CHAPITRE IV : Méthodes indirectes de résolution numérique de systèmes linéaires $AX = B$

1. Quelques rappels sur les matrices

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice carrée.

1. A est dite à diagonale strictement dominante en colonnes si elle vérifie :

$$\sum_{i=1, i \neq j}^{i=n} |a_{ij}| < |a_{jj}| \ , 1 \leq j \leq n$$

2. A est dite à diagonale strictement dominante en lignes si elle vérifie :

$$\sum_{j=1, j \neq i}^{j=n} |a_{ij}| < |a_{ii}| \ , 1 \leq i \leq n$$

3. Une norme matricielle $\|.\|$ vérifie les 4 propriétés suivantes :

$$\begin{aligned}
i)&\ \ \|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0 \\
ii)&\ \ \|\lambda A\| = |\lambda| \, \|A\| \text{ pour tout } \lambda \in \mathbb{R} \\
iii)&\ \ \|A + B\| \leq \|A\| + \|B\| \\
iv)&\ \ \|AB\| \leq \|A\| \, \|B\|
\end{aligned}$$

4. Exemples de normes matricielles :

$$\|A\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{j=n} |a_{ij}|$$

$$\|A\|_1 = \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{i=n} |a_{ij}|$$

$$\begin{aligned}\|A\|_2 &= \left(\sum_{ij} |a_{ij}|^2\right)^{1/2} \\ &= \sqrt{\rho(A^\top A)}\end{aligned}$$

$$\rho(A) = \max_{1\leq i\leq n} |\lambda_i(A)|$$

$\rho(A)$ est dite norme spectrale
$\lambda_i(A)$: valeur propore de A

5. Etant donné une norme vectorielle $\|.\|$, l'application

$$A \longrightarrow \|A\| = \sup_{x \neq 0} \left(\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \right)$$

définit une norme matricielle dite norme induite par (ou subordonnée à) la norme vectorielle $\|.\|$.

6. Les normes vectorielles $\|.\|_1$, $\|.\|_\infty$ et $\|.\|_2$ induisent, respectivement, les normes matricielles suivantes

$$\|A\|_1 = \max_j \sum_i |a_{ij}|, \|A\|_\infty = \max_i \sum_j |a_{ij}|, \|A\|_2 = \sqrt{\varrho(A^\top A)}.$$

7. $(I + B)$ est inversible si $\|B\| < 1$ et de plus $\left\|(I+B)^{-1}\right\| \leq \dfrac{1}{1 - \|B\|}$

2. Méthodes classiques(Jacobi, Gauss Seidel, Relaxation)

Pour résoudre le système

$$Ax = b, \tag{2.1}$$

on utilise des méthodes, dites indirectes, du type

$$x^{(k+1)} = Tx^{(k)} + C \tag{2.2}$$

Où T est une matrice obtenue à partir de A
et C un vecteur dépendant de A et B
On écrit A sous la forme $A = M - N$
En supposant M inversible, l'équation (2.1) donne : $\mathbf{x} = M^{-1}N\mathbf{x} + M^{-1}\mathbf{b}$
et ceci suggère le procédé itératif du type (2.2) avec

$$T = M^{-1}N \text{ et } \mathbf{C} = M^{-1}\mathbf{b}$$

Il ya plusieurs façons d'écrire A sous la forme $A = M - N$

Dans le cadre de ce cours on se limitera aux cas les plus utilisés à partir de :

$$A = D - L - U$$

- Méthode de Jacobi : $M = D, N = L + U$.
- Méthode de Gauss-Seidel : $M = D - L, N = U$.
- Méthode de relaxation : $A = A(\omega) = M(\omega) - N(\omega)$, avec

$$M(\omega) = \frac{1}{\omega} D - L,$$

$$N(\omega) = \frac{1-\omega}{\omega} D - U$$

où ω est un scalaire.

2.1 Généralités et définitions

Définition

Une méthode de type (2.2) est dite convergente si pour toute valeur initiale $x^{(0)}$ on a $\lim_{n\to+\infty} x^{(n)} = x$.
Si une telle limite x existe alors elle vérifie $Tx + C = x$.

Définition

On appelle erreur de la méthode (à la k^{eme} itération) la quantité $e^{(k)} = x^{(k)} - x$ avec $e^{(0)} = x^{(0)} - x$.
On obtient $e^{(k)} = T^k e^{(0)}$ pour tout k.
La méthode est convergente si $\lim_{k\to\infty} T^k = 0$.

Définition

Une matrice carrée B est dite convergente si $\lim_{k\to+\infty} B^k = 0$.

Théorème

Soit A une matrice carrée. Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) $\lim_{k \to +\infty} A^k = 0.$

ii) $\lim_{k \to +\infty} A^k v = 0$ *pour tout* v.

iii) $\rho(A) < 1.$

iv) $\|A\| < 1,$ *pour au moins une norme matricielle induite.*

Théorème

Soit A une matrice carrée et $\|.\|$ une norme quelconque, alors

$$\lim_{k \to +\infty} \left\| A^k \right\|^{1/k} = \rho(A).$$

Remarque

L'étude des méthodes itératives consiste à étudier les deux problèmes suivants :

1. *Etant donné une méthode itérative de matrice T, déterminer si la méthode converge, ie si $\rho(T) < 1$ ou s'il existe une norme telle que $\|T\| < 1$.*
2. *Etant donné deux méthodes itératives convergentes de matrices T et $\widetilde{T}$, la méthode la plus rapide est celle ayant le plus petit rayon spectral.*

2.2 Méthode de Jacobi :

Si $A = (a_{ij})$ la méthode de Jacobi consiste à choisir ; $M = D = diag(a_{ii})$ et $N = L + U = (-a_{ij})_{i,\neq j}$ le schéma itératif est comme suit :

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = D^{-1}(L+U)\mathbf{x}^{(k)} + D^{-1}\mathbf{b} = T_J\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{c}$$

La matrice $T_J = D^{-1}(L+U)$ est dite matrice de Jacobi associée à A
Si $\mathbf{x}^{(0)}$ est le vecteur initial donné, l'algorithme de Jacobi est de la forme :

$$x_i^{(k+1)} = -\frac{1}{a_{ii}} \sum_{j=1, j\neq i}^{j=n} a_{ij}x_j^{(k)} + \frac{b_i}{a_{ii}}; i = 1, \cdots ., n$$

Explicitement, on obtient :

$$\begin{cases} a_{11}x_1^{(k+1)} & = & -a_{12}x_2^{(k)} - \cdots - a_{1n}x_n^{(k)} + b_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{nn}x_n^{(k+1)} & = & -a_{n1}x_1^{(k)} - \cdots - a_{nn-1}x_{n-1}^{(k)} + b_n \end{cases}$$

Une condition suffisante pour que la méthode de Jacobi converge est :

$$\rho(T_J) < 1 \quad \text{ou} \quad \|T_J\|_\infty < 1$$

Théorème

Si A est une matrice carrée à diagonale strictement dominante en lignes alors la méthode de Jacobi converge

Preuve Si A est une matrice carrée à diagonale strictement dominante en lignes alors on a : $\sum_{j=1,j\neq i}^{j=n} |a_{ij}| < |a_{ii}| \;\; , 1 \leq i \leq n \;\; (*)$

ou encore : $\dfrac{1}{|a_{ii}|} \sum_{j=1,j\neq i}^{j=n} |a_{ij}| < 1, \; 1 \leq i \leq n$

Par ailleurs $T_J = D^{-1}(L+U) = (t_{ij})$ avec $t_{ij} = (\dfrac{-a_{ij}}{a_{ii}})$ si $\; i \neq j$ et $t_{ii} = 0$

$$\|T_J\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{j=n} |t_{ij}| = \max_{1\leq i\leq n} \frac{1}{|a_{ii}|} \sum_{j=1,j\neq i}^{j=n} |a_{ij}| < 1$$

Remarque

On montre un résultat analogue avec preuve similaire si A est strictement dominante en colonnes.

2.3 Méthode de Gauss-Seidel :

Pour cette méthode, les matrices M et N sont données par : $M = D - L$ (supposé inversible) et $N = U$ où D, L et U proviennent de l'écriture $A = D - L - U$, le schéma itératif est comme suit :

$$(D - L)x^{(k+1)} = Ux^{(k)} + b \tag{2.3}$$

ou encore

$$x^{(k+1)} = (D - L)^{-1}Ux^{(k)} + (D - L)^{-1}b \tag{2.4}$$

en explicitant (2.3) on obtient :

$$\left\{\begin{array}{lcl}
a_{11}x_1^{(k+1)} & = & -a_{12}x_2^{(k)} - \cdots - a_{1n}x_n^{(k)} + b_1 \\
a_{22}x_2^{(k+1)} & = & -a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{23}x_3^{(k)} - \cdots - a_{2n}x_n^{(k)} + b_2 \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
a_{ii}x_i^{(k+1)} & = & -a_{i1}x_1^{(k+1)} \cdots - a_{ii-1}x_{i-1}^{(k+1)} - a_{ii+1}x_{i+1}^{(k)} - \cdots - a_{in}x_n^{(k)} + b_i \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
a_{nn}x_n^{(k+1)} & = & -a_{n1}x_1^{(k+1)} - \cdots - a_{nn-1}x_{n-1}^{(k+1)} + b_n
\end{array}\right.$$

La matrice $T_{GS} = (D - L)^{-1}U$ est dite matrice de Gauss-Seidel associée à A

Théorème

Si A est une matrice carrée à diagonale strictement dominante en lignes alors la méthode de Gauss-Seidel converge

Preuve :

on montre que $\| T_{GS} \|_\infty = \left\| (D - L)^{-1} U \right\|_\infty < 1$ en passant par :

$$\| T \|_\infty = \max_{\mathbf{x} \neq 0} \frac{\| T\mathbf{x} \|_\infty}{\|\mathbf{x}\|_\infty}$$

On pose $\mathbf{y} = T\mathbf{x} = (D - L)^{-1}U\mathbf{x}$
qui donne $(D - L)\mathbf{y} = U\mathbf{x}$ et $D\mathbf{y} = L\mathbf{y} + U\mathbf{x}$ ou encore $\mathbf{y} = D^{-1}L\mathbf{y} + D^{-1}U\mathbf{x}$
Soit k l'indice tel que

$$|y_k| = \max_{1 \leq i \leq n} |y_i| = \|\mathbf{y}\|_\infty = \| T\mathbf{x} \|_\infty$$

On a $y_k = \sum_{j=1}^{j=k-1} (D^{-1}L)_{kj} y_j + \sum_{j=k+1}^{j=n} (D^{-1}U)_{kj} x_j$ d'où

$$|y_k| \leq \sum_{j=1}^{j=k-1} \frac{|a_{kj}|}{|a_{kk}|} \|\mathbf{y}\|_\infty + \sum_{j=k+1}^{j=n} \frac{|a_{kj}|}{|a_{kk}|} \|\mathbf{x}\|_\infty$$

et :

$$\left(1 - \sum_{j=1}^{j=k-1} \frac{|a_{kj}|}{|a_{kk}|}\right) \frac{\|\mathbf{y}\|_\infty}{\|\mathbf{x}\|_\infty} \leq \sum_{j=k+1}^{j=n} \frac{|a_{kj}|}{|a_{kk}|}$$

soit enfin :

$$\frac{\|\mathbf{Tx}\|_\infty}{\|\mathbf{x}\|_\infty} = \frac{\|\mathbf{y}\|_\infty}{\|\mathbf{x}\|_\infty} \leq \frac{\sum_{j=k+1}^{j=n} \frac{|a_{kj}|}{|a_{kk}|}}{\left(1 - \sum_{j=1}^{j=k-1} \frac{|a_{kj}|}{|a_{kk}|}\right)} < 1, \ \forall x \neq 0$$

$$\Longrightarrow \|T\|_\infty = \max_{\mathbf{x} \neq 0} \frac{\|T\mathbf{x}\|_\infty}{\|\mathbf{x}\|_\infty} < 1$$

Donc la méthode Gauss-Seidel converge

2.4 Méthode de relaxation

Si on considère des matrices M et N dépendantes d'un paramètre ω on obtient : $A = M(\omega) - N(\omega)$

avec $M(\omega) = \dfrac{1}{\omega}D - L$ et $N(\omega) = \dfrac{1-\omega}{\omega}D + U$

$$T(\omega) = \left(\frac{1}{\omega}D - L\right)^{-1}\left(\frac{1-\omega}{\omega}D + U\right) \text{ et } c(\omega) = \left(\frac{1}{\omega}D - L\right)^{-1}\mathbf{b}$$

$$T(\omega) = (I - \omega D^{-1}L)^{-1}((1-\omega)I + \omega D^{-1}U)$$

Remarques

- Si $\omega = 1$, on retrouve la méthode de Gauss-Seidel.
- Si $\omega > 1$, on parle de sur-relaxation.
- Si $\omega < 1$, on parle de sous-relaxation.

Théorème

Condition nécessaire de convergence de la méthode de relaxation :

$$0 < \omega < 2$$

Preuve :

$$T(\omega) = \left(\frac{1}{\omega}D - L\right)^{-1}\left(\frac{1-\omega}{\omega}D + U\right)$$

Si les valeurs propres de $T(\omega)$ sont notées $\lambda_i(\omega)$ on a :

$$\det(T(\omega)) = \prod_{i=1}^{n}\lambda_i(\omega) = \frac{\det\left(\frac{1-\omega}{\omega}D + U\right)}{\det\left(\frac{1}{\omega}D - L\right)} = (1-\omega)^n.$$

D'où $\rho(T_\omega) \geq \left[|1-\omega|^n\right]^{1/n} = |1-\omega|$.
Pour que la méthode converge, il est nécessaire d'avoir $\rho(T(\omega)) < 1$ et par conséquent $|1-\omega| < 1$ d'où $\omega \in]0, 2[$.

Exercice (1)

On considère le système linéaire $Ax = b$, où A et b sont définis de la façon suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2(1-\beta) & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. Sans calculer les matrices d'itération, donner une condition suffisante sur le paramètre $\beta \in \mathbb{R}$ pour que les méthodes de Gauss-Seidel et de Jacobi soient convergentes.
2. Calculer la matrice d'itération B_J de la méthode de Jacobi et établir pour quelles valeurs de β cette méthode est convergente.
3. Calculer la matrices d'itération B_{GS} de la méthodes de Gauss-Seidel et établir pour quelles valeurs de β cette méthode est convergente.
4. Indiquer quel est le rapport entre les vitesses de convergence.

Corrigé

Exercice (1)

1. On sait que si A est une matrice à diagonale dominante stricte par ligne, alors les méthodes de Gauss-Seidel et de Jacobi sont convergentes. On voit bien que cette condition est satisfaite par la deuxième et la troisième ligne de la matrice A .
   Il suffit alors que : $|2(1-\beta)| < 1 \Longleftrightarrow \frac{1}{2} < \beta < \frac{3}{2}$
2. Matrice d'itération de la méthode de Jacobi : On a $A = D - L - U$ avec

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, L = -\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, U = -\begin{pmatrix} 0 & 2(1-\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice (Suite)

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, L+U \begin{pmatrix} 0 & -2+2\beta & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow B_J = D^{-1}(L+U) = \begin{pmatrix} 0 & 2(\beta-1) & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dont les valeurs propres sont $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -\sqrt{|1-\beta|}$, $\lambda_3 = \sqrt{|1-\beta|}$

$$\Longrightarrow \rho(B_J) = \sqrt{|1-\beta|}$$

donc la méthode converge si et seulement si

$$\rho(B_J) < 1 \Longleftrightarrow 0 < \beta < 2$$

Exercice (Suite)

3. Matrice d'itération de la méthode de Gauss-Seidel :

$$D - L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, (D-L)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_{GS} = (D-L)^{-1}U = \begin{pmatrix} 0 & 2(\beta - 1) & 0 \\ 0 & 1-\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dont les valeurs propres sont $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 1 - \beta$
$\Longrightarrow \rho(B_{GS}) = 1 - \beta$
donc la méthode converge si et seulement si

$$\rho(B_{GS}) < 1 \Longleftrightarrow 0 < \beta < 2$$

4. On a que $\rho(B_{GS}) = (\rho(B_J))^2$, et donc la méthode de Gauss-Seidel converge plus vite que la méthode de Jacobi.

Exercice (2)

Soit A une matrice définie par $A = Id - E - F$, avec

$$E = -\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F = -\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que A est inversible.
2. Soit $0 < \omega < 2$. Montrer que $(\frac{1}{\omega} Id - E)$ est inversible si et seulement si $\omega \neq \frac{\sqrt{2}}{2}$
3. Pour $0 < \omega < 2, \omega \neq \frac{\sqrt{2}}{2}$, on considère la méthode itérative (pour trouver la solution de $Ax = b$) suivante :

$$\left(\frac{1}{\omega} Id - E\right) x^{n+1} = \left(F + \frac{1-\omega}{\omega} Id\right) x^n + b$$

Exercice (Suite)

Montrer que les valeurs propres de la matrice d'itération

$$L_\omega = \left(\frac{1}{\omega} Id - E\right)^{-1} \left(F + \frac{1-\omega}{\omega} Id\right)$$

en fonction de ω , sont

$$\lambda_1 = 1 - \omega, \quad \lambda_2 = \frac{1-\omega}{1+\omega\sqrt{2}}, \quad \lambda_3 = \frac{1-\omega}{1-\omega\sqrt{2}}.$$

(Suggestion : Observer que $\det(N^{-1}M - \lambda Id) = 0$ ssi $\det(M - \lambda N) = 0$.)

4. Montrer que le rayon spectral est $\rho(L_\omega) = |\lambda_3|$ si $\omega < \sqrt{2}$ et $\rho(L_\omega) = |\lambda_1|$ si $\omega \geq \sqrt{2}$
5. Pour quelles valeurs de ω la méthode est-elle convergente ?

Corrigé

Exercice (2)

1. On a $\det(A) = -1 \neq 0$ donc A est inversible.
2. Soit $0 < \omega < 2$. On a
$\det\left(\frac{1}{\omega} Id - E\right) = \frac{1}{\omega}\left(\frac{1}{\omega^2} - 2\right) \neq 0 \Leftrightarrow \omega \neq \sqrt{2}/2.$
Donc $\left(\frac{1}{\omega} Id - E\right)$ est inversible si et seulement si $\omega \neq \frac{\sqrt{2}}{2}$
3. Pour $0 < \omega < 2, \omega \neq \frac{\sqrt{2}}{2}$, on a

$$
\begin{aligned}
\det(L_\omega - \lambda Id) &= \det\left(\left(\frac{1}{\omega} Id - E\right)^{-1}\left(F + \frac{1-\omega}{\omega} Id\right) - \lambda Id\right) \\
&= \det\left(\left(F + \frac{1-\omega}{\omega} Id\right) - \lambda\left(\frac{1}{\omega} Id - E\right)\right)
\end{aligned}
$$

Exercice (Suite)

$$det(L_\omega - \lambda Id) = \frac{1}{\omega^3}\Big[((1-\omega)-\lambda)\left((1-\omega)-\lambda(1+\omega\sqrt{2})\right)$$
$$\left((1-\omega)-\lambda(1-\omega\sqrt{2})\right)\Big]$$

$$\Longrightarrow \lambda_1 = 1-\omega, \quad \lambda_2 = \frac{1-\omega}{1+\omega\sqrt{2}}, \quad \lambda_3 = \frac{1-\omega}{1-\omega\sqrt{2}}.$$

4. On a $\rho(L_\omega) = \max(|\lambda_1|, |\lambda_2|, |\lambda_3|)$

$$|\lambda_1| > |\lambda_2|, \forall \omega \in]0, 2[$$

$$\begin{aligned} |\lambda_1| \leq |\lambda_3| \quad &\Leftrightarrow \quad |1-\omega| \leq \frac{|1-\omega|}{|1-\omega\sqrt{2}|} \\ &\Leftrightarrow \quad |1-\omega\sqrt{2}| \leq 1 \\ &\Leftrightarrow \quad -1 \leq 1-\omega\sqrt{2} \leq 1 \\ &\Leftrightarrow \quad -2 \leq -\omega\sqrt{2} \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 0 \leq \omega \leq \sqrt{2} \end{aligned}$$

Exercice (Suite)

Donc $\rho(L_\omega) = |\lambda_3| = \dfrac{|1-\omega|}{|1-\omega\sqrt{2}|}$ si $\omega \in]0, \sqrt{2}[$

$\rho(L_\omega) = |\lambda_1| = |1-\omega|$ si $\omega \in [\sqrt{2}, 2[$

5. La méthode est convergente si $\rho(L_\omega) < 1$

$$i)\ \text{Si } \omega \in]0, \sqrt{2}], \rho(L_\omega) = \frac{|1-\omega|}{|1-\omega\sqrt{2}|}$$

a) Si $\omega \in]0, 1] \Longrightarrow 1-\omega \geq 0 \Longrightarrow |1-\omega| = 1-\omega$

- Si $1-\omega\sqrt{2} \geq 0 \Longrightarrow |1-\omega\sqrt{2}| = 1-\omega\sqrt{2}$
  $\Longrightarrow \rho(L_\omega) = \dfrac{1-\omega}{1-\omega\sqrt{2}} \geq 1$
  $\left(\textit{puisque}\ \ 1-\omega \geq 1-\omega\sqrt{2}\right)$
- Si $1-\omega\sqrt{2} \leq 0 \Longrightarrow |1-\omega\sqrt{2}| = \omega\sqrt{2}-1$
  $\Longrightarrow \rho(L_\omega) = \dfrac{1-\omega}{\omega\sqrt{2}-1} < 1 \Longleftrightarrow \dfrac{2}{1+\sqrt{2}} < \omega$

Exercice (Suite)

b) Si $\omega \in]1, \sqrt{2}[\Longrightarrow 1 - \omega \leq 0 \Longrightarrow |1 - \omega| = \omega - 1$
$-1 \leq 1 - \omega\sqrt{2} \leq 1 - \sqrt{2} \leq 0 \Longrightarrow |1 - \omega\sqrt{2}| = \omega\sqrt{2} - 1$

$$\Longrightarrow \rho(L_\omega) = \frac{\omega - 1}{\omega\sqrt{2} - 1} < 1 \quad \left(\textit{puisque} \ \ \omega < \omega\sqrt{2}\right)$$

D'où la méthode est convergente si $\dfrac{2}{1+\sqrt{2}} < \omega$

ii) Si $\omega \in]\sqrt{2}, 2], \rho(L_\omega) = |1 - \omega| = \omega - 1 < 1; \ \ \forall \omega \in]\sqrt{2}, 2]$
D'où la méthode est convergente $\forall \omega \in]\sqrt{2}, 2]$

D'où la méthode converge si et seulement si $\omega \in \left]\dfrac{2}{1+\sqrt{2}}, 2\right[$