Systèmes différentiels linéaires coefficients constants

A. Kissami & M. Derouich

Un système différentiel linéaire du premier ordre à coefficients constants est un système de la forme :

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{ccccccccc} y_1' & = & a_{11}y_1 & + & a_{12}y_2 & + & \cdots & a_{1n}y_n & + & b_1(t), \\ \vdots & = & \vdots & & \vdots & \vdots & & & & \\ y_n' & = & a_{n1}y_1 & + & a_{n2}y_2 & + & & a_{nn}y_n & + & b_n(t), \end{array} \right.$$

où $n \in \mathbb{N}^*$, $a_{ij} \in \mathbb{C}$, $1 \leq i, j \leq n$, $b_1, b_2, \cdots, b_n$ sont des fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ et $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sont des fonctions inconnues dérivables sur I.

Posons $\quad A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}, \quad Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}, \quad B(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}.$

Le système différentiel (S) se présente donc sous la forme matricielle

$$(S) \qquad Y'(t) = AY(t) + B(t), \quad t \in I.$$

Résoudre le système (S) c'est trouver tous les vecteurs $Y(t)$ qui le vérifient.

On appelle **système homogène** ou **système sans second membre** associé au système (S), le système

$$(S_0) \qquad Y'(t) = AY(t), \quad t \in I.$$

2.1.2 Exemples

1. Le système
$$\begin{cases} x'(t) & = & y(t) \\ y'(t) & = & -x(t), \end{cases}$$
est un système différentiel linéaire homogène à coefficients constants. Il s'écrit sous la forme
$$Y'(t) = AY(t) \quad \text{avec} \quad Y(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \text{ et } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Le système
$$\begin{cases} x' & = & 2y + 2z + t, \\ y' & = & -x + 2y + 2z - t^2, \\ z' & = & -x + y + 3z, \end{cases}$$
est un système différentiel linéaire à coefficients constants avec second membre. Il s'écrit sous la forme
$$Y'(t) = AY(t) + B(t),$$

avec

$$Y(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, B(t) = \begin{pmatrix} t \\ -t^2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

1. 3) Le système

$$\begin{cases} x' = t^2 x - y \\ y' = x \ln t + e^t, \end{cases}$$

est un système différentiel mais pas à coefficients constants car la matrice associée au système

$$A = \begin{pmatrix} t^2 & -1 \\ \ln t & 0 \end{pmatrix}$$

est une fonction de t. Par la suite, on va examiner que des systèmes différentiels linéaires à coefficients constants càd, la matrice A associée au système est une matrice carrée d'ordre n indépendante de t.

Proposition 1.1

Soit A une matrice carrée d'ordre n à coefficients constants dans $\mathbb{K}$ $(\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$ **diagonalisable**. *Notons $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, les valeurs propres de A et $u_1, u_2, \cdots, u_n$, les vecteurs propres associés. Alors, l'ensemble de solutions du système homogène*

$$(S_0) \quad Y'(t)) = AY(t),$$

sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension n. La solution du système (S_0) est donnée par :

$$Y(t) = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} u_1 + \alpha_2 e^{\lambda_2 t} u_2 + \cdots + \alpha_n e^{\lambda_n t} u_n.$$

Si de plus, $Y(0) = X_0$, la solution du sysètme (S_0) existe et elle est unique.

Preuve : Puisque A est une matrice diagonalisable, alors il existe une matrice P de passage dont la $i^{\text{ème}}$ colonne est le vecteur u_i et telle que

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Posons

$$Z = P^{-1}Y \iff Y = PZ.$$

On a

$$Z' = P^{-1}Y' \iff Y' = PZ'.$$

Donc,

$$\begin{aligned} Y' &= AY \iff PZ' = APZ \\ &\iff Z' = P^{-1}APZ \iff Z' = DZ. \end{aligned}$$

Posons $\quad Z(t) = \begin{pmatrix} z_1(t) \\ \vdots \\ z_n(t) \end{pmatrix}.$

Le système (S_0) devient alors $Z'(t) = DZ(t)$, soit

$$(S'_0) \qquad \begin{cases} z'_1(t) & = & \lambda_1 z_1(t), \\ \vdots & & \\ z'_n(t) & = & \lambda_n z_n(t). \end{cases}$$

Les solutions du système (S'_0) sont données par :

$$\begin{cases} z_1(t) & = & \alpha_1 e^{\lambda_1 t}, \\ z_2(t) & = & \alpha_2 e^{\lambda_2 t}, \\ \vdots & & \\ z_n(t) & = & \alpha_n e^{\lambda_n t}, \ (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Finalement, la solution du système (S_0) est

$$Y(t) = PZ(t) = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} u_1 + \alpha_2 e^{\lambda_2 t} u_2 + \cdots + \alpha_n e^{\lambda_n t} u_n, \ \ (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Remarque 1.1

Le calcul de P^{-1} est inutile dans la résolution du système.

Exemple 1

Résoudre le système

$$(S_0) \quad \left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & y, \\ y' & = & z, \\ z' & = & -5x+5y+z. \end{array} \right.$$

Le système (S_0) est équivalent au système

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -5 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exemple (suite)

- *Recherche des valeurs propres*

$$
\begin{aligned}
\det(A-\lambda I) &= 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -5 & 5 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \\
&\Leftrightarrow -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 5 & 1-\lambda \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -\lambda & 1 \end{vmatrix} = 0 \\
&\Leftrightarrow -\lambda^3 + \lambda^2 + 5\lambda - 5 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1,\ \lambda = \pm\sqrt{5}.
\end{aligned}
$$

Les valeurs propres de A sont simples.
Donc, A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

Exemple (suite)

- *Recherche des vecteurs propres*
  - *Vecteur propre associé à la valeur propre* $\lambda = 1$.

Soit $X = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ *un vecteur propre associé à la valeur propre* $\lambda = 1$.

On a

$$\begin{aligned} AX = X &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -5 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \beta = \alpha, \\ \gamma = \beta, \\ -5\alpha + 5\beta + \gamma = \gamma. \end{cases} \end{aligned}$$

Donc, $\alpha = \beta = \gamma$.

On prend comme vecteur propre associé à $\lambda = 1$, *le vecteur* $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exemple (suite)

– *Vecteur propre associé à la valeur propre* $\lambda = \sqrt{5}$. *Soit*
$X = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ *un vecteur propre associé à la valeur propre* $\lambda = \sqrt{5}$.
On a

$$\begin{aligned} AX = \sqrt{5}X &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -5 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \sqrt{5} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \beta = \alpha\sqrt{5} \\ \gamma = \beta\sqrt{5} \\ -5\alpha + 5\beta + \gamma = \gamma\sqrt{5}. \end{array} \right. \end{aligned}$$

La solution du système est $\beta = \alpha\sqrt{5}$, $\gamma = 5\alpha$. *On prend comme vecteur propre associé à* $\lambda = \sqrt{5}$, *le vecteur* $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{5} \\ 5 \end{pmatrix}$.

Exemple (suite)

– *Vecteur propre associé à la valeur propre* $\lambda = -\sqrt{5}$.

Soit $X = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ *un vecteur propre associé à la valeur propre* $\lambda = -\sqrt{5}$.

$$\text{On a} \quad AX = -\sqrt{5}X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -5 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = -\sqrt{5} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \beta = -\sqrt{5}\alpha, \\ \gamma = -\beta\sqrt{5}, \\ -5\alpha + 5\beta + \gamma = -\gamma\sqrt{5}. \end{cases}$$

Donc, $\beta = -\sqrt{5}\alpha$, $\gamma = 5\alpha$. *On prend comme vecteur propre associé à* $\lambda = -\sqrt{5}$, *le vecteur* $u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{5} \\ 5 \end{pmatrix}$.

Exemple (suite)

La matrice P *de passage de la base canonique* (e_1, e_2, e_3) *à la base des vecteurs propres* (u_1, u_2, u_3) *est donnée par*

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \sqrt{5} & -\sqrt{5} \\ 1 & 5 & 5 \end{pmatrix}.$$

- *Résolution du système* (S_0). *D'après la proposition 1.1, la solution est*

$$\begin{aligned} Y(t) &= \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} u_1 + \alpha_2 e^{\lambda_2 t} u_2 + \alpha_n e^{\lambda_n t} u_3 \\ &= \alpha_1 e^{t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 e^{\sqrt{5}t} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{5} \\ 5 \end{pmatrix} + \alpha_3 e^{-\sqrt{5}t} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{5} \\ 5 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3$. *Donc,*

Exemple (suite)

$$\begin{cases} x(t) &= \alpha_1 e^t + \alpha_2 e^{\sqrt{5}t} + \alpha_3 e^{-\sqrt{5}t}, \\ y(t) &= \alpha_1 e^t + \alpha_2 \sqrt{5} e^{\sqrt{5}t} - \sqrt{5}\alpha_3 e^{\sqrt{5}t}, \\ z(t) &= \alpha_1 e^t + 5\alpha_2 e^{\sqrt{5}t} + 5\alpha_3 e^{\sqrt{5}t}, \ (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

Si on connait la condition initiale $Y(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$*, pour chercher* α_1*,* α_2 *et* α_3*, on résout le système*

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

2.1.3.2. Cas où A est une matrice diagonalisable dans $\mathbb{C}$

On résout le système dans $\mathbb{C}$ comme dans le cas précédent. Les valeurs propres complexes sont deux à deux conjuguées.
Donc, les vecteurs propres sont conjugués deux à deux.
On remplace, dans la famille génératrice des solutions, (pour les valeurs propres non réelles)

$$\alpha e^{\lambda t} u + \beta e^{\overline{\lambda} t} \overline{u},$$

par :

$$a \,\mathrm{Re}\left(e^{\lambda t} u\right) + b \,\mathrm{Im}\left(e^{\lambda t} u\right), \quad a, \ b \in \mathbb{R}.$$

Pour plus de clarté, nous allons travailler sur des exemples.

Exemple 2

Résoudre le système

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ *sont* $\lambda_1 = i$ *et* $\lambda_2 = -i$. *Les vecteurs propres associés sont*

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \text{ et } u_2 = \overline{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}.$$

- *La solution du système danc* $\mathbb{C}$ *est*

$$Y(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \alpha e^{\lambda_1 t} u_1 + \beta e^{\overline{\lambda_1} t} \overline{u_1} = \alpha e^{it} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} + \beta e^{-it} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}.$$

Exemple (suite)

- *La solution du système danc $\mathbb{R}$ est*

$$\begin{aligned} Y(t) &= \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = a\,\mathrm{Re}\left(e^{it}u_1\right) + b\,\mathrm{Im}\left(e^{it}u_1\right) \\ &= a\,\mathrm{Re}\begin{pmatrix} e^{it} \\ -ie^{it} \end{pmatrix} + b\,\mathrm{Im}\begin{pmatrix} e^{it} \\ -ie^{it} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a\cos t + b\sin t \\ a\sin t - b\cos t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Exemple 3

Résoudre le système

$$\left\{ \begin{array}{lll} x' & = & x + y, \\ y' & = & -x + 2y + z, \\ z' & = & x + z. \end{array} \right.$$

Exemple (suite)

La matrice du système est $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Le polynôme caractéristique de A *est*

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \det(A - \lambda I) = (2-\lambda)(1-\lambda)^2 + 1 + 1 - \lambda \\ &= (2-\lambda)\left[(1-\lambda)^2 + 1\right]. \end{aligned}$$

La matrice A *admet trois valeurs propres*

$$\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 1 + i,\ \lambda_3 = 1 - i = \overline{\lambda_2}.$$

Les valeurs propres de A *sont simples.*
Donc, la matrice A *est diagonalisable dans* $\mathbb{C}$*.*

Exemple (suite)

On va résoudre d'abord le système dans $\mathbb{C}$.

- *Le vecteur propre associé à la valeur propre 2 est* $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- *Le vecteur propre associé à la valeur propre* $1+i$ *est* $u_2 = \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- *Le vecteur propre associé à la valeur propre* $1-i$ *est* $\overline{u_2} = \begin{pmatrix} -i \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exemple (suite)

– *Dans $\mathbb{C}$, les solutions sont données par :*

$$
\begin{aligned}
Y(t) &= \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \alpha e^{2t} u_1 + \beta e^{(1+i)t} u_2 + \gamma e^{(1-i)t} \overline{u_2} \\
&= \alpha e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta e^{(1+i)t} \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma e^{(1-i)t} \begin{pmatrix} -i \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \alpha e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta e^{t} \begin{pmatrix} -\sin t + i \cos t \\ -\cos t - i \sin t \\ \cos t + i \sin t \end{pmatrix} + \gamma e^{t} \begin{pmatrix} -\sin t - i \cos t \\ -\cos t + i \sin t \\ \cos t - i \sin t \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Exemple (suite)

– *Dans $\mathbb{R}$, les solutions sont données par :*

$$\begin{aligned} Y(t) &= \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \alpha e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + a\,\mathrm{Re}\left(e^{(1+i)t} u_2\right) + b\,\mathrm{Im}\left(e^{(1+i)t} u_2\right) \\ &= \alpha e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + a e^{t} \begin{pmatrix} -\sin t \\ -\cos t \\ \cos t \end{pmatrix} + b e^{t} \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \\ \sin t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2.1.3.3. Cas où A est une matrice trigonalisable

Dans le cas où la matrice A n'est pas diagonalisable, elle est trigonalisable dans $\mathbb{C}$. Donc, il existe une matrice de passage P telle que la matrice
$T = P^{-1}AP$,
est triangulaire. Posons $Z = P^{-1}Y \Leftrightarrow Y = PZ$.
On a

$$Z' = P^{-1}Y' \Leftrightarrow Y' = PZ'.$$

Donc,

$$\begin{aligned} Y' &= AY \Leftrightarrow PZ' = APZ = P^{-1}APZ \\ &\Leftrightarrow Z' = P^{-1}APZ \\ &\Leftrightarrow Z' = TZ. \end{aligned}$$

Si, par exemple, la matrice est triangulaire supérieure, on résout le système en partant de la dernière équation et on remonte équation par équation. On trouve Z puis on utilise la relation $Y(t) = PZ(t)$. Pour la clarté et la simplicité, on va travailler sur un exemple.

Exemple 4

Considérons le système,

$$\begin{cases} x' = & 2y + 2z, \\ y' = & -x + 2y + 2z, \\ z' = & -x + y + 3z. \end{cases}$$

La matrice du système est $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Les valeurs propres de A *vérifient l'équation*

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & 2 \\ -1 & 2-\lambda & 2 \\ -1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (\lambda - 2)^2 (\lambda - 1) = 0. \end{aligned}$$

Donc, A *admet deux valeurs propres* $\lambda_1 = 1$ *(simple) et* $\lambda_2 = 2$ *(double).*

Exemple (suite)

- *Vecteur propre associé à la valeur propre* $\lambda_1 = 1$.

Soit $u_1 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ *un vecteur propre associé à* λ_1. *On a*

$$\begin{aligned} Au_1 &= \lambda_1 u_1 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha - 2\beta - 2\gamma = 0, \\ -\alpha + \beta + 2\gamma = 0. \end{array} \right. \end{aligned}$$

Donc, $\beta = 0$ *et* $\alpha = 2\gamma$.
On prend comme vecteur propre associé à la valeur propre 1 le vecteur
$u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exemple (suite)

- *Vecteur propre associé à la valeur propre* $\lambda_2 = 2$*. Soit* $u_2 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ *un vecteur propre associé à* $\lambda_2 = 2$*. On a*

$$\begin{aligned} Au_2 &= \lambda_2 u_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha \\ 2\beta \\ 2\gamma \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -\alpha + \beta + \gamma = 0, \\ -\alpha + 2\gamma = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Donc, $\alpha = 2\gamma$ *et* $\beta = \gamma$*. On prend comme vecteur propre associé à la valeur propre 2 le vecteur* $u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exemple (suite)

On complète les vecteurs libres u_1 *et* u_2 *par un troisième vecteur pour former une base* $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ *de* $\mathbb{R}^3$*. Par exemple, on prend* $u_3 = e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$*. On vérifie que* $\det((u_1, u_2, u_3)) \neq 0$*. Donc,* $\mathcal{B}'$ *est une base de* $\mathbb{R}^3$*. On exprime* Au_3 *en fonction de* u_1, u_2 *et* u_3*. On a*

$$\begin{aligned} u_3 &= e_3 \text{ et} \\ Au_1 &= u_1,\ Au_2 = 2u_2 \text{ et } Au_3 = 2e_1 + 2e_2 + 3e_3. \end{aligned}$$

D'où,

$$e_1 = \frac{u_1 - u_3}{2},\ e_2 = u_2 - u_1 \text{ et } e_3 = u_3.$$

Par conséquent,

$$Au_3 = 2\left(\frac{u_1 - u_3}{2}\right) + 2(u_2 - u_1) + 3u_3 = -u_1 + 2u_2 + 2u_3.$$

Exemple (suite)

La matrice A *dans la nouvelle base* $\mathcal{B}'$ *est donc*

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

La matrice de passage de la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ *à la base* $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ *est*

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On résout maintenant le système $Z' = TZ$ *soit*

$$\left\{ \begin{array}{rl} z_1' = & z_1 - z_3, \\ z_2' = & 2z_2 + 2z_3, \\ z_3' = & 2z_3. \end{array} \right.$$

Exemple (suite)

Finalement,

$$Z(t) = \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_3 e^x - k_1 e^{2x} \\ (k_2 + k_1 x) e^{2x} \\ k_1 e^{2x} \end{pmatrix}, \quad (k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{C}^3.$$

La solution générale du système est donnée alors par :

$$\begin{aligned} Y(t) &= \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ x(t) \end{pmatrix} = PZ(t) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_3 e^x - k_1 e^{2x} \\ (k_2 + k_1 x) e^{2x} \\ k_1 e^{2x} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} k_3 e^x + (2k_2 - 2k_1 + 2k_1 x) e^{2x} \\ (k_2 + k_1 x) e^{2x} \\ k_3 e^x + (k_2 + k_1 x) e^{2x} \end{pmatrix}, \quad (k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

<u>Autre méthode</u> : **Règle de calcul**

Soit $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p$ les valeurs propres de la matrice A associée au système différentiel et $n_1, n_2, \cdots, n_p$ leur ordre de multiplicité respective. La solution générale du système homogène $Y'(t) = AY(t)$ s'écrit :

$$Y(t) = \sum_{k=1}^{p} e^{\lambda_k t} P_k(t),$$

où $P_k(t)$ désigne un polynôme à coefficients vectoriels de degré inférieur ou égal à $n_k - 1$. Les coefficients de $P_k(t)$ ne sont pas quelconques, on les précise par la méthode des coefficients indéterminés.

Pour la clarté, on va travailler sur un exemple.

Exemple 5

Considérons le système,

$$\begin{cases} x' = 2x - y + 2z, \\ y' = 10x - 5y + 7z, \\ z' = 4x - 2y + 2z. \end{cases}$$

La matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 10 & -5 & 7 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

Exemple (suite)

associée à ce système admet deux valeurs propres $\lambda_1 = -1$ *(simple) et* $\lambda_2 = 0$ *(double).*

Le sous-espace propre associé à la valeur propre $\lambda_1 = -1$ *est engendré par le vecteur* $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Le sous-espace propre correspondant à la valeur propre $\lambda_2 = 0$ *est engendré par le vecteur* $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. *Ce sous-espace est de dimension 1.*

Donc, A *n'est pas diagonalisable. Par application de la règle précédente, nous déduisons*

Exemple (suite)

• *La solution générale qui correspond à la valeur propre simple* $\lambda_1 = -1$ *s'écrit*

$$Y_1(t) = a \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t} = a \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \\ -2e^{-t} \end{pmatrix}.$$

• *La solution qui correspond à la valeur propre double* $\lambda_2 = 0$ *s'écrit*

$$Y_2(t) = \begin{pmatrix} \alpha_1 t + \beta_1 \\ \alpha_2 t + \beta_2 \\ \alpha_3 t + \beta_3 \end{pmatrix} e^{0t} = \begin{pmatrix} \alpha_1 t + \beta_1 \\ \alpha_2 t + \beta_2 \\ \alpha_3 t + \beta_3 \end{pmatrix}.$$

Pour déterminer les valeurs possibles de α_k *et* β_k*, nous écrivons que* $Y_2(t)$ *est solution du système*

$$Y_2'(t) = AY_2(t),$$

Exemple (suite)

$$AY_2(t) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 10 & -5 & 7 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 t + \beta_1 \\ \alpha_2 t + \beta_2 \\ \alpha_3 t + \beta_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (2\alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3)\, t + 2\beta_1 - \beta_2 + 2\beta_3 \\ (10\alpha_1 - 5\alpha_2 + 7\alpha_3)\, t + 10\beta_1 - 5\beta_2 + 7\beta_3 \\ (4\alpha_1 - 2\alpha_2 + 2\alpha_3)\, t + 4\beta_1 - 2\beta_2 + 2\beta_3 \end{pmatrix}.$$

$$Y_2'(t) = AY_2(t) \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3 & = 0, \\ 10\alpha_1 - 5\alpha_2 + 7\alpha_3 & = 0, \\ 4\alpha_1 - 2\alpha_2 + 2\alpha_3 & = 0 \end{cases},$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\beta_1 - \beta_2 + 2\beta_3 & = \alpha_1, \\ 10\beta_1 - 5\beta_2 + 7\beta_3 & = \alpha_2, \\ 4\beta_1 - 2\beta_2 + 2\beta_3 & = \alpha_3. \end{cases}$$

Exemple (suite)

La résolution de ce système donne

$$\begin{aligned}
\alpha_3 &= 0,\ \alpha_2 = 2\alpha_1 \text{ et } \alpha_1 \text{ arbitraire,}\\
\beta_2 &= 2\beta_1 + \alpha_1,\quad \beta_3 = \alpha_1,\ \text{et } \beta_1 \text{ arbitraire.}
\end{aligned}$$

D'où, la solution qui correspond à la valeur propre $\lambda_2 = 0$ *s'écrit*

$$\begin{aligned}
Y_2(t) &= \begin{pmatrix} \alpha_1 t + \beta_1 \\ \alpha_2 t + \beta_2 \\ \alpha_3 t + \beta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 t + \beta_1 \\ 2\alpha_1 t + 2\beta_1 + \alpha_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix}\\
&= \alpha_1 \begin{pmatrix} t \\ 2t+1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Exemple (suite)

Finalement, la solution générale du système est donc

$$Y(t) = Y_1(t) + Y_2(t) = a \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \\ -2e^{-t} \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} t \\ 2t+1 \\ 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Soit,

$$\begin{cases} x(t) = ae^{-t} + bt + c, \\ y(t) = -ae^{-t} + 2bt + b + 2c, \\ z(t) = -2ae^{-t} + b, \quad a, b \text{ et } c \text{ sont des constantes.} \end{cases}$$

Proposition 1.2

Proposition. Soit λ une valeur propre d'ordre n. Alors, la solution du système

$$\begin{cases} Y'(t) = AY(t), \\ Y(0) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \end{cases}$$

est donnée par :

$$\begin{aligned} Y(t) &= \left[e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} (A - \lambda I)^k \right] Y(0) \\ &= e^{\lambda t} \left[I + t(A - \lambda I) + \frac{t^2}{2} (A - \lambda I)^2 + \cdots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} (A - \lambda I)^{n-1} \right] \end{aligned}$$

Exemple 6

Considérons le système différentiel

$$\begin{cases} x' &= -4x + y + z, \\ y' &= x - y - 2z, \\ z' &= -2x + y - z. \end{cases}$$

La matrice accociée à ce système est

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Elle admet $\lambda = -2$ pour valeur propre triple.

La solution du système vérifiant $Y(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ est donnée par :

Exemple (suite)

$$\begin{aligned} Y(t) &= \left[e^{\lambda t}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{t^k}{k!}(A-\lambda I)^k\right]Y(0) \\ &= \left[e^{-2t}\sum_{k=0}^{2}\frac{t^k}{k!}(A+2I)^k\right]Y(0) \\ &= e^{-2t}\left[I+t(A+2I)+\frac{t^2}{2!}(A+2I)^2\right]Y(0). \end{aligned}$$

Nous avons,

$$A+2I=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & +1 & -2 \\ -2 & 1 & +1 \end{pmatrix}, \quad (A+2I)^2 = 3\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

D'où, la solution du système différentiel qui satisfait $Y(0)=\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ *est :*

Exemple (suite)

$$
\begin{aligned}
Y(t) &= \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \\
&= e^{-2t}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & +1 & -2 \\ -2 & 1 & +1 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \\
&\qquad + e^{-2t}\left[\frac{3t^2}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \\
&= e^{-2t}\begin{bmatrix} \left(1-2t+\frac{3t^2}{2}\right)x_0 + ty_0 + \left(t-\frac{3t^2}{2}\right)z_0 \\ \left(t+\frac{3t^2}{2}\right)x_0 + (t+1)\,y_0 - \left(2t+\frac{3t^2}{2}\right)z_0 \\ \left(-2t+\frac{3t^2}{2}\right)x_0 + ty_0 - \left(1+t-\frac{3t^2}{2}\right)z_0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Plan à suivre pour intégrer un système différentiel homogène

1. On détermine les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice associée au système différentiel.

    a) Si A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$, on applique la méthode de **2.1.3.1.**

    b) Si A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$, on applique la méthode de **2.1.3.2.**

2. Si A n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{C}$, elle est trigonalisable, on applique l'une des deux méthodes de **2.1.3.3.**
3. Si A admet une seule valeur propre d'ordre n, on applique la méthode de **2.1.3.4.**

$$(S) \qquad Y'(t) = AY(t) + B(t). \tag{1}$$

Il existe une matrice de passage P telle que la matrice $M = P^{-1}AP$, est soit diagonale soit triangulaire.
On effectue le changement de variables

$$Z(t) = \begin{pmatrix} z_1(t) \\ \vdots \\ z_n(t) \end{pmatrix} = P^{-1}Y(t), \tag{2}$$

Le système (S) devient alors

$$\left(\widetilde{S}\right) \quad Z'(t) = MZ(t) + P^{-1}B(t). \tag{3}$$

On résout le système homogène associé à (3)

$$Z'(t) = MZ(t).$$

Pour déterminer la solution générale $Z(t)$ de $\left(\widetilde{S}\right)$, il suffit d'en trouver une solution particulière. Pour cela, on utilise la méthode de la variation des constantes. Finalement, la solution générale $Y(t)$ du système (S) se déduit par la relation

$$Y(t) = PZ(t).$$

Pour la clarté, on va donner deux exemples.

Exemple 7

Résoudre le système

$$\left\{\begin{array}{rl} x' = & y + z + 3e^{-x}, \\ y' = & x + z + 3xe^{-x}, \\ z' = & x + y + 3x^2e^{-x}. \end{array}\right. \tag{4}$$

Exemple (suite)

Nous avons

$$Y'(t) = AY(t) + B(t), \tag{5}$$

avec

$$Y(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}, \ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B(t) = \begin{pmatrix} 3e^{-x} \\ 3xe^{-x} \\ 3x^2e^{-x} \end{pmatrix}.$$

La matrice A admet la valeur propre $\lambda_1 = -1$ (double) et la valeur propre $\lambda_2 = 2$ (simple).

• *Le sous-espace propre associé à la valeur propre $\lambda_1 = -1$ est engendré par les vecteurs $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.*

• *Le sous-espace propre associé à la valeur propre $\lambda_2 = 2$ est engendré par le vecteur $u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.*

Exemple (suite)

La matrice A *est diagonalisable. La matrice de passage de la base* $\mathcal{B}=(e_1,e_2,e_3)$ *à la nouvelle base* $\mathcal{B}'=(u_1,u_2,u_3)$ *est*

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

et $\quad P^{-1}AP=D=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$

Posons $\quad Z(t)=P^{-1}Y(t)=\begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \end{pmatrix},$

où, $\quad P^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$

Exemple (suite)

$$\textit{Le système (5) devient } Z'(t) = DZ(t) + P^{-1}B(t), \tag{6}$$

avec, $P^{-1}B(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \vdots \\ \varphi_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(2-t-t^2\right)e^{-t} \\ \left(-1+2t-t^2\right)e^{-t} \\ \left(1+t+t^2\right)e^{-t} \end{pmatrix}.$

Le système homogène associé à (6) admet la solution

$$Z(t) = \begin{pmatrix} k_1 e^{-t} \\ k_2 e^{-t} \\ k_3 e^{2t} \end{pmatrix}.$$

La méthode de variation des constantes donne le système

$$\begin{cases} k_1'(t) = & 2-t-t^2, \\ k_2'(t) = & -1+2t-t^2, \\ k_3'(t) = & \left(1+t+t^2\right)e^{-3t}. \end{cases}$$

Exemple (suite)

D'où, la solution particulière de (6)

$$Z_1(t) = \begin{pmatrix} \left(2t - \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3}\right) e^{-t} \\ \left(-t + t^2 - \frac{t^3}{3}\right) e^{-t} \\ -\frac{1}{27}\left(14 + 15t + 9t^2\right) e^{-t} \end{pmatrix}.$$

La solution générale du système (6) est donc

$$Z(t) = Z_1(t) + \begin{pmatrix} k_1 e^{-t} \\ k_2 e^{-t} \\ k_3 e^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(2t - \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} + k_1\right) e^{-t} \\ \left(-t + t^2 - \frac{t^3}{3} + k_2\right) e^{-t} \\ -\frac{1}{27}\left(14 + 15t + 9t^2\right) e^{-t} + k_3 e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Exemple (suite)

La solution générale du système (5) est donnée par :

$$Y(t) = PZ(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(2t - \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} + k_1\right) e^{-t} \\ \left(-t + t^2 - \frac{t^3}{3} + k_2\right) e^{-t} \\ -\frac{1}{27}\left(14 + 15t + 9t^2\right) e^{-t} + k_3 e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Soit

$$\begin{cases} x(t) & = & \left(-\frac{14}{27} + \frac{13}{9}t - \frac{5}{6}t^2 - \frac{t^3}{3}\right) e^{-t} + k_1 e^{-t} + k_3 e^{2t}, \\ y(t) & = & \left(-\frac{14}{27} - \frac{14}{9}t + \frac{2}{3}t^2 - \frac{t^3}{3}\right) e^{-t} + k_2 e^{-t} + k_3 e^{2t}, \\ z(t) & = & \left(-\frac{14}{27} - \frac{14}{9}t - \frac{5}{6}t^2 + \frac{2t^3}{3}\right) e^{-t} - (k_1 + k_2) e^{-t} + k_3 e^{2t}. \end{cases}$$

Exemple (suite)

Résoudre le système

$$\left\{\begin{array}{ll} x' = & -x+2y-6te^{2t}, \\ y' = & 2x+2y-3z-3te^{2t}, \\ z' = & -2x+2y+z-5te^{2t}. \end{array}\right. \tag{7}$$

Nous avons

$$Y'(t) = AY(t) + B(t), \tag{8}$$

avec,

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B(t) = \begin{pmatrix} -6te^{2t} \\ -3te^{2t} \\ -5te^{2t} \end{pmatrix}.$$

Exemple (suite)

Le polynôme caractéristique de A est

$$P(\lambda) = -\lambda(1-\lambda)^2.$$

Donc, A admet deux valeurs propres $\lambda_1 = 0$ (simple) et $\lambda_2 = 1$ (double). Le sous-espace propre associé à $\lambda_1 = 0$ est engendré par le vecteur $u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et le sous-espace propre associé à $\lambda_2 = 1$ est engendré par le vecteur $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
A n'est pas diagonalisable, mais on peut trigonaliser.

Exemple (suite)

On prend comme nouvelle base $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, e_3)$.
La matrice P *de passage est donnée alors par :*

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On trouve la matrice triangulaire supérieure,

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Dans la nouvelle base $\mathcal{B}'$, *le système s'écrit*

$$Z'(t) = \begin{pmatrix} z_1'(t) \\ z_2'(t) \\ z_3'(t) \end{pmatrix} = TZ(t) + P^{-1}B(t), \tag{10}$$

Exemple (suite)

En combinant (9), (10) et (11), on obtient

$$\begin{pmatrix} z_1'(t) \\ z_2'(t) \\ z_3'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6te^{2t} \\ -3te^{2t} \\ -5te^{2t} \end{pmatrix}$$

Donc,

$$\begin{cases} z_1'(t) = 3z_3(t) - 3te^{2t}, \\ z_2'(t) = z_2(t) - 6z_3, \\ z_3'(t) = z_3(t) + te^{2t}. \end{cases} \tag{12}$$

La solution générale dans la dernière équation est

$$z_3(t) = at + (t-1)\,e^{2t}, \quad a \in \mathbb{C}. \tag{13}$$

En portant l'expression de z_3 dans la deuxième équation, on obtient

$$z_2'(t) = z_2(t) - 6at - 6\,(t-1)\,e^{2t}.$$

Exemple (suite)

D'où la solution générale de z_2

$$z_2(t) = be^t - 6ate^t - 6\,(t-2)\,e^{2t}, \quad b \in \mathbb{C}. \tag{14}$$

En portant encore (13) dans la première équation de (12), on obtient la solution générale de $z_1(t)$

$$z_1(t) = 3ae^t + c - \frac{3}{2}e^{2t}, \quad c \in \mathbb{C}.$$

La solution du système initial est donné alors par :

$$\begin{aligned} Y(t) &= \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = PZ(t) = P \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}e^{2t} + 3ae^t + c \\ -6\,(t-2)\,e^{2t} + (b-6at)\,e^t \\ (t-1)\,e^{2t} + at \end{pmatrix}, \quad (a,b,c) \in \mathbb{C}^3. \end{aligned}$$

On appelle équation différentielle d'ordre n à coefficients constants, une équation de la forme

$$(E) \qquad y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = b(x),$$

où les coefficients a_k sont des constantes et b une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

On appelle équation différentielle homogène associée à E, l'équation

$$(E_0) \qquad y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0.$$

Introduisons les inconnues auxiliaires

$$(S) \qquad \begin{cases} y = y_1, \\ y_1' = y_2, \\ y_2' = y_3, \\ \vdots \\ y_{n-1}' = y_n. \end{cases}$$

On a donc

$$y^{(n)} = -\left(a_0 y_1 + a_1 y_2 + \cdots + a_{n-1} y_n\right) + b\left(x\right).$$

Posons

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0\cdots & 0 \\ & & & 1 & \vdots \\ & & & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix},$$

$$Y\left(x\right) = \begin{pmatrix} y_1\left(x\right) \\ \vdots \\ y_n\left(x\right) \end{pmatrix}, \quad B(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ b\left(x\right) \end{pmatrix}.$$

L'équation différentielle $\left(E\right)$ est équivalente au système différentiel qu'on peut écrire sous forme matricielle

$$(S) \qquad Y'\left(x\right) = AY\left(x\right) + B(x).$$

Donc, on peut appliquer les méthodes examinées précédemment. En fait, nous avons des résultats très simples et plus précis que n'en donnerait la théorie générale.
Les valeurs propres de la matrice A sont les racines de l'équation

$$Q(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0. \qquad (15)$$

Pour montrer la relation (15), il suffit de voir que si $\Lambda = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre λ, alors

$$A\Lambda = \lambda\Lambda. \qquad (16)$$

La relation (16) entraîne donc

$$y_2 = \lambda y_1, y_3 = \lambda y_2, \cdots, y_n = \lambda y_{n-1}$$

$$\lambda y_n = -\left(a_0 y_1 + a_1 y_2 + \cdots + a_{n-1} y_n\right). \qquad (17)$$

D'où,

$$y_j = \lambda^{j-1} y_1, \ j = 2, \cdots, n, \quad y_1 \neq 0.$$

En remplaçant les expressions des y_j dans (17), nous obtenons

$$\left(a_0 + a_1\lambda + \cdots + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \lambda^n\right) y_1 = 0.$$

Comme $y_1 \neq 0$, nous déduisons que

$$Q(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + \cdots + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \lambda^n = 0.$$

Par conséquent, le polynôme caractéristique de A, $P(X) = det(A - XI)$ est proportionnel à $Q(X)$. L'équation

$$a_0 + a_1 X + \cdots + a_{n-1} X^{n-1} + X^n = 0,$$

est appelée **équation caractéristique** du système différentiel (S).

Proposition 2.1

Notons $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p$ les racines complexes du polynôme

$$P(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_{n-1} X^{n-1} + X^n.$$

Soit α_k l'ordre de multiplicité de la valeur propre λ_k, $k = 1, \cdots, p$. Alors, les solutions de l'équation homogène

$$(E_0) \quad y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0,$$

sont des fonctions de la forme $\quad y = \sum_{k=1}^{p} Q_k(t) e^{\lambda_k t},$

où Q_k est un polynôme de degré $\leq \alpha_k - 1$ à coefficients dans $\mathbb{C}$.

Exemple 8

Résoudre l'équation différentielle

$$y^{(4)} + y^{(3)} - 3y'' - 5y' - 2y = 0.$$

L'équation caractéristique de l'équation différentielle est

$$\lambda^4 + \lambda^3 - 3\lambda^2 - 5\lambda - 2 = (\lambda - 2)\,(\lambda + 1)^3 = 0.$$

En vertu de la proposition 2.1, les solutions sont de la forme

$$y\,(x) = ae^{2x} + \left(bx^2 + cx + d\right) e^{-x}, \quad (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4.$$

Exemple (suite)

Résoudre l'équation différentielle

$$y^{(4)} + 2y'' + y = 0.$$

L'équation caractéristique est

$$\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = \left(\lambda^2 + 1\right)^2 = (\lambda + i)^2 (\lambda - i)^2 = 0.$$

Les solutions complexes sont donc données par :

$$y(x) = (ax + b) e^{ix} + (cx + d) e^{-ix}, \quad (a, b, c, d) \in \mathbb{C}^4.$$

Les solutions réelles sont donc données par :

$$y(x) = (\alpha x + \beta) \cos x + (\gamma x + \delta) \sin x, \quad (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4.$$

Proposition 2.2

Notons $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p$ *les racines complexes du polynôme*

$$P(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_{n-1} X^{n-1} + X^n.$$

Soit α_k *l'ordre de multiplicité de la valeur propre* λ_k, $k = 1, \cdots, p$, Q *un polynôme de degré* q *et* $r \in \mathbb{C}$. *Alors, l'équation différentielle*

$$(E_0) \quad y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = e^{rx} Q(x),$$

admet une solution particulière de la forme $\quad y_0 = e^{rx} R(x)$,
où R *est un polynôme à coefficients dans* $\mathbb{C}$ *vérifiant*

$$\text{degré } R = \begin{cases} q \text{ si } r \text{ n'est pas racine de l'équation caractéristique,} \\ q + \alpha_k \text{ si } r = \lambda_k. \end{cases}$$

Exemple 9

Résoudre l'équation différentielle (voir exemple 2.9)

$$y^{(4)} + y^{(3)} - 3y'' - 5y' - 2y = (4x - 4)\, e^x.$$

La solution générale de l'équation homogène est donnée par :

$$y_0\,(x) = ae^{2x} + \left(bx^2 + cx + d\right) e^{-x}, \quad (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4.$$

D'après la proposition 2.2, la solution particulière est de la forme

$$y_p\,(x) = (\alpha x + \beta)\, e^x.$$

Déterminons, par identification, les coefficients α et β du polynôme. Nous avons

$$\begin{aligned} y_p' &= (\alpha x + \beta + \alpha)\, e^x;\ y_p'' = (\alpha x + \beta + 2\alpha)\, e^x, \\ y_p^{(3)} &= (\alpha x + \beta + 3\alpha)\, e^x;\ y_p^{(4)} = (\alpha x + \beta + 4\alpha)\, e^x. \end{aligned}$$

Exemple (suite)

Donc,

$$y_p^{(4)} + y_p^{(3)} - 3y_p'' - 5y_p' - 2y_p = (4x - 4)\, e^x,$$

donne le système

$$\begin{cases} -8\alpha = 4 \Longrightarrow \alpha = -\frac{1}{2}, \\ -4\alpha - 8\beta = -4 \Longrightarrow \beta = 0. \end{cases}$$

D'où,

$$y_p(x) = -\frac{xe^x}{2}.$$

La solution générale de l'équation différentielle avec second membre est

$$y(x) = y_0(x) + y_p(x) = ae^{2x} + \left(bx^2 + cx + d\right) e^{-x} - \frac{xe^x}{2}$$

a, b, c *et* d *sont des réels.*

Exemple 10

Résoudre l'équation différentielle

$$y^{(3)} - y'' - y' + y = 4e^{x} - 32e^{-3x}.$$

L'équation caractéristique de l'équation différentielle est

$$X^3 - X^2 - X + 1 = (X-1)^2(X+1) = 0.$$

Cette équation admet deux racines $\lambda_1 = 1$ *(racine double) et* $\lambda_2 = -1$ *(racine simple). Donc, la solution générale de l'équation homogène est donnée par :*

$$y_0(x) = (\alpha x + \beta)\, e^{x} + \gamma e^{-x}, \quad (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3.$$

-3 *n'est pas une racine de l'équation caractéristique. Donc, la solution particulière associée au terme* e^{-3x} *est de la forme*

$$y_{p_1}(x) = Ae^{-3x}, \;\; A \in \mathbb{R}.$$

Exemple (suite)

Nous avons

$$y'_{p_1}(x) = -3Ae^{-3x};\; y''_{p_1}(x) = 9Ae^{-3x};\; y'''_{p_1}(x) = -27Ae^{-3x}. \qquad (18)$$

En identifiant,

$$y^{(3)}_{p_1} - y''_{p_1} - y'_{p_1} + y_{p_1} = -e^{-3x},$$

nous obtenons $y_{p_1}(x) = e^{-3x}$.

Puisque 1 est une racine double de l'équation caractéristique, la solution particulière associée au terme e^x *est de la forme*

$$y_{p_2}(x) = \left(ax^2 + bx + c\right) e^x.$$

Exemple (suite)

D'où,

$$\begin{aligned} y'_{p_2} &= \left[ax^2 + (2a+b)\,x + b + c\right] e^x, \\ y''_{p_2} &= \left[ax^2 + (4a+b)\,x + 2a + 2b + c\right] e^x; \\ y^{(3)}_{p_2} &= \left[ax^2 + (6a+b)\,x + 6a + 3b + c\right] e^x. \end{aligned}$$

Par identification, on obtient

$$y_{p_2}(x) = x^2 e^x.$$

Ainsi, la solution générale de l'équation différentielle avec second membre est

$$\begin{aligned} y(x) &= y_0(x) + y_{p_1}(x) + y_{p_2}(x) \\ &= (\alpha x + \beta)\, e^x + \gamma e^{-x} + e^{-3x} + x^2 e^x, \quad (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$