3 + y^3 - x^3| \leq |z^3 - y^3| + |y^3 - x^3|$

Donc, $d_3(x,z) \leq d_3(x,y) + d_3(y,z)$.

d) d_4 n'est pas une distance car $d_4(x,y) = 0 \Longrightarrow y = \pm x$.

e) d_5 n'est pas une distance car la symétrie n'est pas satisfaite. $d_5(x,y) \neq d_5(y,x)$.

Exercice 2 : 1) Posons

$$f(t) = \frac{t^p}{p} + \frac{t^{-q}}{q}.$$

f est continue sur $]0,+\infty[$ et atteint son minimum au point $x_0 = 1$. Pour tout $t > 0$, on a $f(t) = \dfrac{t^p}{p} + \dfrac{t^{-q}}{q} \geq 1$. En particulier pour $x_0 = \dfrac{|a|^{\frac{p-1}{p}}}{|b|^{\frac{1}{p}}}$ on a

$$
\begin{aligned}
f(x_0) &= \frac{x_0^p}{p} + \frac{x_0^{-q}}{q} = \frac{|a|^{p-1}}{p\,|b|} + \frac{|a|^{\frac{1-p}{p}q}}{q\,|b|^{\frac{-q}{p}}} = \frac{1}{|ab|}\left[\frac{|a|^p}{p} + \frac{|a|^{\frac{1-p}{p}q+1}}{q}\,|b|^{1+\frac{q}{p}}\right] \\
&= \frac{1}{|ab|}\left[\frac{|a|^p}{p} + \frac{|b|^q}{q}\right] \geq 1.
\end{aligned}
$$

Donc,

$$|ab| \leq \frac{|a|^p}{p} + \frac{|b|^q}{q}. \tag{1.1}$$

2) En posant $a = \dfrac{a_k}{\alpha}$ et $b = \dfrac{b_k}{\beta}$ dans la relation (1), on obtient

$$\frac{|a_k b_k|}{\alpha\beta} \leq \frac{|a_k|^p}{p\alpha^p} + \frac{|b_k|^q}{q\beta^q}. \tag{1.2}$$

Par sommation de la relation (2), on déduit que

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\alpha\beta}\sum_{k=1}^{n}|a_k b_k| &\leq \frac{1}{p\alpha^p}\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p + \frac{1}{q\beta^q}\sum_{k=1}^{n}|b_k|^q \\
&= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.
\end{aligned}
$$

Donc,

$$\sum_{k=1}^{n}|a_k b_k| \leq \alpha\beta = \left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{1.3}$$

3) Nous avons

$$|(a_k+b_k)|^p = |a_k|\,|(a_k+b_k)|^{p-1} + |b_k|\,|(a_k+b_k)|^{p-1}. \tag{1.4}$$

Par application de l'inégalité de Hölder à $|a_k|\,|(a_k+b_k)|^{p-1}$, on obtient

$$\sum_{k=1}^{n}|a_k|\,|(a_k+b_k)|^{p-1} \leq \left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{n}|(a_k+b_k)|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{1.5}$$

Par application encore de l'inégalité de Hölder à $|b_k|\,|(a_k+b_k)|^{p-1}$, on obtient

$$\sum_{k=1}^{n} |b_k|\,|(a_k+b_k)|^{p-1} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^p\right)^{\dfrac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} |(a_k+b_k)|^{(p-1)q}\right)^{\dfrac{1}{q}}. \qquad (1.6)$$

En faisant la somme des relations (5) et (6) et en utilisant (4), nous déduisons

$$\sum_{k=1}^{n} |(a_k+b_k)|^p \leq \left[\left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{\dfrac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^p\right)^{\dfrac{1}{p}}\right] \left(\sum_{k=1}^{n} |(a_k+b_k)|^p\right)^{\dfrac{1}{q}}.$$

D'où,

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |(a_k+b_k)|^p\right)^{\dfrac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{\dfrac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^p\right)^{\dfrac{1}{p}}.$$

4) Montrons que $\|\ .\ \|_p$ est une norme.

- $\|x\|_p = 0 \Longrightarrow x = 0.$

- $\|\lambda x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |\lambda x_k|^p\right)^{\dfrac{1}{p}} = |\lambda|\,\|x\|_p\,.$

- $\|x+y\|_p = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} |(x_k+y_k)|^p\right)^{\dfrac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\dfrac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^p\right)^{\dfrac{1}{p}}$

(inégalité de Minkowski). Donc

$$\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p\,.$$

Donc, est une norme sur $\mathbb{R}^n$.

<u>Exercice 3 :</u> 1) Les axiomes de symétrie et de séparation sont vérifiées. Montrons l'inégalité triangulaire. Puisque d est une distance, alors pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, on a

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z).$$

Comme Φ est croissante, alors

$$\begin{aligned} d_*(x,z) &= \Phi\left[d(x,z)\right] \leq \Phi\left[d(x,y)+d(y,z)\right] \\ &\leq \Phi\left[d(x,y)\right] + \Phi\left[d(y,z)\right] \ \ \text{(car } \Phi \text{ est sous-additive)} \\ &= d_*(x,y) + d_*(y,z)\,. \end{aligned}$$

Donc, d_* est une distance sur E.

2) Les fonctions

$$\begin{array}{cccc} \Phi_1 : \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & & \dfrac{x}{1+x} \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \Phi_2 : \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & & \ln(1+x) \end{array}$$

vérifient les conditinos de 1). Donc, si d est une distance sur E,

$$\Phi_1 o d = \frac{d}{1+d} \quad \text{et} \quad \Phi_2 o d = \ln(1+d)$$

le sont aussi.

Exercice 4 : 1) Les axiomes de symétrie et de l'inégalité triangulaire sont vérifiées. Pour l'axiome de séparation, nous avons

$d(x,y) = 0 \Leftrightarrow f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y$ (car f est une injection puisque strictement croissante).

2) Pour tout $x \neq y$, nous avons

$$\frac{d(x,y)}{d_1(x,y)} = \frac{|x-y|}{\left| x^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{1}{3}} \right|} = x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{1}{3}}.$$

Donc, $\dfrac{d(x,y)}{d_1(x,y)}$ n'est ni majorée ni minorée.

$$\forall k > 0,\ x > k^{\frac{3}{2}} \text{ et } y > k^{\frac{3}{2}} \longrightarrow \frac{d(x,y)}{d_1(x,y)} > 3k$$

$$\forall \alpha > 0,\ 0 < x < \alpha^{\frac{3}{2}} \text{ et } 0 < y < \alpha^{\frac{3}{2}} \Longrightarrow \frac{d(x,y)}{d_1(x,y)} < 3\alpha.$$

Par conséquent, ces distances ne sont pas équivalentes.

Exercice 4' : 1) Il est clair que $\| \cdot \|_\infty$ est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$. Montrons que les trois axiomes sont satisfaits.

-

$$\|f\|_\infty = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \ \forall x \in [0,1] \quad \Leftrightarrow f = 0.$$

- Homogénéité. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, pour tout $f \in E$ et pour tout $x \in [0,1]$, nous avons
$$|\lambda f(x)| = |\lambda| \, |f(x)| \, .$$
Par passage au max, on déduit que
$$\|\lambda f\|_\infty = |\lambda| \, \|f\|_\infty \, .$$

- Inégalité triangulaire. Soit f et g deux éléménts de E. Pour tout $x \in [0,1]$, nous avons
$$|f(x) + g(x)| \leq |g(x)| + |g(x)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty \, .$$
En prenant le max, nous déduisons que
$$\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty \, .$$
De même, $\| \, . \, \|_1$ est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$. Montrons que les trois axiomes sont satisfaites.
$$\|f\|_1 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \ \forall x \in [0,1] \quad \Leftrightarrow f = 0.$$
(car l'intégrale d'une fonction g positive est nulle si et seulement si $g = 0$).

- Homogénéité. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, pour tout $f \in E$ et pour tout $x \in [0,1]$, nous avons
$$|\lambda f(x)| = |\lambda| \, |f(x)| \, .$$
En prenant l'intégrale des deux cotés, on déduit que
$$\|\lambda f\|_1 = |\lambda| \, \|f\|_1 \, .$$

- Inégalité triangulaire. Soit f et g deux éléménts de E. Pour tout $x \in [0,1]$, nous avons
$$|f(x) + g(x)| \leq |g(x)| + |g(x)| \, .$$
En prenant l'intégrale des deux cotés et en utilisant la linéarité, nous déduisons que
$$\|f + g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1 \, .$$

2) Pour tout $x \in [0,1]$, on a
$$|f(x)| \leq \|f\|_\infty \, .$$
En prenant l'intégrale entre 0 et 1, on obtient
$$\|f\|_1 \leq \|f\|_\infty \, .$$

3) Pour $f_n(x) = x^n$, nous avons

$$\|f_n\|_\infty = 1 \text{ et } \|f_n\|_1 = \frac{1}{n+1}.$$

Si les normes sont équivalentes, il existerait une constante $\alpha > 0$ telle que

$$\|f_n\|_\infty \leq \alpha \|f_n\|_1 \Longrightarrow 1 \leq \frac{\alpha}{n+1} \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ce qui est impossible car lorsque $n \longrightarrow +\infty$, $\dfrac{\alpha}{n+1} \longrightarrow 0$.

<u>**Exercice 6 :**</u> 1) $\boxed{\textbf{2 points}}$

• $\mathbf{N}(x,y) = \sqrt{a^2x^2 + b^2y^2} = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$

• Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\mathbf{N}(\lambda x) = \sqrt{a^2\lambda^2x^2 + b^2\lambda^2y^2} = \sqrt{\lambda^2}\sqrt{a^2x^2 + b^2y^2} = |\lambda| \, \mathbf{N}(x).$$

• Pour tout $X = (x_1, y_1)$ et $Y = (x_2, y_2)$, on a

$$\begin{aligned}
[\mathbf{N}(X+Y)]^2 &= [\mathbf{N}(x_1 + x_2, y_1 + y_2)]^2 \\
&= a^2(x_1 + x_2)^2 + b^2(y_1 + y_2)^2 \\
&= a^2x_1^2 + a^2{x_2}^2 + 2a^2x_1x_2 + b^2y_1^2 + b^2{y_2}^2 + 2b^2y_1y_2 \\
&= a^2x_1^2 + b^2y_1^2 + a^2{x_2}^2 + b^2{y_2}^2 + 2\left[(ax_1)(ax_2) + (by_1)(by_2)\right] \\
&\leq a^2x_1^2 + b^2y_1^2 + a^2{x_2}^2 + b^2{y_2}^2 + 2\sqrt{a^2x_1^2 + b^2y_1^2} \times \sqrt{a^2x_2^2 + b^2y_2^2} \\
&= \left(\sqrt{a^2x_1^2 + b^2y_1^2} + \sqrt{a^2x_2^2 + b^2y_2^2}\right)^2 = \mathbf{N}(X) + \mathbf{N}(Y).
\end{aligned}$$

D'où l'inégalité triangulaire. Par conséquent, $\mathbf{N}$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$. Puisque $\mathbb{R}^2$ est un **e.v.n.** de dimension finie, alors les deux normes $\mathbf{N}$ et $\mathbf{N}_2$ sont équivalentes.

2) $\boxed{\textbf{2 points}}$

• La boule fermée de centre 0 et de rayon 1 pour la norme $\mathbf{N}_2$ est définie par :

$$\mathbf{B}_2(0,1) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 1\right\}.$$

C'est le disque fermé de centre 0 et de rayon 1.

• La boule fermée de centre 0 et de rayon 1 pour la norme $\mathbf{N}$ est définie par :

$$\mathbf{B}_2(0,1) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / a^2x^2 + b^2y^2 \leq 1\right\}.$$

C'est une ellipse

3) $\boxed{\textbf{1 point}}$

Soit $p = \min(a,b)$ et $q = \max(a,b)$. On a pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$p\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{p^2x^2+p^2y^2} \leq \sqrt{a^2x^2+b^2y^2} \leq \sqrt{q^2x^2+q^2y^2} = q\sqrt{x^2+y^2}.$$

Donc, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$p\mathbf{N}_2(x,y) \leq \mathbf{N}(x,y) \leq q\mathbf{N}_2(x,y).$$

<u>Exercice 16 :</u>

- $d_1(x,y) = 0 \Leftrightarrow |e^y - e^x| = 0 \Leftrightarrow x = y$.
- $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $d_1(x,y) = d_1(y,x)$.
- $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, on a

$$\begin{aligned} d_1(x,z) &= |e^x - e^z| \leq |e^x - e^y| + |e^y - e^z| \\ &= d_1(x,y) + d_1(y,z). \end{aligned}$$

Donc, d_1 est une distance.

$\mathbb{R}$ n'est pas borné pour la distance d_1 car

$$\sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} d_1(x,y) = \sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} |e^y - e^x| = +\infty.$$

2)

$$\begin{aligned} B(0,1) &= \{x \in \mathbb{R}/d_1(0,x) < 1\} = \{x \in \mathbb{R}/\,|e^x - 1| < 1\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}/0 < e^x < 2\} = \left]-\infty, \ln 2\right[. \end{aligned}$$

3) Pour tout $x \neq y$, on a

$$\frac{d_1(x,y)}{d(x,y)} = \frac{|e^y - e^x|}{|y - x|}.$$

Par application du théorème des accroissements finis entre x et y, on obtient

$$\frac{|e^y - e^x|}{|y - x|} = e^{\theta(x,y)},$$

où $\theta(x,y)$ est un réel compris entre x et y. Nous avons

$$\forall k > 0,\ x > k \text{ et } y > k \Longrightarrow \frac{|e^y - e^x|}{|y-x|} > e^k \longrightarrow +\infty \text{ quand } k \longrightarrow +\infty,$$

$$\forall k > 0,\ x < -k \text{ et } y < -k \Longrightarrow \frac{|e^y - e^x|}{|y-x|} < e^{-k} \longrightarrow 0 \text{ quand } k \longrightarrow +\infty.$$

Donc, $\dfrac{d_1(x,y)}{d(x,y)}$ n'est ni majoré ni minoré. Par conséquent, les distances d et d_1 ne sont pas équivalentes.

4) Pour tout $(n,m) \in \mathbb{N}^2$, on a

$$d_1(u_n, u_m) = \left|e^{-n} - e^{-m}\right|.$$

Donc, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy pour la distance d_1. Cependant, elle n'est pas convergente. Supposons qu'elle converge vers $l \in \mathbb{R}$. Nous aurons alors

$$d_1(u_n, l) = \left|e^{-n} - e^{-l}\right| \longrightarrow 0 \text{ quand } n \longrightarrow +\infty.$$

Ce qui est impossible car $e^{-l} > 0$ et $e^{-n} \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow +\infty$.

Exercice 17 :

1) On a $\partial(A) = \overline{A} \cap \overline{\complement_A}$. D'où,

$$\begin{aligned} x \in \partial(A) &\Leftrightarrow x \in \overline{A} \cap \overline{\complement_A} \Leftrightarrow x \in \overline{A} \text{ et } x \in \overline{\complement_A} \\ &\Leftrightarrow \forall r > 0,\ B(x,r) \cap A \neq \emptyset \text{ et } B(x,r) \cap \complement_A \neq \emptyset \\ &\Leftrightarrow \forall r > 0,\ B(x,r) \cap A \neq \emptyset \text{ et } B(x,r) \subsetneqq A \\ &\Leftrightarrow \forall r > 0,\ B(x,r) \cap A \neq \emptyset \text{ et } x \notin \overset{0}{A} \\ &\Leftrightarrow x \in \overline{A} \backslash \overset{0}{A}. \qquad \boxed{\textbf{1 point}} \end{aligned}$$

D'où l'égalité.

2)

a) Nous avons

$$\overset{0}{\mathbb{Q}} = \emptyset,\ \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R} \text{ et } \partial(\mathbb{Q}) = \overline{\mathbb{Q}} \backslash \overset{0}{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}. \qquad \boxed{\textbf{1,5 points}}$$

$\mathbb{Q}$ n'est ni ouvert ni fermé car

$$\overset{0}{\mathbb{Q}} = \emptyset \neq \mathbb{Q} \text{ et } \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R} \neq \mathbb{Q}. \qquad \boxed{\textbf{1 point}}$$

$\mathbb{Q}$ n'a pas de points isolés car pour tout $\dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ et pour tout $r > 0$

$$\left]\frac{p}{q} - r, \frac{p}{q} + r\right[\setminus \left\{\frac{p}{q}\right\} \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset . \partial\left(\mathbb{Q}\right) = \overline{\mathbb{Q}} \setminus \overset{0}{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}. \quad . \quad \boxed{\textbf{0,5 point}}$$

b) On a

$$\begin{aligned}
\overset{0}{X} &= \left]-\infty, -1\right[, \quad \boxed{\textbf{0,5 point}} \\
\overline{X} &= \left]-\infty, -1\right] \cup \left\{0, \frac{\pi}{4}, \sqrt{3}, 3\right\} \cup \left\{3 - \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\right\}, \quad \boxed{\textbf{0,5 point}} \\
\partial(X) &= \left\{-1, 0, \frac{\pi}{4}, \sqrt{3}, 3\right\} \cup \left\{3 - \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\right\} \cup \{3\}, \quad \boxed{\textbf{0,5 point}} \\
X' &= \left\{0, \frac{\pi}{4}, \sqrt{3}\right\} \cup \left\{3 - \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\right\}, \quad \boxed{\textbf{0,5 point}}
\end{aligned}$$

où X' est l'ensemble des points isolés de X.

Chapitre 2

APPLICATIONS DE $\mathbb{R}^p$ DANS $\mathbb{R}^q$

Exercice 1 : Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|y|}{x^2} \exp\left(-\dfrac{|y|}{x^2}\right) & \text{si} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

1) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et φ_λ la restriction de f à l'ensemble $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y = \lambda x\}$. Déterminer la limite de φ_λ au point $(0,0)$.

2) Soit ψ la restriction de f à l'ensemble $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y = x^2\}$. Calculer la limite de ψ au point $(0,0)$.

3) Conclure.

Exercice 2 : Etudier la limite à l'origine des fonctions suivantes :

a) $f(x,y) = \dfrac{1-\cos(xy)}{x^2y^2}$; b) $g(x,y) = \dfrac{3x-y^2}{x^2+y^2}$; c) $h(x,y) = \dfrac{xy+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$,

d) $s(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$; e) $t(x,y) = \dfrac{x^2-y^2-1}{x} tgx$.

Exercice 3 : Etudier la continuité au point $(0,0)$ des fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définies pour chaque couple (x,y) de $\mathbb{R}^2$ par :

a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x+y)^2}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$,

b) $g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

c) $h(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Exercice 4 : Peut-on prolonger par continuité au point $(0,0)$ les fonctions suivantes ?

1) $f(x,y) = \dfrac{1-\cos\sqrt{xy}}{y}$ si $(x,y) \in A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / xy > 0\}$.

2) $g(x,y) = (x^2+y^2)^x$ si $(x,y) \neq (0,0)$.

3) $h(x,y) = \dfrac{\sqrt{4-x^2-y^2}-2}{\sqrt{x^2+y^2}}$ si $(x,y) \neq (0,0)$.

Exercice 5 : Soit A un compact de $\mathbb{R}^n$ muni d'une distance d et $f : A \longrightarrow A$ telle que

$$\forall (x,y) \in A^2,\ x \neq y : d(f(x), f(y)) < d(x,y).$$

1) Montrer que la fonction $x \mapsto d(x, f(x))$ est continue sur A et atteint sa borne inférieure en un pint $x_0 \in A$.

2) En déduire que $f(x_0) = x_0$ (théorème du pont fixe).

Exercice 6 : Soient f et g deux applications continues de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$. Montrer que

1) $A = \{x \in \mathbb{R}^n /\ f(x) = g(x)\}$ est fermé.

2) $B = \{x \in \mathbb{R}^n /\ 1 < f(x) < 2\}$ est ouvert.

3) $C = \{x \in \mathbb{R}^n /\ f(x) \leq g(x)\}$ est fermé.

4) $D = \{x \in \mathbb{R}^n /\ f(x) \neq g(x)\}$ est fermé.

Exercice 7 : Que peut-on dire des ensembles suivants ?

1) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / xy = 1\}$.

2) $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 0 < x^2+y^2 < 1\}$.

3) $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x^2+xy+y^2 < e^{z+x}\}$.

Exercice 8 : Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}^n$ et $x \in \mathbb{R}^n$. On pose

$$d\left(x, A\right) = \inf\left\{d\left(x, a\right),\ a \in A\right\}.$$

1) Montrer que l'application f definie de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ par : $f\left(x\right) = d\left(x, A\right)$ est uniformément continue.

2) On pose

$$\begin{array}{rcl} V\left(A, r\right) & = & \left\{x \in \mathbb{R}^n / d\left(x, A\right) < r\right\}, \\ V'\left(A, r\right) & = & \left\{x \in \mathbb{R}^n / d\left(x, A\right) \leq r\right\}. \end{array}$$

Montrer que $V\left(A, r\right)$ est ouvert, $V'\left(A, r\right)$ est fermé et que $\bigcap\limits_{r>0} V\left(A, r\right) = \overline{A}$.

Exercice 9 : Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}^n$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on pose $d(x, A) = \inf\limits_{y \in A} d(x, y)$.

1) Montrer que $d(x, A) = 0 \Leftrightarrow x \in \overline{A}$.

2) Montrer que pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$, on a $|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$. En déduire que la fonction $x \longrightarrow d(x, A)$ est continue.

3) On suppose que A est compact et $x \notin A$. Montrer que $d(x, A) > 0$ et qu'il existe $a \in A$ tel que $d(x, A) = d(x, a)$.

4) Soit B une partie non vide de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $F = \{x \in \mathbb{R}^n /\ d(x, A) = d(x, B)\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^n$.

Corrigé

Exercice 1 :

1) Pour $x \neq 0$, on a

$$\varphi_\lambda(x,y) = f(x,\lambda x) = \frac{|\lambda x|}{x^2} e^{-\frac{|\lambda x|}{x^2}}$$

• Si $\lambda = 0$,

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \varphi_0(x,y) = 0$$

• Si $\lambda \neq 0$,

$$\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{|\lambda x|}{x^2} e^{-\frac{|\lambda x|}{x^2}} = 0,$$

car $\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{|\lambda x|}{x^2} = +\infty$. D'où, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \varphi_\lambda(x,y) = 0.$$

1) Pour $x \neq 0$, on a

$$\psi_\lambda(x,y) = f\left(x, x^2\right) = e^{-1}.$$

Donc,

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \psi(x,y) = e^{-1}.$$

Les restrictions φ_λ et ψ de f ont des limites différentes au point (0,0), la fonction f n'admet pas de limite en ce point.

Exercice2 :

a) Nous avons

$$1 - \cos(xy) \backsim \frac{x^2y^2}{2} \text{ quand } (x,y) \longrightarrow (0,0).$$

Donc,

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{1-\cos(xy)}{x^2y^2} = \frac{1}{2}.$$

b) Posons $x = \lambda y^2$. Nous avons

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{3x - y^2}{x^2+y^2} = \lim_{y\longrightarrow 0} \frac{\lambda y^2 - y^2}{\lambda^2 y^4 + y^2} = \lambda - 1,$$

qui dépend de λ. Donc, g n'admet pas de limite au point $(0,0)$.

c) Pour $(x,y) \neq (0,0)$, on a

$$\begin{aligned}
|h(x,y)| &= \left| \frac{xy+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| \leq \frac{|xy+y^2|}{|y|} \\
&\leq \frac{|xy|+y^2}{|y|} = |x| + |y| \,.
\end{aligned}$$

D'où,

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} h(x,y) = 0.$$

d) Posons $x = \lambda y^2$. Nous avons

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4} = \lim_{y\longrightarrow 0} \frac{\lambda y^4}{\lambda y^4 + y^4} = \frac{\lambda}{1+\lambda},$$

qui dépend de λ. Donc, h n'admet pas de limite au point $(0,0)$.

e)

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} t(x,y) &= \lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{x^2-y^2-1}{x} \tan(x) \\
&= \left(x^2-y^2-1\right) \frac{\tan(x)}{x}.
\end{aligned}$$

On a

$$\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1 \text{ et } \lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \left(x^2-y^2-1\right) = -1.$$

Donc,

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} t(x,y) = -1.$$

Exercice 3 :

a) Pour $(x,y) \neq (0,0)$, on a

$$f(x,y) = 1 + \frac{2xy}{x^2+y^2}$$

Posons $y = \lambda x$. On a

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} f(x,y) = 1 + \frac{2\lambda}{1+\lambda^2},$$

qui dépend de λ. Donc, f n'admet pas de limite au point $(0,0)$ et par conséquent non continue en ce point.

b) Pour tout $(x,y) \neq (0,0)$, nous avons

$$\begin{aligned} |f(x,y)| &= \left|\frac{x^2+xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leq \frac{x^2+|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ &\leq \frac{x^2+|xy|}{\sqrt{x^2}} = \frac{x^2+|xy|}{|x|} = |x|+|y|. \end{aligned}$$

Donc, $\lim\limits_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} f(x,y) = 0$. Par suite, f est continue au point $(0,0)$.

c) Nous avons

$$|g(x,y)| \leq x^2+y^2.$$

D'où,

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} g(x,y) = 0 = g(0,0).$$

La fonction g est continue en (0,0).

<u>Exercice 4 :</u>

1) Pour tout u, on a

$$|1-\cos(u)| \leq \frac{u^2}{2}.$$

Donc,

$$\left|\frac{1-\cos(\sqrt{xy})}{y}\right| \leq |x|.$$

D'où,

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{1-\cos(\sqrt{xy})}{y} = 0.$$

On peut donc prolonger f par continuité à l'origine en posant $f(0,0) = 0$.

2) On a

$$g(x,y) = e^{x\ln\left(x^2+y^2\right)}.$$

D'autre part, pour tout $x,y) \neq (0,0)$,

$$\begin{aligned} \left|x\ln\left(x^2+y^2\right)\right| &\leq \sqrt{x^2+y^2}\left|\ln\left(x^2+y^2\right)\right| \\ &= 2\sqrt{x^2+y^2}\left|\ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\right|. \end{aligned}$$

Or,

$$\lim_{r\longrightarrow 0} r\ln(r) = 0.$$

Donc,
$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} x\ln\left(x^2+y^2\right)=0,$$
et par conséquent,
$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} g(x,y)=1.$$
On peut donc prolonger g par continuité à l'origine en posant $g(0,0)=1$.On

Exercice 5 :

1) Considérons les applications

$$u : \underset{x}{A} \longrightarrow \underset{(x,f(x))}{A \times A} \quad \text{et} \quad v : \underset{(x,y)}{A \times A} \longrightarrow \underset{d(x,y)}{\mathbb{R}^+}.$$

On a

$$g = vou.$$

g est continue car les applications u et v le sont. Comme A est compact, l'image $g(A)$ est un compact de $\mathbb{R}^+$. Il existe alors une borne inférieure atteinte en un point x_0.

2) Supposons que $d\left(x_0, f(x_0)\right) \neq 0$. Par hypothèse, on a

$$d\left(f\left(x_0\right), f^2(x_0)\right) < d\left(x_0, f(x_0)\right).$$

Cette dernière inégalité contredit la définition de la borne inférieure. Donc, $d\left(x_0, f(x_0)\right) = 0$ et par suite $f(x_0) = x_0$. D'où l'existance du point fixe. Montrons maintenent l'unicité. Supposons qu'il existe un autre point fixe $x_1 \neq x_0$. On aura

$$d\left(x_0, x_1\right) = d\left(f\left(x_0\right), f(x_1)\right) < d\left(x_0, x_1\right).$$

Ce qui est impossible.

Exercice 6 :

1)

$$E = f^{-1}\left(\{a\}\right)$$

est fermé dans $\mathbb{R}^n$ comme image réciproque du fermé $\{a\}$ par l'application continue f.

2)

$$F = \complement E.$$

Comme E est fermé dans $\mathbb{R}^n$, F est ouvert dans $\mathbb{R}^n$.

3)

$$\begin{aligned} G &= \{x \in \mathbb{R}^n / f\left(x\right) = g\left(x\right)\} = \{x \in \mathbb{R}^n / f\left(x\right) - g\left(x\right) = 0\} \\ &= \left(f - g\right)^{-1}\{0\}, \end{aligned}$$

est fermé dans $\mathbb{R}^n$ comme image réciproque du fermé $\{0\}$ par l'application continue $f - g$.

Exercice 7 :

1)

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / xy = 1\right\} = f^{-1}(\{1\}),$$

où $f(x,y) = xy$. Comme $\{1\}$ est fermé dans $\mathbb{R}$ et f est continue sur $\mathbb{R}^2$, alors A est fermé dans $\mathbb{R}^2$.

2)

$$B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 0 < x^2 + y^2 < 1\right\} = g^{-1}(]0,1[),$$

où $g(x,y) = x^2 + y^2$. Comme $]0,1[$ est ouvert dans $\mathbb{R}$ et f continue sur $\mathbb{R}$, alors B est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

3)

$$\begin{aligned} C &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + xy + y^2 < e^{z+x}\} \\ &= C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + xy + y^2 - e^{z+x} < 0\} \\ &= h^{-1}(]-\infty, 0[), \end{aligned}$$

où $h(x,y,z) = x^2 + xy + y^2 - e^{z+x}$. Comme $]-\infty, 0[$ est ouvert dans $\mathbb{R}$ et f continue sur $\mathbb{R}^3$, alors C est un ouvert de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 8 :

1) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, on a

$$|d(x,A) - d(y,A)| \leq d(x,y) \quad \text{(voir fiche 2)}$$

d'où, la fonction $x \longmapsto d(x,A)$ est lipshitzienne. donc uniformément continue.

2) On a

$$V(A,r) = f^{-1}(]-\infty, r[\,,$$

où $f(x) = d(x,A)$. Comme f est continue et $]-\infty, r[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$, alors $V(A,r)$ est ouvert.

$$V'(A,r) = f^{-1}(]-\infty, r]),$$

$V'(A,r)$ est fermé car c'est image réciproque du fermé $]-\infty, r]$ par l'application continue f.

On a

$$x \in \overline{A} \Leftrightarrow d(x,A) = 0.$$

Donc,

$$\begin{aligned}
\forall x &\in \overline{A} \text{ et } \forall r > 0 \ d(x, A) < r \\
&\Longrightarrow \forall x \in \overline{A},\ x \in V(A, r), \forall r > 0. \\
&\Longrightarrow \forall x \in \overline{A},\ x \in \bigcap_r V(A, r) \Longrightarrow \overline{A} \subset \bigcap_r V(A, r).
\end{aligned}$$

Réciproquement,

$$\begin{aligned}
x &\in \bigcap_r V(A, r) \Longrightarrow d(x, A) < r \ \forall r > 0. \\
&\Longrightarrow d(x, A) = 0 \Longrightarrow x \in \overline{A}.
\end{aligned}$$

Exercice 9 :

1) On a

$$\begin{aligned}
d(x, A) &= 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists y \in A \text{ tel que } d(x, y) < \forall \varepsilon \\
&\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset \\
&\Leftrightarrow x \in \overline{A}.
\end{aligned}$$

2) Soit x et y deyux éléments de $\mathbb{R}^n$. Pour tout $z \in A$, on a

$$d(x, A) \leq d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).$$

En passant à la borne inférieure, nous obtenons

$$d(x, A) - d(y, A) \leq d(x, y). \tag{2.1}$$

En échangeant les rôles de x et de y, on obtient

$$d(y, A) - d(x, A) \leq d(x, y). \tag{2.2}$$

En combinant (1) et (2), nos déduisons

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y).$$

3) Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ y & \longmapsto & d(x, y), \end{array}$$

est continue. Comme A est compact, alors f est bornée et atteint ses bornes. En particulier, elle atteint sa borne inférieure. Il existe donc $a \in A$ tel que

$$\inf_{y \in A} f(y) = \inf_{y \in A} d(x, y) = d(x, A) = d(x, a).$$

4) Nous avons

$$\begin{aligned} F &= \{x \in \mathbb{R}^n / d(x,A) = d(x,B)\} = \{x \in \mathbb{R}^n / d(x,A) - d(x,B) = 0\} \\ &= (f-g)^{-1}\{0\}, \end{aligned}$$

où $f(x) = d(x,A)$ et $g(x) = d(x,B)$. Comme f et g sont continues alors F est fermé.

Chapitre 3

FONCTIONS DIFFERENTIABLES

Exercice 1 : Etudier la différentiabilité à l'origine de l'application f : $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ qui est définie par $f(0;0) = 0$ et par $f(x;y) = \dfrac{|xy|}{\sqrt{x^2+3y^2}}$ si $(x;y) \neq (0;0)$.

Exercice 2 : Etudier la différentiablilité des fonctions suivantes :

1) $f(x,y) = x^2 + y^2$; 2) $g(x,y,z) = \sin(x^2+y) + \cos yz$; 3) $h(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$;

4) $t(x;y) = y^2 \sin \dfrac{x}{y}$ si $y \neq 0$ et $t(x;0) = 0$ si $y = 0$.

Exercice 3 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $f(x;y) = \dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2}$ si $(x;y) \neq (0;0)$ et $f(0;0) = 0$.

1) Montrer que f admet des dérivées partielles en tout point (x,y) de $\mathbb{R}^2$.

2) Montrer que f est différentiable sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ mais ne l'est pas en $(0,0)$.

Exercice 4 : Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $f(x,y) = xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ si $(x;y) \neq (0;0)$ et $f(0;0) = 0$ admet des dérivées partielles d'ordre 2 en tout point mais que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.

Exercice 5 : Soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application de classe C^2 et $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = \frac{g(x)-g(y)}{x-y} \text{ si } x \neq y; \quad f(x;x) = g'(x).$$

Montrer que f est de classe C^1 en tout point de $\mathbb{R}^2$ et calculer sa différentielle.

Exercice 6 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$f(x;y) = (x^2+y^2)\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$ si $(x;y) \neq (0;0)$ et $f(0;0) = 0.$

1) Déterminer les fonctions $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

2) Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ et calculer la différentielle de f au point $(x,y) \neq (0,0)$.

3) Montrer que les fonctions $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ ne sont pas continues en $(0,0)$ mais f est différentiable en $(0;0)$.

Exercice 7 : 1) Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$f(x;y) = (\cos x + \sin y, -\sin x + \cos y, 2\sin x \cos y)$.

1) Déterminer la matrice Jacobienne $J_{(x,y)}(f)$ de f au point (x,y).

2) Soit $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par : $g(u,v,w) = u^2+v^2+w$. Déterminer la matrice Jacobienne $J_{(u,v,w)}(g)$ de g au point (u,v,w).

3) Calculer la matrice Jacobienne $J_{(x,y)}(gof)$ de gof au point (x,y)

a) En explicitant gof. b) Au moyen d'un produit de matrices.

Exercice 8 : Soit f la fonction de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1) Montrer que f est continue en $(0,0)$.

2) Calculer en tout point $(x,y) \neq (0,0)$ $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.

3) Etudier l'existance des dérivées partielles en $(0,0)$. f est-elle différentiable en $(0,0)$?

Exercice 9 : Soient les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ et $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définies par :

$$f(x,y) = (x^2+y, x^2-y^2, 1);\ g(x,y) = (e^{x-y}, 2xy).$$

1) Rappeler la définition d'une fonction de classe C^k sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$.

2) Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

a) Déterminer les matrices jacobiennes $J_f(x,y)$ et $J_g(x,y)$ respectives de f et g.

b) Calculer de deux manières différentes la matrice jacobienne $J_{(fog)}(x,y)$ de fog.

c) Donner $d\,(fog)_{(x,y)}\,(h,k)\,,\ (h,k)\in\mathbb{R}^2$.

Exercice 10 : Soit $f:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^2$ définie par :

$$f(x,y,z)=(x^2-y-z,x^2+y^2+e^{zx}).$$

1) Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^3$.

2) Calculer en tout point $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ la matrice jacobienne de f notée $J_f\,(x,y,z)$ et donner l'expression de $df_{(x,y,z)}\,(h,k,l)\,,\ (h,k,l)\in\mathbb{R}^3$.

3) Montrer qu'il existe $r>0$ tel que pour tout $(x;y)\in\overline{B_r}((0,0,0))$ (la boule fermée de centre $(0,0,0)$ et de rayon r) on a $\left\|df_{(x;y,z)}\right\|\leq 1$.

Exercice 11 : Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f\,(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2} & \text{si} \qquad (x,y)\neq(0,0)\,,\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}\quad ;\quad g\,(x,y)=(x+y,xy)\,.$$

1) Montrer qu'il existe $K>0$ tel que $\forall x\in V\,(0,0)\,,|f(x,y)|\leq K\,\|(x,y)\|\,.$ En déduire le domaine de continuité de f.

2) Montrer que les dérivées partielles de f sont définies sur $\mathbb{R}^2$.

3) f est-elle différentiable au point $(0,0)$? Est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$?

4) Donner l'expression de $df_{(1,1)}\,(h,k)$ et $dg_{(1,1)}\,(h,k)\,.$

5) Ecrire les matrices jacobiennes de f, g, et fog.

Exercice 12 : Soit f et$g$ les foncions définies sur $O=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/x>0,x+y>0\}$ par :

$$f\,(x,y)=\left(x+y,\frac{y}{x},\frac{z}{x}\right);\quad g\,(x,y,z)=\left(x+y+z,xy-z^2\right).$$

1) L'ensemble O est-il ouvert, et pourquoi ?

2) Ecrire les matrices jacobiennes de f, g, et fog.

3) $df_{(x,y,z)}$ désigne la différentielle de f au point $(x,y,z)\,.$ Donner l'expression de $df_{(x,y,z)}\,(h,k,l)\,.$

Exercice 13 : On considère le sous -ensemble $X=\{(x,y)\,/x^3+y^3-3xy=1\}\,.$

1) Montrer que X est au voisinage de $(0,1)$ le graphe d'une fonction $x\hookleftarrow\Phi\,(x)$ de classe C^2 telle que $\Phi\,(0)=1$.

2) Donner un développement limité de Φ à l'ordre 2 en 0.

Exercice 14 : 1) Montrer que le système d'équations

$$\left\{\begin{array}{lll} x^3+y^3+z^3+t^2 & = & 0, \\ x^2+y^2+z^2+t & = & 2, \\ x+y+z+t & = & 0. \end{array}\right.$$

admet une solution $(x,y,z)=f(t)$ proche de $(0,-1,1)$ pour t donné assez petit.

2) Déterminer la dérivée de f en 0.

Exercice 15 : Montrer que l' ´equation $z^3+2z+e^{z-x-y^2}=cos(x-y+z)$ définit implicitement z comme fonction C^∞ de x et y au voisinage de 0 qui s'annule en 0. Calculer les dérivées partielles de z à l'ordre 2 en 0.

Exercice 16 : Pour quelles valeurs a,b de $\mathbb{R}$, l'application

$$f(x,y)=(x+asiny,y+bsinx)$$

est-elle un difféomorphisme local en tout point ? Montrer qu'alors c'est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur lui même.

Exercice 17 : Déterminer une solution y de l'équation $x=y+\dfrac{y}{lny}$ en x pour $x,y>0$ proches de 0, de la forme $y(x)=x\left[1+u(\dfrac{1}{lnx})\right]$ avec $u\in C^\infty$ au voisinage de 0 et $u(0)=0$. Calculer $u'(0)$ et $u''(0)$.

Exercice 18 : Déterminer les extrema de $f:(x,y)\hookleftarrow(x^2+y^2)e^{x^2-y^2}$ et préciser leur nature.

Exercice 19 : Soient $P=\{(x;y;z)\in\mathbb{R}^3/x^2+2y^2+z^2=5 \text{ et } x^2+y^2-2z=0\}$ et Φ la fonction de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par : $\Phi(x;y;z)=(x^2+2y^2+z^2-5,x^2+y^2-2z)$ et f la fonction de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(x;y;z)=y+z$.

a) Montrer que P est une partie compacte non vide de $\mathbb{R}^3$.

b) Montrer qu'en tout point m de P, le rang de la différentielle de Φ est 2.

c) Trouver les extremas de f et préciser leur nature.

Exercice 20 : On veut montrer que le système

$$\left\{\begin{array}{lll} x= & = & \frac{1}{4}\sin(x+y), \\ y= & = & 1+\frac{2}{3}arctg(x-y), \end{array}\right.$$

admet une unique solution.

1) En utilisant le théorème des accroissements finis, trouver une norme sur $\mathbb{R}^2$ telle que $f(x,y) = \left(\frac{1}{4}\sin(x+y), 1 + \frac{2}{3}arctg(x-y)\right)$ soit contractante.

2) Conclure.

DEVOIR
(A remettre avant le 27 Décembre 2013)

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$. Montrer que les les trois propositions suivantes sont équivalentes.

(i) f est continue sur $\mathbb{R}^n$.

(ii) Pour tout ouvert O de $\mathbb{R}^p$, $f^{-1}(O)$ est ouvert dans $\mathbb{R}^n$.

(iii) Pour tout fermé F de $\mathbb{R}^p$, $f^{-1}(F)$ est fermé dans $\mathbb{R}^n$.

Exercice 2. Soit E et F deux espaces vectoriels normés réels. On note $\mathcal{L}(E,F)$ (resp. $\mathcal{L}_c(E,F)$) l'ensemble des applications linéaires (resp. continues) de E dans F.

I) 1) On définit sur $\mathcal{L}(E,F)$ les lois

$$\begin{aligned} L_1 + L_2 \text{ est l'application : } &\quad x \mapsto (L_1+L_2)(x) = L_1(x) + L_2(x), \\ \lambda L_1 \text{ est l'application : } &\quad x \mapsto (\lambda L_1)(x) = \lambda L_1(x), \quad (\lambda \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Montrer que $\mathcal{L}(E,F)$ est un espace vectoriel pour les lois ainsi définies et que $\mathcal{L}_c(E,F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E,F)$.

2) Soit $L \in \mathcal{L}(E,F)$. Etablir l'équivalence des propriétés suivantes :

a) L est continue sur E.

b) L est uniformément continue.

c) L est continue en un point $x_0 \in E$.

d) L est bornée sur E (ie, $(\exists K > 0)(\forall x \in E)(\|L(x)\|_F \leq K\|x\|_E)$.

II) On suppose que E est un espace vectoriel normé de dimension finie. Soit $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ une base de E et $\| \ \|_E$ la norme définie sur E par :

$$\|x\|_E = \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \right\|_E = \sup_{1\leq i\leq n} |x_i|.$$

1) Soit $\mathbf{N}$ une norme sur E.

a) Montrer qu'il existe une constante k positive telle que :

$$\forall x \in E, \quad \mathbf{N}(x) \leq k\|x\|_E.$$

b) En déduire que $\mathbf{N}$ est uniformément continue.

2) On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme $\mathbf{N}_{(\infty)}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ par : $\mathbf{N}_{(\infty)}(x) = \sup\limits_{i=1,2,\ldots,n} |x_i|$. Soit u l'application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans E définie par : $u(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$, et v l'application définie de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ par : $v(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \mathbf{N}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i\right)$. Montrer que u et v sont continues sur $\mathbb{R}^n$.

3) Soit $\mathbf{S}$ la sphère unité de $\left(\mathbb{R}^n, \mathbf{N}_{(\infty)}\right)$, càd,

$$\mathbf{S} = \left\{(y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n / \sup_{i=1,2,\ldots,n} |y_i| = 1\right\}.$$

a) Montrer que $\mathbf{S}$ est un compact de $\mathbb{R}^n$.

b) En déduire qu'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que

$$\forall (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbf{S},\ \ v(y_1, y_2, \ldots, y_n) \geq \alpha.$$

4) Montrer que pour tout $x \in E$, $\mathbf{N}(x) \geq \|x\|_E$.

5) Conclure.

6) Montrer que $\mathcal{L}_c(E, F) = \mathcal{L}(E, F)$ et énoncer la propriété ainsi démontrée.

Exercice 3. 1) Soit f l'application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ définie par :
$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = ((1 - x_1), x_1(1 - x_2), x_1 x_2 (1 - x_3), \ldots x_1 x_2 \ldots x_{n-1}(1 - x_n))$.

a) Montrer que f est différentiable sur $\mathbb{R}^n$. Préciser la matrice jacobienne de f.

b) En déduire le jacobien de f et l'ensemble U des points où la matrice jacobienne de f est inversible. Montrer que U est ouvert.

2) On note $f_{/U}$ la restriction de f à U.

a) Prouver que $f_{/U}$ est une bijection de U sur un ensemble V que l'on déterminera. Vérifier que V est ouvert.

b) Déterminer la réciproque de $f_{/U}$, montrer qu'elle est différentiable et préciser sa matrice jacobienne.

3) En déduire la matrice inverse de la matrice (a_{ij}) carrée réelle d'ordre n définie par :

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i < j, \\ \dfrac{1}{i^2} & \text{si} \quad i > j, \\ -\dfrac{1}{i} & \text{si} \quad i = 1, 2, \ldots, n. \end{cases}$$

Corrigé

Exercice 1 : Nous avons

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{t\longrightarrow 0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t}=0,\\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{t\longrightarrow 0}\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t}=0.\end{aligned}$$

Si la fonction f est différentiable en (0,0), sa différentielle en ce point est nulle et on aura au voisinage de 0,

$$f(h,k)=f(0,0)+\|(h,k\|\,\varepsilon(h,k)$$

avec $\lim\limits_{(h,k)\longrightarrow(0,0)}\varepsilon(h,k)=0$. En prenant la norme euclidienne et en choisissant la direction $k=\lambda h$, nous obtenons

$$\frac{f(h,k)-f(0,0)}{\|(h,k\|}=\frac{|hk|}{\sqrt{h^2+k^2}\sqrt{h^2+3k^2}}=\frac{|\lambda|}{\sqrt{1+\lambda^2}\sqrt{1+3\lambda^2}},$$

quantité qui ne tend pas vers 0 quand $(h,k)\longrightarrow(0,0)$. Donc, f n'est pas différentiable en (0,0).

Exercice 2 : 1) La fonction f est un polynôme. Donc, elle est différentiable en tout point de $\mathbb{R}^2$ et pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on a

$$df_{(x,y)}=2xdx+2ydy,$$

et pour tout $(h,k)\in\mathbb{R}^2$, nous avons,

$$df_{(x,y)}(h,k)=2hx+2ky.$$

2) g est différentiable sur $\mathbb{R}^3$ comme somme et composée de fonctions différentiables sur $\mathbb{R}^3$. Pour tout $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, on a

$$dg_{(x,y,z)}=2x\cos(x^2+y)dx+\left[\cos(x^2+y)-z\sin(yz)\right]dy-y\sin(yz)\,dz,$$

et pour tout $(h,k,l)\in\mathbb{R}^3$, nous avons,

$$dg_{(x,y,z)}(h,k,l)=2hx\cos(x^2+y)+k\left[\cos(x^2+y)-z\sin(yz)\right]-ly\sin(yz).$$

3) La fonction h est différentiable sur $\mathbb{R}^2/\{(0,0)\}$ comme composée de fonctions différentiables sur $\mathbb{R}^2$. Pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2/\{(0,0)\}$, on a

$$dh_{(x,y)}=\frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}}dx+\frac{2y}{\sqrt{x^2+y^2}}dy.$$

Etudions la différentiabilité en (0,0). Nous avons

$$\frac{h\,(t,0)-h(0,0)}{t}=\frac{h\,(0,t)-h(0,0)}{t}=\frac{\sqrt{t^2}}{t}.$$

Ces quantités n'ont pas de limite lorsque t tend vers 0. Donc, les dérivées partielles en (0,0) n'existe pas. Par conséquent, h n'est pas différentiable en (0,0).

4) La fonction t est différentiable sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$ comme produit et composée de fonctions différentiables. Pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$, on a

$$dt_{(x,y)}=y\cos\left(\frac{x}{y}\right)dx+\left[2y\sin\left(\frac{x}{y}\right)-x\cos\left(\frac{x}{y}\right)\right]dy.$$

D'autre part, pour tout $a\in\mathbb{R}$ et pour tout (h,k) proche de (0,0), on a

$$\frac{|t(a+h,k)-t(a,0)|}{\|(h,k)\|}=\frac{k^2\left|\sin\left(\dfrac{a+h}{k}\right)\right|}{\sqrt{h^2+k^2}}\leq|k|\,.$$

Donc,

$$\lim_{(h,k)\longrightarrow(0,0)}\frac{|t(a+h,k)-t(a,k)|}{\|(h,k)\|}=0.$$

$\Longrightarrow t$ est différentiable en $(a,0)$ et sa différentielle en ce point est l'application nulle.

Exercice 3 : 1) Pour tout $(x,y)\neq(0,0)$, on a

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)&=\frac{x^4+3x^2y^2+2xy^3}{(x^2+y^2)^2},\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)&=-\frac{y^4+3x^2y^2+2yx^3}{(x^2+y^2)^2}.\end{aligned}$$

Au point (0,0), on a

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)&=\lim_{t\longrightarrow0}\frac{f\,(t,0)-f(0,0)}{t}=1 \text{ et}\\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)&=\lim_{t\longrightarrow0}\frac{f\,(0,t)-f(0,0)}{t}=-1.\end{aligned}$$

Donc, f admet des dériveés partielles en tout point (x,y) de $\mathbb{R}^2$.

2) La fonction f est différentiable en tout point $(x,y)\neq(0,0)$ et sa différentielle en ce point est l'application linéaire $df_{(x,y)}$ définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$df_{(x,y)}\,(h,k)=h\frac{x^4+3x^2y^2+2xy^3}{(x^2+y^2)^2}-k\frac{y^4+3x^2y^2+2yx^3}{(x^2+y^2)^2}.$$

Si f est différentiable en (0,0), sa différentielle en ce point serait l'application linéaire $df_{(0,0)}$ définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$df_{(0,0)}\,(h,k) = h\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) + k\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = h - k,$$

et nous aurons au voisinage de (0,0),

$$f(h,k) - (h-k) = \|(h,k)\|\,\varepsilon\,(h,k)\,,$$

avec $\lim\limits_{(h,k)\longrightarrow(0,0)} \varepsilon\,(h,k) = 0$. Soit en prenant la norme euclidienne

$$\lim_{(h,k)\longrightarrow(0,0)} \frac{f(h,k)-(h-k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0.$$

Nous allons prouver que ceci n'est pas vrai, ce qui montrera que f n'est pas différentiable en $(0,0)$. Sur la direction $k = \lambda h$, on a

$$\frac{f(h,k)-(h-k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{\dfrac{h^3-\lambda^{3h}k^3}{h^2+\lambda^2h^2} - (h-\lambda h)}{\sqrt{h^2+\lambda^2h^2}} = \frac{h}{|h|}\frac{\lambda\,(1-\lambda)}{(1+\lambda^2)^{\frac{3}{2}}},$$

quantité qui n'admet pas de limite quand $h \longrightarrow 0$. Donc, f n'est pas différentiable en (0,0).

Exercice 4 : La fonction f est de classe C^∞ dans $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ comme quotient de fonctions de classe C^∞. Nous avons

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{t\longrightarrow 0}\frac{f\,(t,0)-f(0,0)}{t} = 0 \text{ et}\\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{t\longrightarrow 0}\frac{f\,(0,t)-f(0,0)}{t} = 0.\\ &.\end{aligned}$$

et pour $(x,y) \neq (0,0)$, on a

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{y\,(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2},\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= -\frac{x\,(y^4+4x^2y^2-x^4)}{(x^2+y^2)^2}.\end{aligned}$$

D'où,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(0,k) &= -k \text{ si } k\neq 0,\\ \frac{\partial f}{\partial y}(h,0) &= h \text{ si } h\neq 0.\end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) &= \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(h,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{h} = 1, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) &= \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(0,k) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{k} = -1.
\end{aligned}$$

Les dérivées partielles d'ordre 2 en existent en (0,0). Cependant, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$. Donc, f n'est pas de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 5 : Soit $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x = y\}$. La fonction f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2 \backslash \Delta$ (quotient de fonctions de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2 \backslash \Delta$). Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \Delta$, on a

$$\begin{aligned}
df_{(x,y)} &= \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\, dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\, dy \\
&= \frac{g'(x)\,[x-y] - [g(x) - g(y)]}{(x-y)^2} dx + \frac{-g'(y)\,[-y] + [g(x) - g(y)]}{(x-y)^2} dy.
\end{aligned}$$

Montrons que f est continue sur Δ. Puisque g est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, alors

$$g(y) = g(x) + (y-x)\, g'(c_{x,y}),$$

où $c_{x,y}$ est compris entre x et y. D'où,

$$\lim_{(x,y) \longrightarrow (a,a)} \frac{g(x) - g(y)}{x - y} = \lim_{(x,y) \longrightarrow (a,a)} g'(c_{x,y}) = g'(a) = f(a,a).$$

Donc, f est continue sur Δ. Pour montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$, il suffit de montrer que les dérivées partielles de f se prolongent par continuité sur $\mathbb{R}^2$. Le développement limité de g à l'ordre 2 entre x et y donne

$$\begin{aligned}
g(x) &= g(y) + (x-y)\, g'(y) + \frac{(x-y)^2}{2} g''(d_{x,y}), \\
g(y) &= g(x) + (y-x)\, g'(x) + \frac{(y-x)^2}{2} g''(e_{x,y}),
\end{aligned}$$

où $d_{x,y}$ et $e_{x,y}$ sont des réels compris entre x et y. Donc,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{g''(e_{x,y})}{2}, \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{g''(d_{x,y})}{2}.
\end{aligned}$$

Comme g est de classe C^2, alors

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(a,a)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{(x,y)\longrightarrow(a,a)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{g''(a)}{2}.$$

D'où, les dérivées partielles de f sont continiues. Donc, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 6 : 1) Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, nous avons

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 2x \sin \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \left(x^2+y^2\right) \frac{x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \cos \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, \\
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 2y \sin \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \left(x^2+y^2\right) \frac{y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \cos \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}.
\end{aligned}$$

Pour $x \neq 0$ et $y \neq 0$, nous avons

$$\begin{aligned}
f(x,0) &= x^2 \sin\left(\frac{1}{|x|}\right), \\
f(x,0) &= y^2 \sin\left(\frac{1}{|y|}\right).
\end{aligned}$$

D'où,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{f(x,0)}{x} = \lim_{x\longrightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{|x|}\right) = 0, \\
\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{y\longrightarrow 0} \frac{f(0,y)}{y} = \lim_{x\longrightarrow 0} y \sin\left(\frac{1}{|y|}\right) = 0.
\end{aligned}$$

Les dérivées partielles de f sont définies et continues sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Donc, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. La différentielle de f au point $(x,y) \neq (0,0)$ est donnée par :

$$\begin{aligned}
df_{(x,y)} &= \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dx + \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dy \\
&= \left[2x \sin \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \left(x^2+y^2\right) \frac{x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \cos \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right] dx \\
&\quad + \left[2y \sin \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \left(x^2+y^2\right) \frac{y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \cos \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right] dy.
\end{aligned}$$

3) On a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,0) &= 2x\sin\left(\frac{1}{|x|}\right) - \frac{x}{|x|}\cos\left(\frac{1}{|x|}\right),\\
\frac{\partial f}{\partial y}(0,y) &= 2y\sin\left(\frac{1}{|y|}\right) - \frac{y}{|y|}\cos\left(\frac{1}{|y|}\right).
\end{aligned}$$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,y)$ n'ont pas de limite quand $x \longrightarrow 0$ et $y \longrightarrow 0$. Donc les fonctions $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ ne sont pas continues en (0,0). Cependant, la fonction f est différentiable en (0,0) car, en prenant la norme euclidienne, nous avons pour $(x,y) \neq (0,0)$,

$$\frac{|f(x,y)|}{\|(x,y)\|} = \frac{|f(x,y)|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \sqrt{x^2+y^2}.$$

Donc,

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{|f(x,y)|}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

Ce qui montre que f est différentiable en (0,0) et sa différentielle en ce point est nulle.

<u>Exercice 7 :</u>

1) La matrice jacobienne de f est donnée par :

$$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} -\sin x & \cos y \\ -\cos x & -\sin y \\ 2\cos x\cos y & -2\sin x\sin y \end{pmatrix}.$$

2) La matrice jacobienne de g est donnée par :

$$J_g(u,v,w) = \begin{pmatrix} 2u & 2v & 1 \end{pmatrix}.$$

3) a) On a

$$\begin{aligned}
gof(x,y) &= g\left[f(x,y)\right] = g(\cos x + \sin y, -\sin x + \cos y, 2\sin x\cos y)\\
&= (\cos x + \sin y)^2 + (-\sin x + \cos y)^2 + 2\sin x\cos y\\
&= 2 + 2\cos x\sin y.
\end{aligned}$$

D'où,

$$Jgof(x,y) = \begin{pmatrix} -2\sin x\sin y, & 2\cos x\cos y \end{pmatrix}.$$

b) On a

$$\begin{aligned}
Jgof(x,y) &= J_g(f(x,y)\times J_f(x,y)\\
&= J_g\left(\cos x+\sin y, -\sin x+\cos y, 2\sin x\cos y\right)\times\begin{pmatrix}-\sin x & \cos y\\ -\cos x & -\sin y\\ 2\cos x\cos y & -2\sin x\sin y\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} 2(\cos x+\sin y), & 2(-\sin x+\cos y) & ,1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-\sin x & \cos y\\ -\cos x & -\sin y\\ 2\cos x\cos y & -2\sin x\sin y\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} -2\sin x\sin y & 2\cos x\cos y\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Exercice 8 :

1) Pour tout $(x,y)\neq(0,0)$, nous avons

$$\begin{aligned}
|f(x,y)| &= \left|\frac{x^2+xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leq \frac{x^2+|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}}\\
&\leq \frac{x^2+|xy|}{\sqrt{x^2}} = \frac{x^2+|xy|}{|x|} = |x|+|y|.
\end{aligned}$$

Donc, $\lim\limits_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} f(x,y)=0$. Par suite, f est continue au point $(0,0)$.

2) Pour tout $(x,y)\neq(0,0)$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{2x+y}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x(x^2+xy)}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x^3+y^3+2xy^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}\\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{y(x^2+xy)}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x^3-yx^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}.
\end{aligned}$$

3) On a

$$\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\longrightarrow 0}\frac{h^2}{h|h|},$$

quantité qui n'admet pas de limite quand $h\longrightarrow 0$. Donc, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ n'existe pas. De même,

$$\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=0.$$

Donc, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$. $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ n'existe pas. Donc, f n'est pas différentiable au point $(0,0)$.

Exercice 9 :

1) une fonction f est dite de classe C^k sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ si f admet toutes les dérivées partielles d'ordre k sur U et que celles-ci sont continues sur U.

2)

a) Les matrices jacobiennes $J_f(x,y)$ et $J_g(x,y)$ de f est g sont données par :

$$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & 1 \\ 2x & -2y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad J_g(x,y) = \begin{pmatrix} e^{x-y} & -e^{x-y} \\ 2y & 2x \end{pmatrix}.$$

b)

• Calcul de $J_{(fog)}(x,y)$ par utilisation de l'expression de fog. Nous avons

$$\begin{aligned} (fog)(x,y) &= f[g(x,y)] = \left(\left[e^{x-y}\right]^2 + 2xy, \left[e^{x-y}\right]^2 - [2xy]^2, 1\right) \\ &= \left(e^{2x-2y} + 2xy, e^{2x-2y} - 4x^2y^2, 1\right). \end{aligned}$$

D'où,

$$J_{(fog)}(x,y) = \begin{pmatrix} 2e^{2x-2y} + 2y & -2e^{2x-2y} + 2x \\ 2e^{2x-2y} - 8xy^2 & -2e^{2x-2y} - 8x^2y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

• Calcul de $J_{(fog)}(x,y)$ par utilisation des matrices jacobiennes. Nous avons

$$\begin{aligned} J_{(fog)}(x,y) &= J_f[g(x,y)] \times J_g(x,y) \\ &= \begin{pmatrix} 2e^{x-y} & 1 \\ 2e^{x-y} & -4xy \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{x-y} & -e^{x-y} \\ 2y & 2x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2e^{2x-2y} + 2y & -2e^{2x-2y} + 2x \\ 2e^{2x-2y} - 8xy^2 & -2e^{2x-2y} - 8x^2y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

c) On a

$$\begin{aligned}
\left[d\,(fog)_{(x,y)}\,(h,k)\,,(h,k)\right]^t &= J_{(fog)}(x,y)\times(h,k)^t \\
&= \begin{pmatrix} 2e^{2x-2y}+2y & -2e^{2x-2y}+2x \\ 2e^{2x-2y}-8xy^2 & -2e^{2x-2y}-8x^2y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} h\,(2e^{2x-2y}+2y)+k\,(-2e^{2x-2y}+2x) \\ h\,(2e^{2x-2y}-8xy^2)+k\,(-2e^{2x-2y}-8x^2y) \\ 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Donc,

$$d\,(fog)_{(x,y)}\,(h,k)\,,(h,k) = \begin{pmatrix} h\,(2e^{2x-2y}+2y)+k\,(-2e^{2x-2y}+2x)\,, \\ h\,(2e^{2x-2y}-8xy^2)+k\,(-2e^{2x-2y}-8x^2y)\,,0 \end{pmatrix}.$$

<u>Exercice 10 :</u>

1) Les composantes de f sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^3$. Donc f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^3$. A fortiori, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^3$.

2) La matrice jacobienne de f est donnée par :

$$J_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x & -1 & -1 \\ 2x+ze^{zx} & 2y & xe^{zx} \end{pmatrix}.$$

Pour tout $(h,k,l)\in\mathbb{R}^3$, on a

$$df_{(x,y,z)}(h,k,l) = (2xh-k-l,(2x+ze^{zx})\,h+2yk+lxe^{zx})\,.$$

3)

<u>Exercice 11 :</u> 1) La fonction f est définie et continue sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$. D'autre part, on a

$$|f(x,y)| = \frac{|x^3-y^3|}{x^2+y^2} = \frac{|x-y|\,(x^2+y^2+xy)}{x^2+y^2}.$$

Or,

$$0\le |xy| \le \frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right).$$

Donc,

$$|f(x,y)| \le \frac{3}{2}\,|x-y| = \frac{3}{2}\,\|(x,y)\|\,.$$

Donc, f est continue en (0,0). Par suite, f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

2) La fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$. Donc les dérivées partielles de f existent sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$. Pour $(x,y)\neq(0,0)$, on a

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=\frac{x^4+3x^2y^2-2xy^3}{\left(x^2+y^2\right)^2},$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=\frac{-y^4-3x^2y^2-2yx^3}{\left(x^2+y^2\right)^2}.$$

D'autre part, nous avons

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}=\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{x^3}{x^2}=0,$$

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial y}=\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{-y^3}{y^2}=0.$$

Donc, les dérivées partielles de f au point (0,0) existent. Donc, des dérivées partielles de f sont définies sur $\mathbb{R}^2$.

3) Si f est différentiable en (0,0), sa différentielle en ce point est nulle. Prenons comme norme la norme euclidienne. On a

$$\frac{f(h,k)-f(0,0)}{\|(h,k)\|}=\frac{h^3-k^3}{\left(h^2+k^2\right)\sqrt{\left(h^2+k^2\right)}}.$$

Sur la direction $h=\lambda k$, $k>0$, nous avons

$$\begin{aligned}\frac{f(\lambda k,k)-f(0,0)}{\|(\lambda k,k)\|} &= \frac{\lambda^3k^3-k^3}{\left(\lambda^2k^2+k^2\right)\sqrt{\left(\lambda^2k^2+k^2\right)}}\\ &= \frac{\lambda^3-1}{\left(\lambda^2+1\right)^2\sqrt{\left(\lambda^2+1\right)}},\end{aligned}$$

et cette quantité n'admet pas de limite. Donc, f n'est pas différentiable au point $(0,0)$. A fortiori elle n'est pas de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

4) Pour tout $(x,y)\neq(0,0)$, on a

$$df_{(x,y)}(h,k)=h\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}+k\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$$

Comme

$$\frac{\partial f(1,1)}{\partial x}=\frac{1}{2}\text{ et }\frac{\partial f(1,1)}{\partial y}=-\frac{3}{2},$$

alors

$$df_{(1,1)}(h,k) = \frac{h}{2} - \frac{3k}{2}.$$

De même,

$$dg_{(x,y)}(h,k) = \left(h\frac{\partial g_1(x,y)}{\partial x} + k\frac{\partial g_1(x,y)}{\partial y}, h\frac{\partial g_2(x,y)}{\partial x} + k\frac{\partial g_2(x,y)}{\partial y}\right),$$

avec

$$g_1(x,y) = x+y;\ g_2(x,y) = xy.$$

Donc,

$$\frac{\partial g_1(x,y)}{\partial x} = 1;\ \frac{\partial g_1(x,y)}{\partial y} = 1,$$

$$\frac{\partial g_2(x,y)}{\partial x} = y;\ \frac{\partial g_2(x,y)}{\partial y} = x.$$

D'où,

$$dg_{(1,1)}(h,k) = (h+k, h+k).$$

5) Pour tout $(x,y) \neq (0,0)$, on a

$$J_f(x,y) = \left(\frac{x^4+3x^2y^2-2xy^3}{(x^2+y^2)^2}, \frac{-y^4-3x^2y^2-2yx^3}{(x^2+y^2)^2}\right).$$

Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$Jg(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ y & x \end{pmatrix}.$$

Donc, pour tout $(x,y) \neq 0$, nous avons

$$\begin{aligned} J_{fog}(x,y) &= J_f(x,y) \times Jg(x,y) \\ &= \left(\frac{x^4+3x^2y^2-2xy^3}{(x^2+y^2)^2}, \frac{-y^4-3x^2y^2-2yx^3}{(x^2+y^2)^2}\right)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ y & x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \dfrac{x^4+3x^2y^2-2xy^3}{(x^2+y^2)^2} - \dfrac{y^5+3x^2y^3+2y^2x^3}{(x^2+y^2)^2} \\ \\ \dfrac{x^4+3x^2y^2-2xy^3}{(x^2+y^2)^2} - \dfrac{xy^4+3x^3y^2+2yx^4}{(x^2+y^2)^2} \end{pmatrix}^t. \end{aligned}$$

<u>EXERCICE 12</u> Trouver les extrema de $f(x,y) = (x^2+y^2)\,e^{x^2-y^2}$.

Les points critiques vérifient le système d'équations

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0\\\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l}\left[2x+2x\left(x^2+y^2\right)\right]e^{x^2-y^2}=2x\left(1+x^2+y^2\right)e^{x^2-y^2}=0\\\left[2y-2y\left(x^2+y^2\right)\right]e^{x^2-y^2}=2y\left(1-x^2-y^2\right)e^{x^2-y^2}=0\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l}x=0\\y=0 \text{ ou } 1-x^2-y^2=0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l}x=0\\y=0 \text{ ou } y=1 \text{ ou } y=-1.\end{array}\right.$$

Les points stationnaires sont : $(0,0)$, (0,1) et (0,-1).

On a

$$\begin{array}{rcl}r&=&\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=\left[2\left(1+x^2+y^2\right)+4x^2+4x^2\left(1+x^2+y^2\right)\right]e^{x^2-y^2}\\t&=&\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=\left[2\left(1-x^2-y^2\right)-4y^2-4y^2\left(1-x^2-y^2\right)\right]e^{x^2-y^2}\\s&=&\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=\left[4xy-4xy\left(\left(1+x^2+y^2\right)\right)\right]e^{x^2-y^2}.\end{array}$$

• au point $(0,0)$. $r=2$; $t=2$ et $s=0$. $s^2-rt=-4<0$ et $r>0 \Longrightarrow$ $(0,0)$ est un minimum local.

On remarque que

$$f(x,y)\geq 0=f(0,0)\Longrightarrow (0,0) \text{ est un minimum global..}$$

• Pour (0,1) et (0,-1), on trouve que $s^2-rt>0 \Longrightarrow$(0,1) et (0,-1) sont des points selles.

EXERCICE; Trouver les extrema de $f(x,y)=xe^y+y\ln(x)$.

Les points critiques vérifient le système d'équations

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0\\\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l}e^y+\dfrac{y}{x}=0\\xe^y+\ln x=0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l}e^y=-\dfrac{y}{x}\\y=\ln x\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l}y=\ln x\\x^2+\ln x=0\end{array}\right.$$

La fonction $g:x\longmapsto x^2+\ln x$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. L'etude de cette fonction montre qu'il existe un et un seul point $\alpha\in\,]0,1[$ tel que $g(\alpha)=0$. Donc, il existe un et un seul point $\alpha \in]0,1[$ tel que $\alpha^2 + \ln \alpha = 0$. Nous avons

$$\begin{aligned}
r &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{-y}{x^2} \\
t &= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = xe^y \\
s &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = e^y + \frac{1}{x}
\end{aligned}$$

Au point $(\alpha, \ln \alpha)$, on a $s^2 - rt = \left[\alpha + \frac{1}{\alpha}\right]^2 + \frac{\alpha \ln \alpha}{\alpha} = \left[e^\alpha + \frac{1}{\alpha}\right]^2 - \alpha^2 = 2 + \frac{1}{\alpha^2} > 0. \Longrightarrow$ pas d'extremum