UNIVERSITE MOHAMMED PREMIER
ECOLE NATIONALE DES SCIENCES APPLIQUEES
OUJDA-MAROC

Filière : GIndus3 — Année universitaire : 2020-2021
Module : Méthodes Numériques — Enseignant : M. Derouich

Fiche TD $N°$: 4

Exercice 1. :
On considère le système linéaire $Ax = b$, où A et b sont définis de la façon suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2(1-\beta) & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. Sans calculer les matrices d'itération, donner une condition suffisante sur le paramètre $\beta \in \mathbb{R}$ pour que les méthodes de Gauss-Seidel et de Jacobi soient convergentes.
2. Calculer la matrice d'itération B_J de la méthode de Jacobi et établir pour quelles valeurs de β cette méthode est convergente.
3. Calculer la matrices d'itération B_{GS} de la méthodes de Gauss-Seidel et établir pour quelles valeurs de β cette méthode est convergente.
4. Indiquer quel est le rapport entre les vitesses de convergence.

Corrigé

1. On sait que si A est une matrice à diagonale dominante stricte par ligne, alors les méthodes de Gauss-Seidel et de Jacobi sont convergentes. On voit bien que cette condition est satisfaite par la deuxième et la troisième ligne de la matrice A .
   Il suffit alors que : $|2(1-\beta)| < 1 \Longleftrightarrow \frac{1}{2} < \beta < \frac{3}{2}$
2. Matrice d'itération de la méthode de Jacobi : On a $A = D - L - U$ avec

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, L = -\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, U = -\begin{pmatrix} 0 & 2(1-\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, L + U \begin{pmatrix} 0 & -2+2\beta & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow B_J = D^{-1}(L+U) = \begin{pmatrix} 0 & 2(\beta-1) & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dont les valeurs propres sont $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -\sqrt{|1-\beta|}, \lambda_3 = \sqrt{|1-\beta|}$

$$\Longrightarrow \rho(B_J) = \sqrt{|1-\beta|}$$

donc la méthode converge si et seulement si

$$\rho(B_J) < 1 \Longleftrightarrow 0 < \beta < 2$$

3. Matrice d'itération de la méthode de Gauss-Seidel :

$$D - L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, (D-L)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_{GS} = (D-L)^{-1}U = \begin{pmatrix} 0 & 2(\beta-1) & 0 \\ 0 & 1-\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dont les valeurs propres sont $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 1-\beta \Longrightarrow \rho(B_{GS}) = 1-\beta$ donc la méthode converge si et seulement si

$$\rho(B_{GS}) < 1 \Longleftrightarrow 0 < \beta < 2$$

4. On a que $\rho(B_{GS}) = (\rho(B_J))^2$, et donc la méthode de Gauss-Seidel converge plus vite que la méthode de Jacobi.

Exercice 2. :
Soit A une matrice définie par $A = Id - E - F$, avec

$$E = -\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F = -\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que A est inversible.
2. Soit $0 < \omega < 2$. Montrer que $(\frac{1}{\omega}Id - E)$ est inversible si et seulement si $\omega \neq \frac{\sqrt{2}}{2}$

3. Pour $0 < \omega < 2, \omega \neq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, on considère la méthode itérative (pour trouver la solution de $Ax = b$) suivante :

$$\left(\frac{1}{\omega}Id - E\right) x^{n+1} = \left(F + \frac{1-\omega}{\omega}Id\right) x^n + b$$

Montrer que les valeurs propres de la matrice d'itération

$$L_\omega = \left(\frac{1}{\omega}Id - E\right)^{-1} \left(F + \frac{1-\omega}{\omega}Id\right)$$

en fonction de ω , sont

$$\lambda_1 = 1-\omega, \;\; \lambda_2 = \frac{1-\omega}{1+\omega\sqrt{2}}, \;\; \lambda_3 = \frac{1-\omega}{1-\omega\sqrt{2}}.$$

(Suggestion : Observer que $\det(N^{-1}M - \lambda Id) = 0$ ssi $\det(M - \lambda N) = 0$.)

4. Montrer que le rayon spectral est $\rho(L_\omega) = |\lambda_3|$ si $\omega < \sqrt{2}$ et $\rho(L_\omega) = |\lambda_1|$ si $\omega \geq \sqrt{2}$

5. Pour quelles valeurs de ω la méthode est-elle convergente ?

Corrigé

1. On a $\det(A) = -1 \neq 0$ donc A est inversible.
2. Soit $0 < \omega < 2$. On a $\det\left(\frac{1}{\omega}Id - E\right) = \frac{1}{\omega}\left(\frac{1}{\omega^2 - 2}\right) \neq 0 \Leftrightarrow \omega \neq \sqrt{2}/2$.

   Donc $\left(\frac{1}{\omega}Id - E\right)$ est inversible si et seulement si $\omega \neq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
3. Pour $0 < \omega < 2, \omega \neq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, on a

$$\begin{aligned}
\det(L_\omega - \lambda Id) &= \det\left(\left(\frac{1}{\omega}Id - E\right)^{-1}\left(F + \frac{1-\omega}{\omega}Id\right) - \lambda Id\right) \\
&= \det\left(\left(F + \frac{1-\omega}{\omega}Id\right) - \lambda\left(\frac{1}{\omega}Id - E\right)\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
det(L_\omega - \lambda Id) &= \frac{1}{\omega}\Big[((1-\omega)-\lambda)\left((1-\omega) - \lambda(1+\omega\sqrt{2})\right) \\
&\qquad \left((1-\omega) - \lambda(1-\omega\sqrt{2})\right)\Big]
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \lambda_1 = 1-\omega, \;\; \lambda_2 = \frac{1-\omega}{1+\omega\sqrt{2}}, \;\; \lambda_3 = \frac{1-\omega}{1-\omega\sqrt{2}}.$$

4. On a $\rho(L_\omega) = \max(|\lambda_1|, |\lambda_2|, |\lambda_3|)$

$$
\begin{aligned}
&|\lambda_1| > |\lambda_2|, \forall \omega \in]0, 2[\\
&|\lambda_1| \leq |\lambda_3| \quad \Leftrightarrow \quad |1-\omega| \leq \frac{|1-\omega|}{|1-\omega\sqrt{2}|} \\
&\qquad\qquad\quad\; \Leftrightarrow \quad |1-\omega\sqrt{2}| \leq 1 \\
&\qquad\qquad\quad\; \Leftrightarrow \quad -1 \leq 1-\omega\sqrt{2} \leq 1 \\
&\qquad\qquad\quad\; \Leftrightarrow \quad -2 \leq -\omega\sqrt{2} \leq 0 \\
&\qquad\qquad\quad\; \Leftrightarrow \quad 0 \leq \omega \leq \sqrt{2}
\end{aligned}
$$

Donc $\rho(L_\omega) = |\lambda_3| = \dfrac{|1-\omega|}{|1-\omega\sqrt{2}|}$ si $\omega \in]0, \sqrt{2}[$

$\rho(L_\omega) = |\lambda_1| = |1-\omega|$ si $\omega \in [\sqrt{2}, 2[$

5. La méthode est convergente si $\rho(L_\omega) < 1$

i) Si $\omega \in]0, \sqrt{2}], \rho(L_\omega) = \dfrac{|1-\omega|}{|1-\omega\sqrt{2}|}$

a) Si $\omega \in]0, 1] \Longrightarrow 1-\omega \geq 0 \Longrightarrow |1-\omega| = 1-\omega$

— Si $1-\omega\sqrt{2} \geq 0 \Longrightarrow |1-\omega\sqrt{2}| = 1-\omega\sqrt{2}$

$\Longrightarrow \rho(L_\omega) = \dfrac{1-\omega}{1-\omega\sqrt{2}} \geq 1$

$\Big(\textit{puisque}\;\; 1-\omega \geq 1-\omega\sqrt{2}\Big)$

— Si $1-\omega\sqrt{2} \leq 0 \Longrightarrow |1-\omega\sqrt{2}| = \omega\sqrt{2}-1$

$\Longrightarrow \rho(L_\omega) = \dfrac{1-\omega}{\omega\sqrt{2}-1} < 1 \Longleftrightarrow \dfrac{2}{1+\sqrt{2}} < \omega$

b) Si $\omega \in]1, \sqrt{2}[\Longrightarrow 1-\omega \leq 0 \Longrightarrow |1-\omega| = \omega - 1$

$-1 \leq 1-\omega\sqrt{2} \leq 1-\sqrt{2} \leq 0 \Longrightarrow |1-\omega\sqrt{2}| = \omega\sqrt{2}-1$

$\Longrightarrow \rho(L_\omega) = \dfrac{\omega-1}{\omega\sqrt{2}-1} < 1 \quad \Big(\textit{puisque}\;\; \omega < \omega\sqrt{2}\Big)$

D'où la méthode est convergente si $\dfrac{2}{1+\sqrt{2}} < \omega$

ii) Si $\omega \in]\sqrt{2}, 2], \rho(L_\omega) = |1-\omega| = \omega - 1 < 1;\;\; \forall \omega \in]\sqrt{2}, 2]$

D'où la méthode est convergente $\forall \omega \in \Big]\sqrt{2}, 2\Big]$

D'où la méthode converge si et seulement si $\omega \in \Big]\dfrac{2}{1+\sqrt{2}}, 2\Big[$