UNIVERSITE MOHAMMED PREMIER
ECOLE NATIONALE DES SCIENCES APPLIQUEES
OUJDA-MAROC

Filière : STPI-CP2 | Année universitaire : 2014 - 2015
Module : Analyse 4 | Enseignant : M. Derouich

Fiche TD N° : 3

Exercice 1 : Les intégrales généralisées suivantes sont-elles convergentes ?

$$a)\ \int_a^1 \frac{dt}{t\ln t},\ 0<a<1;\ b)\ \int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt;\ c)\ \int_0^{+\infty}\frac{x+1}{x^2+1}dx;\ d)\ \int_1^{+\infty} e^{-\sqrt{t}}dt;$$

$$e)\ \int_0^1 \cos^2(\frac{1}{t})dt;\ f)\ \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{\sin t}};\ g)\ \int_1^{+\infty}\frac{\arctan(t)}{t\ln(1+t^2)}dt;\ h)\ \int_1^{+\infty}\cos(x^2)dx;.$$

Exercice 2 : Discuter, suivant les valeurs de α et $\beta\in\mathbb{R}$, la convergence des intégrales généralisées suivantes

$$a)\ \int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha(\ln x)^\beta},\ a>1;\ b)\ \int_0^a\frac{dx}{x^\alpha(\ln x)^\beta},\ a<1;\ c)\ \int_0^{+\infty}\frac{t\ln t}{(1+t^2)^\alpha}dt.$$

Exercice 3 : Les intégrales impropres suivantes sont-elles convergentes ?

$$a)\ \int_0^1\frac{\tan t}{t}dt;\ b)\ \int_1^{+\infty}\frac{1}{t}\left(e^{-\frac{1}{t}}-\cos\frac{1}{t}\right)dt;$$

$$c)\ \int_0^1\frac{dt}{1-\sqrt{t}};\ d)\ \int_0^{+\infty}\left[1+t\ln\left(\frac{t}{t+1}\right)\right]dt.$$

Exercice 4 : Donner la nature des intégrales généralisées suivantes

$$a)\ \int_4^{+\infty}\frac{\sin(t)\,dt}{\sqrt{t}+\sin t};\ b)\ \int_1^{+\infty}\ln\left(1+\frac{\sin t}{t^\alpha}\right)dt,\ \alpha>0.$$

Exercice 5 : 1) Montrer que $\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{\sqrt{x}}dx$ est convergente.

2) Montrer que $\int_1^{+\infty}\frac{\cos^2 x}{\sqrt{x}}dx$ est divergente.

3) On pose

$$f(x)=\frac{\cos x}{\sqrt{x}},\ g(x)=\frac{\cos x}{\sqrt{x}}+\frac{\cos^2 x}{x}.$$

Vérifier que, quand $x\longrightarrow+\infty$, $f\backsim g$ et que cependant, les deux intégrales généralisées $\int_1^{+\infty}f(x)\,dx$ et $\int_1^{+\infty}g(x)dx$ ne sont pas de même nature. Expliquer.

Corrigé

Exercice 1 :

a) Pour tout $x > 1$, nous avons

$$\int_a^x \frac{dt}{t\ln t} = \int_a^x \frac{d\ln t}{\ln t} = [\ln(|\ln t|)]_a^x = \ln(|\ln x|) - \ln(|\ln a|),$$

qui tend vers $+\infty$ quand $x \longrightarrow 1^-$. ainsi, l'intégrale est divergente.

b) Comme on connait pas de primitive de e^{-t^2}, on doit donc utiliser le critère de comparaison. Le seul problème est au voisinage de $+\infty$. Nous avons

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty} t^2e^{-t^2} = 0.$$

Donc,

$$e^{-t^2} = o\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

Comme $\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^2}$ est convergente, $\int_1^{+\infty} e^{-t^2}dt$ est aussi convergente. Donc, $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$ est convergente.

c)

$$\int_0^{+\infty}\frac{x+1}{x^2+1}dx \geq \int_0^{+\infty}\frac{x}{x^2+1}dx.$$

$\int_0^{+\infty}\frac{x}{x^2+1}dx$ est divergente. Donc, $\int_0^{+\infty}\frac{x+1}{x^2+1}dx$ est divergente.

d) Le seul problème est au voisinage de $+\infty$. Pour tout $\alpha > 0$, on a

$$t^\alpha e^{-\sqrt{t}} = e^{-\sqrt{t}+\alpha\ln t} \longrightarrow 0, \text{ quand } t \longrightarrow +\infty.$$

En prenant par exemple $\alpha = 2$, on déduit que

$$e^{-\sqrt{t}} = o\left(\frac{1}{t^2}\right) \text{ au voisinage de } +\infty.$$

Par comparaison à une intégrale de Riemann, on déduit que $\int_1^{+\infty} e^{-\sqrt{t}}dt$ est convergente.

e) La fonction $t \longrightarrow \cos^2(1/t)$ est continue sur $]0,1]$. De plus, on a

$$|\cos^2(1/t)| \leq 1.$$

Comme $\int_0^1 dt$ est finie, on en déduit que $\int_0^1 \cos^2(1/t)$ est aussi convergente.

f) Le problème est au voisinage de 0. On a $\dfrac{1}{\sqrt{\sin x}}$ est positive sur $]0,1]$ et

$$\frac{1}{\sqrt{\sin x}} \underset{0}{\backsim} \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

$\int_0^1 \dfrac{dx}{\sqrt{x}}$ est convergente (intégrale de Riemann). Donc, $\int_0^1 \dfrac{dx}{\sqrt{\sin x}}$ est convergente.

g) Le seul problème se situe au voisinage de $+\infty$. Puisque $\arctan x \longrightarrow \dfrac{\pi}{2}$ et $\ln(1+x^2) = \ln\left[x^2(1+\dfrac{1}{x^2})\right] = 2\ln x + \ln(1+\dfrac{1}{x^2}) \underset{+\infty}{\backsim} 2\ln x$, alors

$$\frac{\arctan x}{x\ln(1+x^2)} \underset{+\infty}{\backsim} \frac{\pi}{x\ln x}.$$

$\int_e^{+\infty} \dfrac{\pi}{x\ln x}dx$ est divergente car $\lim\limits_{X\longrightarrow+\infty} \int_e^X \dfrac{dx}{x\ln x}dx = \lim\limits_{X\longrightarrow+\infty} \displaystyle\int_e^X \dfrac{d(\ln x)}{\ln x} = \ln|\ln X| = +\infty$. Par conséquent, $\int_1^{+\infty} \dfrac{\arctan x}{x\ln(1+x^2)}dx$ est divergente (car les fonctions considérées sont positives).

h) Le changement de variable $x^2 = t$ ramène l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \cos\left(x^2\right) dx$ à l'intégrale généralisée $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_1^{+\infty} \dfrac{\cos(t)}{\sqrt{t}}dt$. D'après le critère d'Abel, $\int_1^{+\infty} \dfrac{\cos(t)}{\sqrt{t}}dt$ est convergente. Donc, $\int_1^{+\infty} \cos\left(x^2\right) dx$ est convergente.

<u>Exercice 2 :</u> a)

- Si $\alpha > 1$, soit $\gamma \in]1,\alpha[$. Alors, on a

$$\frac{t^\gamma}{t^\alpha (\ln t)^\beta} = \frac{1}{t^{\alpha-\gamma}(\ln t)^\beta} \longrightarrow 0 \text{ quand } t \longrightarrow +\infty.$$

Donc,

$$\frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta} = o(\frac{1}{t^\gamma}).$$

Puisque $\int_a^{+\infty} \dfrac{dt}{t^\gamma}$ converge, alors $\int_a^{+\infty} \dfrac{dt}{t^\alpha (\ln t)^\beta}$ est aussi convergente.

• Si $\alpha < 1$, soit $\gamma \in]\alpha, 1[$. Alors, on a

$$\frac{t^{\gamma}}{t^{\alpha} (\ln t)^{\beta}} = \frac{t^{\gamma-\alpha}}{(\ln t)^{\beta}} \longrightarrow 0 \text{ quand } t \longrightarrow +\infty.$$

Donc,

$$\frac{1}{t^{\gamma}} = o\left(\frac{1}{t^{\alpha} (\ln t)^{\beta}}\right).$$

Puisque $\int_a^{+\infty} \frac{dt}{t^{\gamma}}$ diverge, alors $\int_a^{+\infty} \frac{dt}{t^{\alpha} (\ln t)^{\beta}}$ est aussi divergente.

• Si $\alpha = 1$, alors la fonction est de la forme $f'f^{-\beta}$. Cette fonction admet une primitive. D'où, pour tout $X > a$, on a

$$\int_a^X \frac{dt}{t (\ln t)^{\beta}} = \begin{cases} \left[\frac{1}{-\beta+1} (\ln t)^{-\beta+1}\right]_a^X = \frac{1}{-\beta+1} \left[(\ln X)^{-\beta+1} - (\ln a)^{-\beta+1}\right] \text{ si } \beta \neq 1, \\ \\ [\ln |\ln t|]_a^X = \ln |\ln x| - \ln |\ln a| . \end{cases}$$

On déduit donc que $\int_a^{+\infty} \frac{dt}{t (\ln t)^{\beta}}$ est convergente ssi $\beta > 1$.

En conclusion : $\int_a^{+\infty} \frac{dt}{t (\ln t)^{\beta}}$ converge ssi $\alpha > 1$ ou $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.

b) Se déduit de a) par le changement de variable $t = \frac{1}{x}$.

c) La fonction $t \longmapsto t \ln t$ se prolonge par continuité à l'origine. Donc, le seul problème se pose au voisinage de $+\infty$. Nous avons

$$\frac{t \ln t}{(1+t^2)^{\alpha}} \underset{+\infty}{\backsim} \frac{\ln t}{t^{2\alpha-1}}.$$

• Si $\alpha > 1 \Longrightarrow 2\alpha - 1 > 1$. Soit $\gamma \in]1, 2\alpha - 1[$. Donc,

$$t^{\gamma} \frac{\ln t}{t^{2\alpha-1}} = t^{\gamma-(2\alpha-1)} \longrightarrow 0 \text{ quand } t \longrightarrow +\infty.$$

D'où,

$$\frac{\ln t}{t^{2\alpha-1}} = o\left(\frac{1}{t^{\gamma}}\right).$$

Comme $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{\gamma}}$ converge alors $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^{2\alpha-1}} dt$ coverge et par suite $\int_1^{+\infty} \frac{t \ln t}{(1+t^2)^{\alpha}} dt$ est convergente.

• Si $\alpha \leq 1 \Longrightarrow 2\alpha - 1 \leq 1$ et donc $\frac{\ln t}{t^{2\alpha-1}} \geq \frac{1}{t}$ quand t est assez grand. Comme $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t}$ diverge alors $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^{2\alpha-1}} dt$ est aussi divergente.

Exercice 3 :

a) La fonction $t \longmapsto \dfrac{\tan t}{t}$ se prolonge par continuité à l'origine. Donc, $\int_0^1 \dfrac{\tan t}{t} dt$ est convergente.

b) La fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{t}[e^{-\dfrac{1}{t}} - \cos\left(\dfrac{1}{t}\right)]$ est continue sur $[1, +\infty[$. Le problème de convergence de l'intégrale se pose au voisinage de $+\infty$. Pour étudier ce problème, on va faire un développement asymptotique de la fonction au voisinage de $+\infty$. Noua avons, au voisinage de $+\infty$,

$$\begin{aligned} e^{-\dfrac{1}{t}} - \cos\left(\frac{1}{t}\right) &= 1 - \frac{1}{t} + \frac{1}{2t^2} - \left[1 - \frac{1}{2t^2}\right] + o\left(\frac{1}{t^2}\right) \\ &= -\frac{1}{t} + \frac{1}{t^2} + o\left(\frac{1}{t^2}\right) \end{aligned}$$

c) La fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{1-\sqrt{t}}$ est continue et positive sur $[0, 1[$. Le problème de convergence de l'intégrale se pose au voisinage de 1. Pour étudier ce problème, on fait un développement limité au voisinage de 1. Posons $x = t - 1$. Lorsque t tend vers 1, x tend vers 0. On a

$$\begin{aligned} 1 - \sqrt{t} &= 1 - \sqrt{x+1} = 1 - [1 + \frac{x}{2} + o(x)] \\ &= -\frac{x}{2} + o(x) \underset{0}{\backsim} -\frac{x}{2} = \frac{1}{2(1-t)}. \end{aligned}$$

D'où,

$$\frac{1}{1-\sqrt{t}} \underset{1}{\backsim} \frac{1}{2(1-t)}.$$

La fonction $\dfrac{1}{1-t}$ n'est pas intégrable sur $[0, 1[$ (c'est une intégrale de Riemann divergente), on en déduit que $\int_0^1 \dfrac{1}{1-\sqrt{t}} dt$ est divergente.

d) La fonction $t \longmapsto 1 + t \ln\left(\dfrac{t}{t+1}\right)$ est continue sur $[0, +\infty[$. Le problème de convergence de l'intégrale se pose au voisinage de $+\infty$. Pour étudier ce problème, on fait un développement asymptotique de la fonction au voisinage de $+\infty$. Nous avons, au voisinage de $+\infty$,

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{t}{t+1}\right) &= \ln\left(\frac{1}{1+\frac{1}{t}}\right)\\ &= -\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)\\ &= -\frac{1}{t}-\frac{1}{2t^2}+o\left(\frac{1}{t^2}\right).\end{aligned}$$

Donc, au voisinage de $+\infty$,

$$1+t\ln\left(\frac{t}{t+1}\right)=-\frac{1}{2t}+o\left(\frac{1}{t}\right).$$

Ainsi, $\int_0^{+\infty}\left[1+t\ln\left(\frac{t}{t+1}\right)\right]dt$ est divergente.

Exercice 4 :,

a) Nous avons

$$\begin{aligned}\frac{\sin(t)}{\sqrt{t}+\sin t} &= \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}\left(\frac{1}{1+\frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}}\right)=\frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}\left[1-\frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}+\frac{\sin^2(t)}{t}+o\left(\frac{\sin^2(t)}{t}\right)\right]\\ &= \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}-\frac{\sin^2(t)}{t}+O\left(\frac{\sin^3(t)}{t\sqrt{t}}\right).\end{aligned}$$

Puisque les deux intégrales $\int_4^{+\infty}\frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}dt$ et $\int_4^{+\infty}O\left(\frac{\sin^3(t)}{t\sqrt{t}}\right)dt$ sont convergentes, alors $\int_4^{+\infty}\frac{\sin(t)\,dt}{\sqrt{t}+\sin t}$ est de même nature que $\int_4^{+\infty}\frac{\sin^2(t)}{t}dt$. Or,

$$\frac{\sin^2(t)}{t}=\frac{1}{2t}-\frac{\cos 2t}{2t}.$$

$\int_4^{+\infty}\frac{\cos 2t}{t}dt$ est convergente (par parties ou règle d'Abel), $\int_4^{+\infty}\frac{dt}{t}$ est divergente. Donc, $\int_4^{+\infty}\frac{\sin^2(t)}{t}dt$ est divergente. Par conséquent, $\int_4^{+\infty}\frac{\sin(t)\,dt}{\sqrt{t}+\sin t}$ est divergente.

Remarquons que

$$\frac{\sin(t)}{\sqrt{t}+\sin t}\underset{+\infty}{\backsim}\frac{\sin(t)}{\sqrt{t}},$$

et que cependant, les deux intégrales $\int_4^{+\infty} \frac{\sin(t)\,dt}{\sqrt{t}+\sin t}$ et $\int_4^{+\infty} \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}dt$ n'ont pas le même comportement.

b) Puisque $\alpha > 0$, $\frac{\sin(t)}{t^\alpha} \longrightarrow 0$ quand $t \longrightarrow +\infty$. Ledéveloppement asymptotique de la fonction au voisinage de $+\infty$ donne

$$\ln\left(1+\frac{\sin t}{t^\alpha}\right) = \frac{\sin t}{t^\alpha} - \frac{1}{2}\frac{\sin^2 t}{t^{2\alpha}} + o\left(\frac{\sin^2 t}{t^{2\alpha}}\right).$$

A l'aide d'une intégration par parties ou par application du citère d'Abel, on montre que $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha}dt$ est convergente. Donc, $\int_1^{+\infty} \ln\left(1+\frac{\sin t}{t^\alpha}\right)dt$ est de mêm nature que $\int_1^{+\infty} g(t)dt$ avec $g(t) = \frac{1}{2}\frac{\sin^2 t}{t^{2\alpha}} + o\left(\frac{\sin^2 t}{t^{2\alpha}}\right)$. On a

$$g(t) \underset{+\infty}{\backsim} \frac{1}{2}\frac{\sin^2 t}{t^{2\alpha}}.$$

Comme les deux fonctions sont positives, $\int_1^{+\infty} g(t)dt$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^{2\alpha}}dt$ sont de même nature. Il en résulte donc que $\int_1^{+\infty} \ln\left(1+\frac{\sin t}{t^\alpha}\right)dt$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^{2\alpha}}dt$ sont de même nature. En écrivant

$$\frac{\sin^2 t}{t^{2\alpha}} = \frac{1}{2t^{2\alpha}} - \frac{\cos 2t}{2t^\alpha},$$

on déduit que $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^{2\alpha}}dt$ converge ssi $\alpha > \frac{1}{2}$. D'où, $\int_1^{+\infty} \ln\left(1+\frac{\sin t}{t^\alpha}\right)dt$ converge ssi $\alpha > \frac{1}{2}$.

Exercice 5 :

1) $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{\sqrt{t}}dt$ est convergente (critère d'Abel).

2) En écrivant

$$\frac{\cos^2 t}{\sqrt{t}} = \frac{1}{\sqrt{t}} + \frac{\cos 2t}{\sqrt{t}},$$

on déduit que $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{\sqrt{t}}dt$ est divergente.

3) On a

$$f(t) = \frac{\cos t}{\sqrt{t}} \underset{+\infty}{\backsim} g(t) = \frac{\cos t}{\sqrt{t}} + \frac{\cos^2 t}{\sqrt{t}}$$

et que cependant les deux intégrales généralisées $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ et $\int_1^{+\infty} g(t)dt$ ne sont pas de même nature car les deux fonctions ne gardent pas un signe constant au voisinage de $+\infty$.