Filière : GIndus3 — Année universitaire : 2020-2021
Module : Méthodes Numériques — Enseignant : M. Derouich

Fiche TD N° : 4

Exercice 1. :
On considère le système linéaire $Ax = b$, où A et b sont définis de la façon suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2(1-\beta) & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. Sans calculer les matrices d'itération, donner une condition suffisante sur le paramètre $\beta \in \mathbb{R}$ pour que les méthodes de Gauss-Seidel et de Jacobi soient convergentes.
2. Calculer la matrice d'itération B_J de la méthode de Jacobi et établir pour quelles valeurs de β cette méthode est convergente.
3. Calculer la matrices d'itération B_{GS} de la méthodes de Gauss-Seidel et établir pour quelles valeurs de β cette méthode est convergente.
4. Indiquer quel est le rapport entre les vitesses de convergence.

Exercice 2. :
Soit A une matrice définie par $A = Id - E - F$, avec

$$E = -\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F = -\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que A est inversible.
2. Soit $0 < \omega < 2$. Montrer que $(\frac{1}{\omega}Id - E)$ est inversible si et seulement si $\omega \neq \frac{\sqrt{2}}{2}$
3. Pour $0 < \omega < 2, \omega \neq \frac{\sqrt{2}}{2}$, on considère la méthode itérative (pour trouver la solution de $Ax = b$) suivante :

$$\left(\frac{1}{\omega}Id - E\right) x^{n+1} = \left(F + \frac{1-\omega}{\omega}Id\right) x^n + b$$

Montrer que les valeurs propres de la matrice d'itération

$$L_\omega = \left(\frac{1}{\omega}Id - E\right)^{-1} \left(F + \frac{1-\omega}{\omega}Id\right)$$

en fonction de ω , sont

$$\lambda_1 = 1 - \omega, \ \ \lambda_2 = \frac{1-\omega}{1+\omega\sqrt{2}}, \ \ \lambda_3 = \frac{1-\omega}{1-\omega\sqrt{2}}.$$

(Suggestion : Observer que $\det(N^{-1}M - \lambda Id) = 0$ ssi $\det(M - \lambda N) = 0$.)

4. Montrer que le rayon spectral est $\rho(L_\omega) = |\lambda_3|$ si $\omega < \sqrt{2}$ et $\rho(L_\omega) = |\lambda_1|$ si $\omega \geq \sqrt{2}$

5. Pour quelles valeurs de ω la méthode est-elle convergente ?