Analyse des données

Plan

Chapitre I :

I-Introduction à l'analyse des données

Plan

1- Introduction :

La statistique est une méthode scientifique qui consiste à réunir des données chiffrées sur des ensembles nombreux, puis à analyser, à commenter et à critiquer ces données.
Classiquement les méthodes statistiques sont employées soit pour explorer les données (nommée statistique exploratoire) soit pour prédire un comportement (nommée statistique prédictive ou décisionnelle). La statistique exploratoire s'appuie sur des techniques descriptives et graphiques. Elle est généralement décrite par la statistique descriptive qui regroupe des méthodes exploratoires simples, uni- ou bidimensionnelle (moyenne, moments, quantiles, variance, corrélation, ...) et la statistique exploratoire multidimensionnelle.

1- Introduction : (suite)

La statistique classique étudie les variables les unes après les autres, et elle construit autant de graphes (histogrammes) que de variables, mais les techniques dites d'analyse des données permettent de donner une vision globale de l'ensemble des variables.
L'analyse des données peut se définir comme l'ensemble des méthodes permettant une étude approfondie d'informations et de données de nature qualitative ou quantitative.
Dans l'analyse des données, on distingue :

- l'analyse univariée, qui porte sur l'étude d'une seule variable ;
- l'analyse bivariée, qui a pour objectif d'examiner les relations entre deux variables en même temps ;
- l'analyse multivariée, qui vise l'étude de plusieurs variables en même temps.

1- Introduction : (suite)

L'analyse des données recouvre principalement deux ensembles de techniques :

1. analyses factorielles, qui relèvent de la géométrie euclidienne et conduisent à l'extraction de valeurs et de vecteurs propres. Les méthodes les plus employées de cette technique sont :
   - *i*) la méthode de l'**analyse en composantes principales (ACP)**
   - *ii*) la méthode de l'**analyse factorielle des correspondances (AFC)**.
2. classification automatique sont caractérisées par le choix d'un indice de proximité et d'un algorithme d'agrégation ou de désagrégation qui permettent d'obtenir une partition ou arbre de classification".

2- Analyse univariée
2.1- Notion de base

Définition

On appelle **variable** *toute application X définie sur P, avec P un ensemble fini appelé* **population** *ou* **univers** *; tout élément* ω *de P s'appelle un* **individu**.

Remarque

X est aussi appelée **caractère statistique**

2.1- Notion de base (suite)

Les types de variables : Il existe deux types de variables

1. **quantitatif :** c'est un caractère auquel on peut associer un nombre c'est-à-dire, pour simplifier, que l'on peut "mesurer".
   On distingue alors deux types de caractère quantitatif :
   - un caractère discret : c'est un caractère quantitatif qui ne prend qu'un nombre fini de valeurs. Par exemple le nombre d'enfants d'un couple.
   - un caractère continu : c'est un caractère quantitatif qui, théoriquement, peut prendre toutes les valeurs d'un intervalle de l'ensemble des nombres réels. Ses valeurs sont alors regroupées en classes $[x_{i-1}, x_i[$. Par exemple le poids ou la taille d'un individu.
2. **qualitatif :** comme la profession, la couleur des yeux, la nationalité, les groupes sanguins.

2.1- Notion de base (suite)

Le caractère désigne une grandeur ou un attribut, observable sur un individu et susceptible de varier prenant ainsi différents états appelés modalités.

Définition

On appelle **modalité** *toute valeur :* $x_i \in X(P)$ *telle que :* $X(P) = \{x_1, x_2, x_3, \cdots x_p\}$ *avec p nombre de modalités différentes de X*

A chaque modalité du caractère X, peut correspondre un ou plusieurs individus dans l'échantillon de taille N.

2.1- Notion de base (suite)

Définition

1. *On appelle effectif de la modalité x_i, le nombre n_i des individus ω tel que $X(\omega) = x_i$ (Cas discret)*
2. *On appelle effectif de la classe $[x_{i-1}, x_i[$, le nombre n_i des individus ω tel que $X(\omega) \in [x_{i-1}, x_i[$ (Cas continu)*

Remarque

On a $\sum_{i=1}^{p} n_i = N$. *l'effectif total.*

Définition (Série statistique)

Une série statistique est l'ensemble des couples $(x_i; n_i)$ *ou* $([x_{i-1}; x_i[; n_i)$.

2.1- Notion de base (suite)

Définition

On appelle fréquence de la modalité x_i ou de la classe $[x_{i-1}, x_i[$, le nombre f_i tel que $f_i = \dfrac{n_i}{N}$

Définition

1. *On appelle effectif cumulé en x_i, le nombre* $\sum_{j=1}^{i} n_j$.
2. *On appelle fréquences cumulées en x_i, le nombre F_i tel que* $F_i = \sum_{j=1}^{i} f_j$.

2.1- Notion de base (suite)

Remarque

On peut noter que $\sum_{j=1}^{p} n_j = N$ *, taille de l'échantillon* $\sum_{j=1}^{p} f_j = 1$

en effet $\sum_{j=1}^{p} f_j = \sum_{j=1}^{p} \frac{n_j}{N} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{p} n_i = \frac{1}{N} \times N = 1$

2.1- Notion de base (suite)

En général une série statistique à caractère discret se présente sous la forme :

Valeurs	x_1	x_2	$\cdots$ $\cdots$	x_p
Effectifs	n_1	n_2	$\cdots$ $\cdots$	n_p
Fréquences	f_1	f_2	$\cdots$ $\cdots$	f_p

TABLE : caractère discret

et pour un caractère continue, on a la représentation suivante :

classes	$[x_0; x_1[$	$[x_1; x_2[$	$\cdots$ $\cdots$	$[x_{p-1}; x_p]$
effectifs	n_1	n_2	$\cdots$ $\cdots$	n_p
fréquences	$f_1 = \frac{n_1}{N}$	$f_1 = \frac{n_2}{N}$	$\cdots$ $\cdots$	$f_p = \frac{n_p}{N}$

TABLE : caractère continu

2.1- Notion de base (suite)

Exemple (caractère discret)

Soit un échantillon de 64 familles. Le caractère étant le nombre d'enfants par famille (tableau 2.1)

x_i	0	1	2	3	4	5
n_i	16	18	14	11	3	2
$f_i = n_i/n$						
E.C.C						
E.C.D						

Avec : x_i : Nombre d'enfants, n_i : Nombres de familles,
$f_i = n_i/n$: Fréquence
E.C.C : Effectifs cumulés croissants
E.C.D : Effectifs cumulés décroissants

2.1- Notion de base (suite)

Exemple (caractère discret)

Soit un échantillon de 64 familles. Le caractère étant le nombre d'enfants par famille (tableau 2.1)

x_i	0	1	2	3	4	5
n_i	16	18	14	11	3	2
$f_i = n_i/n$	0.25	0.281	0.218	0.172	0.047	0.031
E.C.C	16	34	48	59	62	64
E.C.D	64	48	30	16	5	2

Avec : x_i : Nombre d'enfants, n_i : Nombres de familles,
$f_i = n_i/n$: Fréquence
E.C.C : Effectifs cumulés croissants
E.C.D : Effectifs cumulés décroissants

2.1- Notion de base (suite)

Exemple (caractère continu)

Soit un echantillon de 80 personnes d'une collectivité portant sur la taille. On adopte un intervalle de classe de 0,05 m. (tableau 3.1)

classe	*Effectif*	*E.C.C*	*E.C.D*
[1.55 ;1.60[	*3*		
[1.60 ;1.65[	*12*		
[1.65 ;1.70[	*18*		
[1.70 ;1.75[	*25*		
[1.75 ;1.80[	*15*		
[1.80 ;1.85[	*5*		
[1.85 ;190[	*2*		

2.1- Notion de base (suite)

Exemple (caractère continu)

Soit un echantillon de 80 personnes d'une collectivité portant sur la taille. On adopte un intervalle de classe de 0,05 m. (tableau 3.1)

classe	Effectif	E.C.C	E.C.D
[1.55 ;1.60[	3	3	80
[1.60 ;1.65[	12	15	77
[1.65 ;1.70[	18	33	65
[1.70 ;1.75[	25	58	47
[1.75 ;1.80[	15	73	22
[1.80 ;1.85[	5	78	7
[1.85 ;190[	2	80	2

2.2- Paramètres statistiques :

2.2.1- Paramètres de position

a/ Dominante ou mode

Définition

Lorsque la variable est discrète, **une dominante** *ou* **mode** *est une valeur du caractère qui correspond à un effectif maximum. La série est unimodale, bimodale · · · lorsque le nombre de modes est 1, 2 · · · .*
Lorsque la variable est continue, une ***classe modale*** *correspondra à un effectif maximum.*

Exemples

1. Considérons la série statistique de l'exemple 1 : le mode est 1 enfant puisqu'il est associé à l'effectif maximum 18.
2. Considérons la série statistique de l'exemple 3 : la classe modale est $[1.70 - 1.75[$ puisqu'il est qui corespond à l'effectif maximum 25.

2.2- Paramètres statistiques (suite) :

b/ Moyenne arithmétique

Définition

Lorsque la variable est discrète la moyenne arithmétique $\overline{X}$ de la série statistique est la moyenne pondérée

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{p} n_i x_i}{\sum_{i=1}^{p} n_i} = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \cdots + n_p x_p}{N}$$

Lorsque la variable est continue la moyenne est :

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{p} n_i c_i}{\sum_{i=1}^{p} n_i}$$

où les $c_i = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}$ sont les centres des classes.

2.2- Paramètres statistiques (suite) :

Théorème

- $\overline{X+b} = \overline{X} + b$
- $\overline{aX} = a\overline{X}$

Exemples

1)Le nombre moyen d'enfants par famille de la série statistique de l'exemple 1 est :

$$\overline{X} = \\ = $$

2)Pour la série statistique de l'exemple 3, la taille moyenne d'une personne est

$$\overline{X} = \\ = $$

Exemples

1)Le nombre moyen d'enfants par famille de la série statistique de l'exemple 1 est :

$$\begin{aligned}\overline{X} &= \frac{1}{64}(16\times 0+1\times 18+2\times 14+3\times 11+4\times 3+5\times 2)\\ &= \frac{101}{64}\end{aligned}$$

2)Pour la série statistique de l'exemple 3, la taille moyenne d'une personne est

$$\begin{aligned}\overline{X} &= \frac{3\times 1.575+12\times 1.625+18\times 1.675+25\times 1.725}{80}\\ &\quad +\frac{15\times 1.775+5\times 1.825+2\times 1.875}{80}\\ &= \frac{137}{80}\end{aligned}$$

2.2- Paramètres statistiques (suite) :

c/ Médiane

Définition

La médiane, Me, est la valeur du caractère pour laquelle la fréquence cumulée est égale à 0,5 ou 50%. *Elle correspond donc au centre de la série statistique classée par ordre croissant, ou à la valeur pour laquelle* 50% *des valeurs observées sont supérieures et* 50% *sont inférieures.*

Remarques :

► Dans le cas où les valeurs prises par le caractère étudié ne sont pas regroupées en classe,

- si n est impair, alors $n = 2m + 1$ et la médiane est la valeur du milieu $Me = x_{m+1}$.
- si n est pair, alors $n = 2m$ et une médiane est une valeur quelconque entre x_m et x_{m+1}. Dans ce cas $Me = \frac{x_m + x_{m+1}}{2}$.

► Dans le cas où les valeurs prises par le caractère étudié sont groupées en classe, on cherche la classe contenant le $\frac{n^e}{2}$ individu de l'échantillon. En supposant que tous les individus de cette classe sont uniformément répartis à l'intérieur,la position exacte du $\frac{n^e}{2}$ individu est déterminée de la façon suivante (par interpolation linéaire) :

2.2- Paramètres statistiques (suite) :

$$\frac{M_e - x_m}{\frac{N}{2} - N_m} = \frac{x_{m+1} - x_m}{N_{m+1} - N_m} \quad \text{donc}$$

$$M_e = x_m + (x_{m+1} - x_m)\left(\frac{\frac{N}{2} - N_m}{N_{m+1} - N_m}\right)$$

avec $m \in \mathbb{N}$ telle que $N_m \leq \frac{N}{2} < N_{m+1}$ et N_m effectif cumulé de la classe $[x_{m-1}, x_m[$

2.2- Paramètres statistiques (suite) :

Remarque

Dans le cas d'une série groupée en classes, la médiane est représentée aussi par la valeur de la variable correspondant à l'intersection du polygône des effectifs cumulés avec l'horizontale représentant l'effectif moitié

Exemples :

1) Les données suivantes représentent le capital social en 10^3 de 17 sociétés marocaines créées entre le 20 et 24-10-1995 (les valeurs du caractère étudié sont classé par ordre croissant) :

médian ↓

$\overbrace{10;\ 10;\ 20;\ 20;\ 30;\ 50;\ 50;\ 50}$; 90

; $\underbrace{100;\ 100;\ 100\ ;\ 100\ ;\ 200\ ;\ 200\ ;\ 200\ ;\ 300}$.

Le nombre de valeurs observées est 17 (impaire). Dans ce cas, le capital médian est le neuvième (c.à.d 90) car il divise le nombre de sociétés en 2 ensembles égaux : 8 sociétés sont créées avec un capital inférieur à 90 000 DH et 8 autres sont créées avec un capital supérieur à 90 000 DH.
Donc Me=90 000

Exemples :[suite]

2) Les capacités de production de 10 sucreries au Maroc en 1993 (en 10^3 tonnes) sont les suivants :

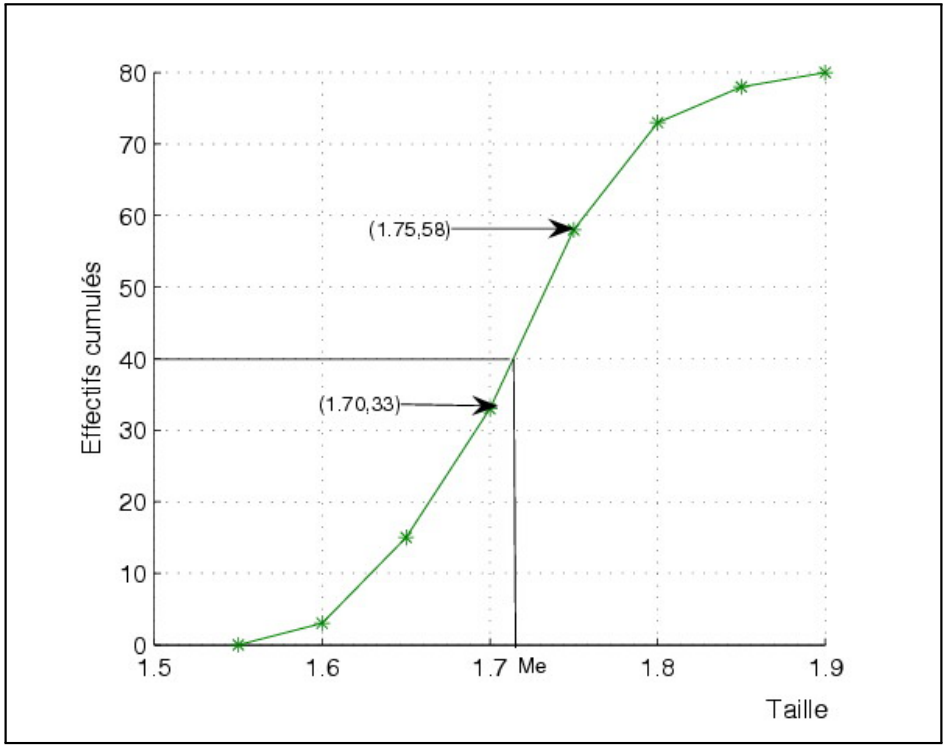
$\overbrace{30;\ 35;\ 35;\ 45}$; $50 \overset{\text{médian}}{\underset{\downarrow}{;}} 51$; $\overbrace{78;\ 80;\ 90\ ;\ 500}$. Le nombre de valeurs observées est 10 (paire) ; la médiane est, en effet, située ente la cinquième capacité (50) et la sixième (51). Dans ce cas-la, on peut estimer la production médiane par : $\frac{50+51}{2} = 50.5$

3) Médiane associée à la série statistique de l'**exemple1** : on a $N = 64$, les valeurs centrales sont la $32^{ème}$ valeure et la $33^{ème}$ valeure qui sont égales à 1. Donc la médiane est égale à 1.

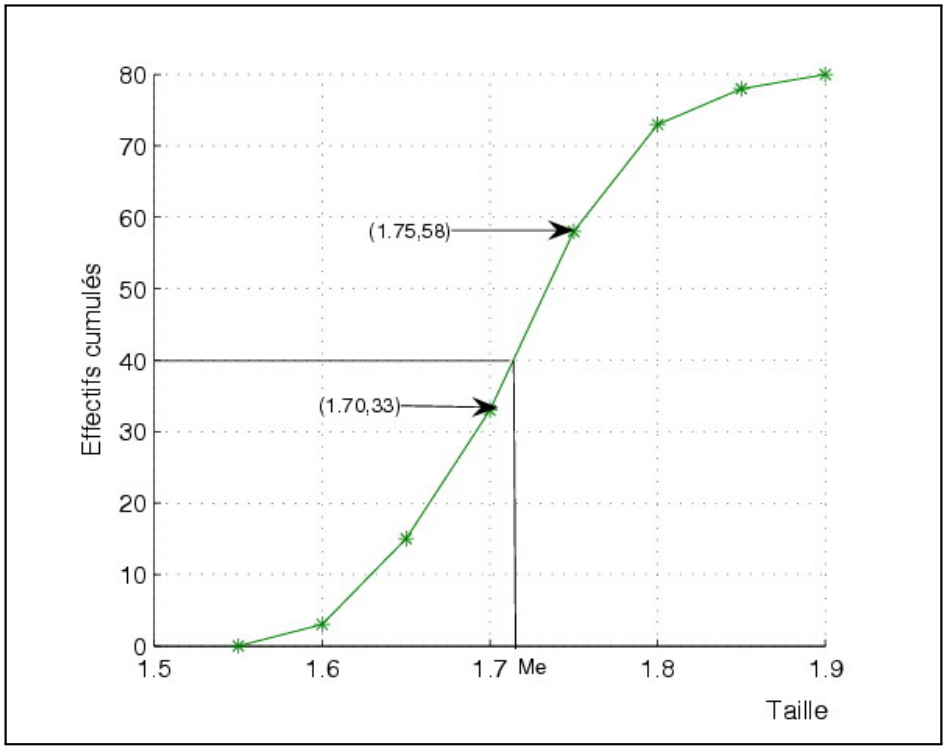
4)Médiane associée à la série statistique de l'**exemple3** : on a $N = 80$ chercher la médiane revient à trouver la taille de la $40^{ème}$ personne.

Exemples : [suite]

On procède par interpolation linéaire en utilisant **le polygône des effectifs cumulés**.



Exemples : [suite]



On a $$\frac{Me - 1.70}{40 - 33} = \frac{1.75 - 1.70}{58 - 33}.$$

$$\Longrightarrow Me = 1.70 + \frac{7\,(1.75 - 1.70)}{25} = 1.71\,.$$

2.2- Paramètres statistiques (suite) :

2.2.2-Caractéristiques de disperssion

Les paramètres de position sont insuffisants pour caractériser complètement une série.

Par exemple, deux séries différentes ayant la même moyenne, ne se repartissent pas nécessairement de la même manière autour de cette moyenne. Elles sont plus ou moins étalées, ce qui sera décrit par les caractéristiques de dispersion.

Un paramètre de dispersion se rapporte a la différence de deux valeurs du caractère alors qu' un paramètre de position représente une valeur du caractère

2.2- Paramètres statistiques (suite) :

a/ Ecart moyen arithmétique

Définition

Écart moyen arithmétique est la moyenne arithmétique des écarts par rapport à la moyenne arithmétique $\overline{X}$ des valeurs du caractère $\overline{E(X)} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i|x_i - \overline{X}|$

Lorsque la variable est continue l'écart moyen arithmétique est :

$$\overline{E(X)} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i|c_i - \overline{X}|$$

où les $c_i = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}$ *sont les centres des classes.*

2.2- Paramètres statistiques (suite) :

b/ Variance

Définition

La variance d'une série de valeurs du caractère est la moyenne arithmétique des carres des écarts de ces valeurs par rapport à leur moyenne arithmétique.

$$V(X) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i(x_i - \overline{X})^2$$

Lorsque la variable est continue l'écart moyen arithmétique est :

$$V(X) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i(c_i - \overline{X})^2$$

où les $c_i = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}$ *sont les centres des classes.*

2.2- Paramètres statistiques (suite) :

Théorème

- $V(X) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i x_i^2 - \overline{X}^2$
- $V(X+b) = V(X)$
- $V(aX+b) = a^2 V(X)$

c/ Ecart-type

Définition

L' écart-type (ou écart quadratique moyen) est la racine carrée de la variance $\sigma = \sqrt{V}$

2.2- Paramètres statistiques (suite) :

Définition

L'étendue d'une série *est la difference entre la plus grande et la plus petite valeur du caractère.*

d/ D'autres définitions

Soit $(x_i, n_i)_{i\in[1,p]}$ ou $(x_i, f_i)_{i\in[1,p]}$ une série statistique discrète. Soit N son effectif total et supposons que pour tout indice i, x_i est strictement positif. On appelle

- **moyenne harmonique** de la série est le nombre h définie par

$$\frac{1}{h} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p}\frac{n_i}{x_i} = \sum_{i=1}^{p}\frac{f_i}{x_i} \quad \left(\text{moyenne de } \left(\frac{1}{x_i}\right)\right)$$

2.2- Paramètres statistiques (suite) :

- **moyenne géométrique** de la série est le nombre g définie par : $g = \left(\prod_{i=1}^{p} x_i^{n_i} \right)^{1/N} = \prod_{i=1}^{p} x_i^{f_i}$.
- **Moment d'une série statistique :** on appelle moment d'ordre q par rapport à x_0 la moyenne arithmétique des puissances $q^{ièmes}$ des déviations des valeurs du caractère par rapport à x_0 notée : $m_q = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{p} n_i (x_i - x_0)^q$.

- Si $x_0 = 0$ et $q = 1$, le moment n'est rien d'autre que la moyenne.
- Si $x_0 = \overline{x}$ et $q = 2$, le moment n'est rien d'autre que la variance.

3- Les échelles de mesure

Il y a deux échelles de mesures pour les variables qualitatives : L'échelle nominale, L'échelle ordinale.

- L'échelle nominale permet de classer les individus dans des modalités qui sont exprimables par des noms et qui ne sont pas hiérarchisées.

Par exemple :

a) Le genre des personnes : 1. Femme ; 2. Homme ;

b) Statut marital : célibataire ; marié ; veuf, $\cdots$

- L'échelle ordinale permet de classer les individus dans des modalités et, en plus, d'établir un ordre hiérarchique entre ces modalités. Il y a une gradation dans les modalités utilisées (Elles sont alors hiérarchisées).

Par exemple :

a) Le niveau de scolarité :
1. Primaire ; 2. Secondaire ; 3. Collégial ; 4. Universitaire.

b) Niveau d'appréciation d'un produit :
Très bonne qualité, bonne qualité, qualité moyenne, $\cdots$.

3- Les échelles de mesure (suite)

Il y a deux échelles de mesures pour les variables quantitatives : L'échelle par intervalles, L'échelle de rapport.

- L'échelle par intervalles : permet non seulement d'identifier la modalité à laquelle appartient l'unité statistique et d'établir un ordre entre les modalités observables mais aussi elle nous informe de l'écart (la distance) séparant deux modalités. Sur cette échelle le zéro est situé de manière arbitraire (une valeur de référence arbitraire, mais ne signifie pas une absence d'un caractère), comme pour la mesure des températures par exemple (échelles Celsius et Fahrenheit).

3- Les échelles de mesure (suite)

- L'échelle de rapport : possède les propriétés d'échelle d'intervalle et le zéro constitue un zéro absolu c'est-à-dire la valeur 0 indique l'absence complète du caractère considéré.

Par exemple :âge, salaire, taille, vitesse, etc...