UNIVERSITE MOHAMMED PREMIER
ECOLE NATIONALE DES SCIENCES APPLIQUEES
OUJDA-MAROC

Filière : STPI-CP2 — Année universitaire : 2016 - 2017

Module : Analyse IV — Enseignant : M. Derouich

Fiche TD $N°$ : 3

**Exercice 1.** Etudier la différentiablilité des fonctions suivantes :

1) $f(x,y) = x^2 + y^2$; 2) $g(x,y,z) = \sin(x^2+y) + \cos yz$; 3) $h(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$;
4) $t(x;y) = y^2 \sin\dfrac{x}{y}$ si $y \neq 0$ et $t(x;0) = 0$ si $y = 0$.

**Exercice 2.** :

1. Montrer que :
   - **1.1** $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / xy = 1\}$ est fermé de $\mathbb{R}^2$.
   - **1.2** $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + xy + y^2 < e^{z+x}\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^3$.
2. Soient $f$ et $g$ deux applications continues de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$. Montrer que
   - **2.1** $A = \{x \in \mathbb{R}^n / f(x) = g(x)\}$ est fermé.
   - **2.2** $B = \{x \in \mathbb{R}^n / 1 < f(x) < 2\}$ est ouvert.
   - **2.3** $C = \{x \in \mathbb{R}^n / f(x) \leq g(x)\}$ est fermé.

**Exercice 3.** Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x-1)y^2}{(x-1)^2+y^2} & \text{pour } (x,y) \neq (1,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (1,0). \end{cases}$$

1. montrer que $f$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ ;
2. calculer les dérivées partielles de $f$ pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ;
3. montrer que $f$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus (1,0)$ ;
4. que peut-on conclure sur la différentiabilité de $f$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus (1,0)$
5. montrer que $f$ n'est pas différentiable en $(1,0)$ ;
6. $f$ est-elle de classe $C^1$ en $(1,0)$ ?

**Exercice 4.** Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ une constante et $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction ainsi définie

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x^2+y^2)}{x^2+y^2} & \text{pour } (x,y) \neq (0,0), \\ \alpha & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. Montrer que $f$ est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$.
2. Calculer les dérivées partielles de $f$ pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$.
3. Montrer que $f$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$ ;
4. Que peut-on conclure sur la différentiabilité de $f$ ?
5. Calculer $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

6. Déduire la valeur $\alpha_0$ de $\alpha$ pour laquelle f est continue en (0, 0).
7. Soit $\alpha = \alpha_0$

   $i)$ Calculer les dérivées partielles de $f$ en $(0,0)$.

   $ii)$ En utilisant la définition, prouver que $f$ est différentiable en $(0,0)$.

   $iii)$ Montrer que $f$ est de classe $C^1$ en $(0,0)$.

**Exercice 5.** Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$f(x;y) = (\cos x + \sin y, -\sin x + \cos y, 2\sin x \cos y)$.

1) Déterminer la matrice Jacobienne $J_{(x,y)}(f)$ de $f$ au point $(x,y)$.

2) Soit $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par : $g(u,v,w) = u^2 + v^2 + w$. Déterminer la matrice Jacobienne $J_{(u,v,w)}(g)$ de $g$ au point $(u,v,w)$.

3) Calculer la matrice Jacobienne $J_{(x,y)}(gof)$ de $gof$ au point $(x,y)$

a) En explicitant $gof$. b) Au moyen d'un produit de matrices.

**Exercice 6.** Soient les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ et $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définies par :

$$f(x,y) = (x^2 + y, x^2 - y^2, 1);\ g(x,y) = (e^{x-y}, 2xy).$$

1) Rappeler la définition d'une fonction de classe $C^k$ sur un ouvert $U$ de $\mathbb{R}^n$.

2) Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

a) Déterminer les matrices jacobiennes $J_f(x,y)$ et $J_g(x,y)$ respectives de $f$ et $g$.

b) Calculer de deux manières différentes la matrice jacobienne $J_{(fog)}(x,y)$ de $fog$.

c) Donner $d\,(fog)_{(x,y)}(h,k)$, $(h,k) \in \mathbb{R}^2$.

**Exercice 7.** Montrer que la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $f(x,y) = xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ si $(x;y) \neq (0;0)$ et $f(0;0) = 0$ admet des dérivées partielles d'ordre 2 en tout point mais que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.

**Exercice 8.** Soit $f$ la fonction définie par $f(x,y) = 3x^2 + 2y^3 - 6y$

1. Montrer qu'on peut appliquer le théorème des fonctions implicites à la fonction $f$ au voisinage de $(0,0)$. Soit $\varphi$ cette fonction implicite.
2. Etablir la relation $x + (\varphi^2(x) - 1)\varphi'(x) = 0$, calculer $\varphi'(0)$
3. Donner le développement limité de $\varphi$ à l'ordre 2 au voisinage de 0 .
4. Déterminer l'équation de la droite tangente à $y = \varphi(x)$ en $x = 0$.

**Exercice 9.** :

1. Montrer que l'equation $z^3 + 2z + e^{z-x-y^2} = cos(x - y + z)$ définit implicitement $z$ comme fonction $C^\infty$ de $x$ et $y$ au voisinage de 0 qui s'annule en 0.
2. Calculer les dérivées partielles de $z$ en 0.
3. Écrire l'équation du plan tangent à f en (0, 0).

**Exercice 10.** : Déterminer les extrema de $f$ et $g$ et préciser leur nature.

1. $f(x,y) = \left(x^2 + y^2\right) e^{x^2 - y^2}$.
2. $g(x,y) = xe^y + y\ln(x)$.