UNIVERSITE MOHAMMED PREMIER
ECOLE NATIONALE DES SCIENCES APPLIQUEES
OUJDA-MAROC

Filière : STPI-CP2 — Année universitaire : 2016 - 2017
Module : Analyse IV — Enseignant : M. Derouich

Fiche TD N° : 2

Exercice 1. :

1. Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :
$f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$ et $g(x,y) = \ln(x-y^2)$.
2. Déterminer et représenter les courbes de niveau de la fonction suivante : $f(x,y) = x^2+y^2$.

Exercice 2. Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|y|}{x^2}\exp\left(-\dfrac{|y|}{x^2}\right) & \text{si} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et φ_λ la restriction de f à l'ensemble $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y = \lambda x\right\}$. Déterminer la limite de φ_λ au point $(0,0)$.
2. Soit ψ la restriction de f à l'ensemble $B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y = x^2\right\}$. Calculer la limite de ψ au point $(0,0)$.
3. Conclure.

Exercice 3. : Etudier la limite à l'origine des fonctions suivantes :

a) $f(x,y) = \dfrac{1-\cos(xy)}{x^2y^2}$; b) $g(x,y) = \dfrac{3x-y^2}{x^2+y^2}$; c) $h(x,y) = \dfrac{xy+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

d) $s(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$; e) $t(x,y) = (x^2-y^2)\sin\left(\dfrac{1}{xy}\right)$.

Exercice 4. : Etudier la continuité au point $(0,0)$ des fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définies pour chaque couple (x,y) de $\mathbb{R}^2$ par :

a) $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x+y)^2}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases},$$

b) $$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

c) $$h(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Exercice 5.

1. Peut-on prolonger par continuité au point $(0,0)$ les fonctions suivantes ?

   1.1 $f(x,y) = \dfrac{1-\cos\sqrt{xy}}{y}$ si $(x,y) \in A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / xy > 0\}$.

   1.2 $g(x,y) = (x^2+y^2)^x$ si $(x,y) \neq (0,0)$.

   1.3 $h(x,y) = \dfrac{\sqrt{4-x^2-y^2}-2}{\sqrt{x^2+y^2}}$ si $(x,y) \neq (0,0)$.

2. Peut-on prolonger par continuité au point $(1,0)$ la fonction suivante ?

$$t(x,y) = \frac{y^3}{(x-1)^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (1,0).$$

Exercice 6. Etudier la différentiabilité à l'origine de l'application $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ qui est définie par $f(0;0) = 0$ et par $f(x;y) = \dfrac{|xy|}{\sqrt{x^2+3y^2}}$ si $(x;y) \neq (0;0)$.

Exercice 7. Soit f la fonction de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1) Montrer que f est continue en $(0,0)$.

2) Calculer en tout point $(x,y) \neq (0,0)$ $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.

3) Etudier l'existance des dérivées partielles en $(0,0)$. f est-elle différentiable en $(0,0)$?

Exercice 8. **:** Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$f(x;y) = (x^2+y^2)\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$ si $(x;y) \neq (0;0)$ et $f(0;0) = 0$.

1) Déterminer les fonctions $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

2) Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et calculer la différentielle de f au point $(x,y) \neq (0,0)$.

3) Montrer que les fonctions $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ ne sont pas continues en $(0,0)$ mais f est différentiable en $(0;0)$.